

Иванова Елена Александровна

# Динамика вращающегося твердого тела на инерционной упругой пластине

Специальность 01.02.04 — “Механика деформируемого твердого тела”

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени  
доктора физико-математических наук

Санкт-Петербург  
2002

Работа выполнена на кафедре “Теоретическая механика”  
Санкт-Петербургского государственного политехнического университета

Научный консультант — доктор физико-математических наук,  
профессор Жилин Павел Андреевич

Официальные оппоненты — доктор физико-математических наук,  
профессор Индейцев Дмитрий Анатольевич

— доктор физико-математических наук,  
профессор Коузов Даниил Петрович

— доктор физико-математических наук,  
профессор Товстик Петр Евгеньевич

Ведущая организация — ОАО "Механобр - техника"

Защита состоится 11 сентября 2002 г. на заседании диссертационного совета Д 212.229.08 при Санкт-Петербургском государственном политехническом университете по адресу: 195251. С.-Петербург, ул. Политехническая, 29

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке СПбГПУ.

Автореферат разослан “ \_\_\_\_ ” июля 2002 г.

Ученый секретарь диссертационного совета  
кандидат физико-математических наук

Т. В. Воробьева

# Общая характеристика работы

**Актуальность темы.** Проблемы механики, связанные с разработкой методов расчета механических систем, включающих быстро вращающиеся роторы на упругом основании, весьма многочисленны и многие из них мало изучены с теоретической точки зрения. Подобные проблемы возникают, в частности, при расчете ультрацентрифуг (центрифуг, рабочая угловая скорость которых превышает 100 тысяч оборотов в минуту), предназначенных для сверхчистой сепарации веществ. Рабочие частоты ультрацентрифуг лежат значительно выше первых собственных частот системы. Поэтому при разгоне и торможении ротора ультрацентрифуга проходит через несколько резонансов. При этом возникают вибрации, сопровождающиеся большими динамическими нагрузками. Особенно критическими являются вибрации на этапе торможения, поскольку они резко снижают уровень достигнутой очистки. Как правило, динамический расчет центрифуг основан на исследовании моделей, представляющих собой вращающееся твердое тело на безынерционном упругом основании. Исследование динамики ультрацентрифуг требует создания более сложных механических моделей, полнее учитывающих свойства реальных конструкций. В частности, при создании динамических моделей ультрацентрифуг принципиальным оказывается учет инерционных свойств упругого основания. Поэтому, важной задачей является разработка подходящей модели упругого основания. При описании упругого основания инерционной упругой пластиной оказывается необходимым учет деформации поперечного сдвига и инерции вращения. Непосредственное использование полных уравнений динамики пластин ведет к известным проблемам при численной реализации из-за присутствия в спектре пластины частот разных асимптотических порядков. Поэтому полезным оказывается предварительный асимптотический анализ уравнений теории пластин и вывод подходящих функционалов, устроенных так, чтобы погранслоиные функции входили в них только своей медленно меняющейся частью. Кроме того, важным оказывается асимптотическое исследование колебаний пластин с частотами, принадлежащими высокочастотным спектрам, поскольку в этом случае решение содержит быстро меняющиеся по пространственным координатам функции, не являющиеся функциями типа погранслоя, а проникающие во всю область пластины, что весьма затрудняет численное решение задачи. При исследовании задачи динамики вращающегося твердого тела на инерционной упругой пластине представляет интерес вопрос о влиянии на динамику системы ее параметров, в частности толщины пластины и соотношения ее изгибной и сдвиговой жесткостей. Специфика задач динамики для систем, состоящих из вращающегося твердого тела и инерционного упругого основания, заключа-

ется в том, что уравнения движения твердого тела являются граничными условиями краевой задачи. Возникающие при этом проблемы лежат на стыке двух больших разделов механики: динамики абсолютно твердого тела и механики деформируемого твердого тела, однако в ходе решения указанных задач необходимо использовать методы механики деформируемого твердого тела, в том числе и при описании движения абсолютно твердых тел. Поэтому в целом рассматриваемые проблемы относятся к механике деформируемого твердого тела. Отметим, что проблема описания динамики твердого тела методами механики сплошных сред, возникает не только при анализе движения дискретно-континуальных систем, но и при построении и исследовании моделей неклассических сплошных сред типа среды Кельвина, частицы которых совершают немалые пространственные вращения. Таким образом, полученные результаты могут найти применение в области, выходящей за рамки тематики данной работы.

**Цель работы.** Целью диссертационной работы является развитие методов исследования динамики дискретно-континуальных систем с вращательными степенями свободы, асимптотическое упрощение уравнений теории пластин типа Рейсснера и получение функционалов, не содержащих быстро меняющихся функций, описание динамики твердого тела на основе методов, совместимых с методами механики сплошной среды, разработка и исследование динамических моделей ультрацентрифуг.

**Метод исследования.** Получение дифференциальных уравнений движения осуществляется на основе фундаментальных законов механики с использованием аппарата прямого тензорного исчисления. Вывод приближенных дифференциальных уравнений и функционалов основан на асимптотических методах. При решении дифференциальных уравнений используются точные аналитические методы, а также, в ряде случаев, асимптотические методы для построения приближенных решений.

**Научная новизна.** В диссертационной работе получены следующие новые результаты:

1. Предложена новая форма функционала потенциальной энергии в задаче о статическом изгибе пластины Рейсснера. Предложена новая форма функционала Гамильтона в задаче о низкочастотных свободных колебаниях пластины Рейсснера. Предложена приближенная формулировка задачи о высокочастотных свободных колебаниях пластины Рейсснера.

2. Рассмотрена задача о движении вращающегося тяжелого твердого тела на инерционной упругой пластине в квазилинейной постановке. Исследовано влияние на устойчивость движения рассматриваемой системы различных видов трения и различных видов моментов двигателя. Установлено, что оп-

тимальным из рассмотренных является следящий момент двигателя, так как в этом случае движение устойчиво при любом соотношении коэффициентов трения. Показано, что при увеличении толщины пластины с одновременным уменьшением коэффициента поперечного сдвига уменьшаются нутационные колебания твердого тела. При этом, если в системе есть трение, демпфирующее свободные колебания, увеличение напряжений оказывается незначительным. Показано, что введение в систему дополнительных роторов дает возможность осуществлять торможение несущего тела сохраняя постоянным суммарный кинетический момент гиростата. Использование дополнительных роторов, направления вращения которых совпадают с направлением вращения несущего тела, позволяет существенно увеличить вторую резонансную частоту и уменьшить первую, так что рабочий диапазон угловых скоростей оказывается ниже второй резонансной частоты. Использование дополнительного ротора, направление вращения которого противоположно направлению вращения несущего тела, позволяет увеличить дорезонансный диапазон угловых скоростей.

3. Изучено влияние различных видов сопротивления на пространственное вращение твердых тел. Исследование проводилось на примере задач о свободном вращении твердых тел в вязкой среде в полной нелинейной постановке. Разработан метод исследования, основанный на использовании рядов по убывающим степеням экспонент для построения точного решения задачи и его анализа. Установлено, какие виды сопротивления способствуют устойчивости вращения тела вокруг определенной оси, а какие виды трения оказывают дестабилизирующее воздействие. Получены асимптотические формулы, описывающие движение тела при больших временах.

4. Предложено представление тензора поворота через левый и правый векторы угловой скорости. На основании данного представления тензора поворота получена принципиально новая формулировка задачи Дарбу (задачи определения тензора поворота по известному вектору угловой скорости). Предложено представление тензора поворота динамически симметричного твердого тела через вектор кинетического момента. Предложенные представления тензора поворота использованы при проведении аналитического исследования задач о вращении динамически симметричного твердого тела под действием моментов четырех видов: постоянного, следящего, полубака и суперпозиции постоянного и следящего. Показано, что с точки зрения поддержания вращательного движения твердого тела вокруг оси симметрии, занимающей фиксированное положение в пространстве, оптимальным из рассмотренных является момент, представляющий собой суперпозицию постоянного и следящего моментов.

5. Предложены полные нелинейные формулировки двух задач о движении тяжелого твердого тела на инерционной упругой пластине. В первой задаче предполагается, что твердое тело имеет неподвижную точку, закрепленную с помощью сферического шарнира, а пластина препятствует только нутационным колебаниям твердого тела. Во второй задаче считается, что твердое тело не имеет неподвижных точек.

**Достоверность полученных результатов.** Достоверность полученных результатов обеспечивается использованием точных аналитических решений дифференциальных уравнений и применением апробированных асимптотических методов при выводе приближенных дифференциальных уравнений движения и функционалов.

**Практическая значимость работы.** Результаты работы могут использоваться при расчете и проектировании высокооборотных центрифуг. Разработанные методы могут найти применение при расчете тонкостенных конструкций и при описании динамики различных роторных машин, установленных на упругих опорах.

**Апробация работы.** Результаты работы докладывались на семинарах кафедры “Теоретическая механика” СПбГТУ, кафедры “Теоретическая и прикладная механика” СПбГУ, кафедры механики Санкт-Петербургского горного института (технического университета), на городском семинаре по механике (ИПМаш РАН, Санкт-Петербург), на Акустическом Семинаре Восточно-Европейской ассоциации акустиков (Санкт-Петербург), на секции “Теоретическая механика” Санкт-Петербургского Дома Ученых, а также на всероссийских и международных конференциях: “Асимптотические методы в механике” (Санкт-Петербург, 1994), “Инновационные наукоемкие технологии для России” (Санкт-Петербург, 1995), “Анализ и синтез нелинейных механических колебательных систем” (Санкт-Петербург, 1997, 1998), GAMM’97 (Регенсбург, Германия), GAMM’98 (Бремен, Германия), NOMS’99 (Санкт-Петербург), АРМ’2000 (Санкт-Петербург), “Вторые Поляховские чтения” (Санкт-Петербург, 2000), “Вторые Окуневские Чтения” (Санкт-Петербург, 2000), АРМ’2001 (Санкт-Петербург), EUROMECH 425 (Абердин, Великобритания, 2001), VIII Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике (Пермь, 2001).

**Публикации.** По теме диссертации опубликовано 34 работы. Список основных публикаций приведен в конце автореферата.

**Структура и объем работы.** Диссертация состоит из введения, пяти глав и заключения. Работа содержит 282 страницы, 131 рисунок, список литературы включает 278 наименований.

# Содержание работы

**Во введении** дана общая характеристика работы, обоснована актуальность и практическая значимость темы диссертации, сформулированы основные задачи исследования, описан метод исследования, изложено краткое содержание работы. Обзор литературы содержится во введениях к главам диссертации. В области теории пластин обзор литературы включает в себя работы В. Л. Бердичевского, И. И. Воровича, Ш. К. Галимова, А. Л. Гольденвейзера, Э. И. Григолока, Х. Дересевича, П. А. Жилина, Г. Л. Комиссаровой, А. А. Корнилова, Р. Д. Миндлина, В. Н. Москаленко, Ф. И. Ниордсона, Э. Рейсснера, Я. С. Уфлянда и других авторов. В области динамики твердого тела обзор литературы содержит работы П. Апеля, В. В. Белецкого, Р. Граммеля, В. Ф. Журавлева, А. В. Карапетяна, Г. Кориолиса, В. Н. Кошлякова, А. И. Лурье, К. Магнуса, А. П. Маркеева, В. М. Матросова, Д. Р. Меркина, Э. Дж. Рауса, В. В. Румянцева, Е. Т. Уиттекера и других авторов. В области динамики жестких роторов на упругих опорах в обзоре литературы упоминаются работы В. В. Болотина, Р. Ф. Ганиева, Ф. М. Диментберга, В. Ф. Журавлева, М. В. Закржевского, А. С. Кельзона, А. Ю. Ишлинского, М. Я. Кушуля, Д. Р. Меркина, Е. Л. Николаи, Дж. Падована, Я. Г. Пановко, П. Е. Товстика, А. Тондла, Г. Циглера и других авторов.

**Первая глава** посвящена асимптотическому исследованию уравнений линейной теории пластин типа Рейсснера. Известно, что при решении некоторых задач о статическом изгибе и вынужденных колебаниях пластин, в частности при решении задач о колебаниях пластин под действием ударных и других быстро меняющихся во времени нагрузок, необходимо учитывать инерцию вращения и деформацию поперечного сдвига. Решение задач о статическом и динамическом изгибе пластин осуществляется, как правило, численными методами, поскольку точное аналитическое решение удается построить только в достаточно редких случаях. Большинство численных методов основано на использовании вариационных принципов. Функционал энергии и функционал Гамильтона в теории пластин типа Рейсснера включают в себя функции, быстро меняющиеся по пространственным координатам, что затрудняет использование этих функционалов в численных процедурах. Целью проводимого исследования является формулировка приближенного функционала потенциальной энергии и приближенных функционалов Гамильтона в теории пластин типа Рейсснера, из которых исключены все быстро меняющиеся по пространственным координатам функции.

*Статический изгиб пластины.* Известно, что решение задачи о статическом изгибе пластины содержит в себе медленно меняющиеся функции,

проникающие во всю область пластины, и функции типа погранслоя, быстро затухающие при удалении от границы и медленно меняющиеся вдоль контура. Предложена приближенная формулировка задачи о статическом изгибе пластины Рейсснера, позволяющая находить все величины, характеризующие напряженно-деформированное состояние пластины с асимптотической ошибкой порядка  $O(h^2)$  в сравнении с единицей. Уравнение, описывающее проникающее внутрь области решение, совпадает с уравнением С. Жермен - Лагранжа

$$D \Delta \Delta \Phi + \rho h P = 0. \quad (1)$$

Здесь  $D$  — жесткость пластины на изгиб,  $\Phi$  — проникающий потенциал,  $\rho$  — объемная плотность массы,  $h$  — толщина пластины,  $P$  — внешняя нагрузка. Для функции, характеризующей погранслойный эффект, получено аналитическое выражение

$$F(\nu, \tau) = f(\tau) \left[ 1 - \frac{\nu}{2R} \right] \exp \left( \frac{\sqrt{12\Gamma}}{h} \nu \right) \quad (\nu < 0), \quad (2)$$

где  $F$  — погранслойный потенциал,  $\nu, \tau$  — локальная система координат, введенная на контуре пластины (внутри области пластины  $\nu < 0$ ),  $R$  — радиус кривизны контура пластины в данной точке,  $\Gamma$  — коэффициент поперечного сдвига. В выражении для погранслойной функции (2) неизвестной является только медленно меняющаяся функция  $f(\tau)$ , зависящая от координаты на контуре пластины и определяемая из граничных условий. Следует подчеркнуть, что в отличие от теории Кирхгофа, которая позволяет удовлетворить только двум условиям на контуре, в предложенной формулировке задачи учет погранслойной функции дает возможность удовлетворить всем граничным условиям, имеющим место в теории типа Рейсснера.

Величины, характеризующие напряженно-деформированное состояние пластины, имеют асимптотические представления

$$\begin{aligned} w &= -\Phi, \quad \underline{\Psi} = \nabla \Phi - \frac{\sqrt{12\Gamma}}{h} f(\tau) \exp \left( \frac{\sqrt{12\Gamma}}{h} \nu \right) \underline{\tau}, \\ \underline{N} &= D \nabla \Delta \Phi + Gh\Gamma \left[ \left( -\frac{\sqrt{12\Gamma}}{h} \left( 1 - \frac{\nu}{2R} \right) + \frac{1}{2R} \right) f(\tau) \underline{\tau} + \right. \\ &\quad \left. + \left( \left( 1 - \frac{\nu}{2R} \right) f'(\tau) + \frac{\nu R'}{2R^2} f(\tau) \right) \underline{\nu} \right] \exp \left( \frac{\sqrt{12\Gamma}}{h} \nu \right), \quad (3) \\ \underline{\underline{M}} &= D \left[ (1-\mu) \nabla \nabla \Phi + \mu \Delta \Phi \underline{\underline{a}} \right] + \left[ D(1-\mu) \frac{\sqrt{12\Gamma}}{h} f'(\tau) (\underline{\nu} \underline{\nu} - \underline{\tau} \underline{\tau}) - \right. \\ &\quad \left. - Gh\Gamma \left( 1 - \frac{\nu}{2R} - \frac{2h}{R\sqrt{12\Gamma}} \right) f(\tau) (\underline{\nu} \underline{\tau} + \underline{\tau} \underline{\nu}) \right] \exp \left( \frac{\sqrt{12\Gamma}}{h} \nu \right), \end{aligned}$$



где  $w$  — поперечный прогиб,  $\underline{\Psi}$  — вектор углов поворота,  $\underline{N}$  — вектор поперечных сил,  $\underline{M}$  — тензор моментов,  $\underline{\nu}$  и  $\underline{\tau}$  — векторы единичной нормали и единичной касательной к контуру пластины,  $\underline{a}$  — единичный тензор, лежащий в плоскости пластины,  $Gh\Gamma$  — жесткость пластины на сдвиг,  $\mu$  — коэффициент Пуассона.

Предложена новая форма функционала потенциальной энергии в задаче о статическом изгибе пластины Рейсснера. Построение этого функционала реализовано в виде следующих этапов: 1) функционал потенциальной энергии записывается в терминах проникающей и погранслошной функции; 2) та часть функционала, которая зависит от погранслошной функции, при помощи теоремы о дивергенции преобразовывается из интеграла по площади в контурный интеграл; 3) в полученный функционал подставляется выражение для погранслошной функции (2), в котором зависимость от координаты по нормали к контуру пластины выражена аналитически. В результате этих преобразований получается модифицированный функционал потенциальной энергии, в который погранслошная функция входит только своей медленно меняющейся частью. Предлагаемый функционал потенциальной энергии имеет вид

$$\begin{aligned} \Pi(\Phi, f) = & \int_{(\Delta S)} \left[ D \left[ \frac{1}{2} (\Delta \Phi)^2 + (1 - \mu) \left[ \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \right)^2 - \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right) \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) \right] \right] + \\ & \underline{+ \rho h P \Phi} dS + \int_{(c)} \left[ D(1 - \mu) \frac{\sqrt{12\Gamma}}{h} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} f'(\tau) + \frac{1}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} f(\tau) \right) + \right. \\ & \left. + Gh\Gamma \left( \frac{\sqrt{12\Gamma}}{2h} - \frac{1}{R} \right) f^2(\tau) + N_\nu^* \Phi - M_\nu^* \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} - M_\tau^* \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} - \frac{\sqrt{12\Gamma}}{h} f(\tau) \right) \right] dC. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь  $N_\nu^*$  — перерезывающая сила,  $M_\nu^*$  — изгибающий момент,  $M_\tau^*$  — крутящий момент, заданные на контуре пластины. Отметим, что в функционале (4) подчеркнутое слагаемое является асимптотически главным членом и совпадает с функционалом энергии в классической теории пластин.

*Низкочастотные свободные колебания пластины.* Известно, что величины, определяющие напряженно-деформированное состояние пластины, при статическом изгибе и низкочастотных свободных колебаниях имеют одинаковый характер изменения по пространственным координатам; асимптотические соотношения между  $w$ ,  $\underline{\Psi}$ ,  $\underline{N}$ ,  $\underline{M}$  также одинаковы. Предложена приближенная формулировка задачи о низкочастотных свободных колебаниях пластины Рейсснера (колебаниях с частотами, принадлежащими низкочастотному спектру  $\omega_i^{(1)} \sim h$ ), позволяющая находить собственные частоты

и собственные формы колебаний пластины с асимптотической ошибкой порядка  $O(h^2)$  в сравнении с единицей. Уравнение, описывающее проникающее внутрь области решение, совпадает с классическим уравнением Кирхгофа

$$D \Delta \Delta \Phi + \rho h \ddot{\Phi} = 0. \quad (5)$$

Выражение для функции, характеризующей погранслоиный эффект, в точности совпадает с тем, которое было получено в задаче о статическом изгибе пластины (2). Формулы для вычисления  $w$ ,  $\underline{\Psi}$ ,  $\underline{N}$ ,  $\underline{M}$  имеют такой же вид, как и в задаче о статическом изгибе пластины (3).

Предложена новая форма функционала Гамильтона в задаче о низкочастотных свободных колебаниях пластины Рейсснера. Структура этого функционала аналогична структуре функционала энергии в задаче о статическом изгибе пластины. Низкочастотный функционал Гамильтона имеет вид

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} (K - \Pi) dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[ \int_{(\Delta S)} \left[ \frac{1}{2} \rho h \dot{\Phi}^2 - D \left( \frac{1}{2} (\Delta \Phi)^2 + (1 - \mu) \times \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \times \left[ \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \right)^2 - \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right) \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) \right] \right] dS - \int_c \left[ D(1 - \mu) \frac{\sqrt{12\Gamma}}{h} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} f'(\tau) + \frac{1}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} f(\tau) \right) + Gh\Gamma \left( \frac{\sqrt{12\Gamma}}{2h} - \frac{1}{R} \right) f^2(\tau) \right] dC \right] dt. \quad (6) \end{aligned}$$

В функционале (6) подчеркнутое слагаемое является асимптотически главным членом и совпадает с функционалом Гамильтона в теории пластин Кирхгофа; наличие в функционале (6) добавочных слагаемых связано с учетом деформации поперечного сдвига вблизи края пластины.

Проведен сравнительный анализ предложенной формулировки задачи о низкочастотных свободных колебаниях пластин и теории пластин Кирхгофа. Исследование проводилось путем асимптотического анализа и численного решения задач о свободных колебаниях прямоугольных пластин при всех возможных типах граничных условий. Установлено, что при некоторых типах граничных условий использование теории Кирхгофа приводит к недопустимо большим погрешностям даже при вычислении первых нескольких собственных частот, тогда как формулировка задачи с учетом деформации поперечного сдвига вблизи края пластины дает вполне приемлемые результаты при всех типах граничных условий.

*Высокочастотные свободные колебания пластины.* Проведено асимптотическое исследование задачи о высокочастотных свободных колебаниях пластин, то есть колебаниях с частотами, принадлежащими высокочастотным

спектрам

$$\omega_i^{(2)} = \sqrt{\frac{12G\Gamma}{\rho h^2}} + \omega_{0i}^{(2)} + \dots \quad \omega_i^{(3)} = \sqrt{\frac{12G\Gamma}{\rho h^2}} + \omega_{0i}^{(3)} + \dots$$

Здесь  $\omega_i^{(2)}$  — сдвиговой спектр,  $\omega_i^{(3)}$  — высокочастотный изгибный спектр. Характерной особенностью этих спектров является то, что асимптотически главные члены всех принадлежащих им собственных частот совпадают. Установлено, что решение содержит быстро меняющуюся по пространственным координатам функцию, которая не является функцией типа погранслоя, а проникает во всю область пластины, и некоторые величины, характеризующие напряженно-деформированное состояние пластины, зависят от этой быстро меняющейся функции в главных членах асимптотических разложений.

Предложена приближенная формулировка задачи о высокочастотных свободных колебаниях пластины, позволяющая определять асимптотически главные члены всех величин, характеризующих напряженно-деформированное состояние пластины. Эта формулировка не содержит низкочастотного спектра, аналогично тому, как теория Кирхгофа не содержит высокочастотных спектров. Приближенная система уравнений, описывающая высокочастотные свободные колебания пластины Рейсснера, имеет вид

$$\begin{aligned} \Delta F - \frac{12\Gamma}{h^2} F - \frac{\rho}{G} \ddot{F} = 0, \quad \left(\Gamma + \frac{2}{1-\mu}\right) \Delta \Phi - \frac{12\Gamma}{h^2} \Phi - \frac{\rho}{G} \ddot{\Phi} = 0, \\ \Delta \varphi + \frac{12}{h^2} \left(1 + \frac{\Gamma(1-\mu)}{2}\right) \varphi = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь  $F$  — функция, которая при статическом изгибе и низкочастотных колебаниях обладала свойствами погранслоевой функции,  $\Phi$  — медленно меняющаяся часть проникающего потенциала,  $\varphi$  — быстро меняющаяся часть проникающего потенциала. Для функций  $F$ ,  $\Phi$ , и  $\varphi$  справедливы асимптотические оценки

$$\begin{aligned} \ddot{F} = \left[-\frac{12G\Gamma}{\rho h^2} + O(1)\right] F, \quad \ddot{\Phi} = \left[-\frac{12G\Gamma}{\rho h^2} + O(1)\right] \Phi, \\ \frac{\partial F}{\partial x} \sim \frac{\partial F}{\partial y} \sim F, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x} \sim \frac{\partial \Phi}{\partial y} \sim \Phi, \quad \varphi \sim h^2 \Phi \sim h^2 F, \\ \ddot{\varphi} = \left[-\frac{12G\Gamma}{\rho h^2} + O(1)\right] \varphi, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} \sim \frac{\partial \varphi}{\partial y} \sim \frac{1}{h} \varphi, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} \Big|_c \sim \varphi. \end{aligned}$$

Величины, характеризующие напряженно-деформированное состояние пластины, имеют следующие асимптотические представления

$$w = -\frac{h^2}{12} \Delta \Phi - \left(1 + \frac{2}{\Gamma(1-\mu)}\right) \varphi,$$

$$\underline{\Psi} = \nabla \Phi + \nabla F \times \underline{n}, \quad \underline{N} = Gh\Gamma (\nabla \Phi + \nabla F \times \underline{n}), \quad (8)$$

$$\underline{\underline{M}} = D \left[ (1-\mu) \nabla \nabla (\Phi + \varphi) + \mu \Delta (\Phi + \varphi) \underline{\underline{a}} + \frac{1-\mu}{2} (\nabla \nabla F \times \underline{n} - \underline{n} \times \nabla \nabla F) \right],$$

где  $\underline{n}$  — вектор единичной нормали к плоскости пластины.

Очевидно, что наличие быстро меняющейся по пространственным координатам функции, проникающей во всю область пластины, делает приведенную выше формулировку задачи о высокочастотных свободных колебаниях пластины практически непригодной для численной реализации. Показано, что обсуждаемую задачу можно сформулировать без учета быстро меняющейся функции  $\varphi$ . Как показал асимптотический анализ, поперечный прогиб  $w$  и тензор моментов  $\underline{\underline{M}}$ , которые в главных членах зависят от функции  $\varphi$ , асимптотически малы по сравнению с вектором углов поворота  $\underline{\Psi}$  и вектором поперечных сил  $\underline{N}$ , в главных членах от  $\varphi$  не зависящих. Поэтому формулировка задачи о высокочастотных свободных колебаниях без учета быстро меняющейся функции  $\varphi$  имеет смысл. После исключения функции  $\varphi$  порядок системы дифференциальных уравнений понижается с 6-го до 4-го, что приводит к необходимости три условия на контуре заменять двумя. Граничные условия в задаче для медленно меняющихся функций имеют следующий вид.

Кинематические граничные условия:

$$\left. \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} + \frac{\partial F}{\partial \tau} \right) \right|_c = 0, \quad \left. \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} - \frac{\partial F}{\partial \nu} \right) \right|_c = 0. \quad (9)$$

Силовые граничные условия:

$$\left[ D(1-\mu) \left[ \frac{\partial^2 F}{\partial \nu \partial \tau} - \left( \frac{1}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \tau^2} \right) \right] + \left( \frac{\rho h^3}{12} \ddot{\Phi} + Gh\Gamma \Phi \right) \right] \Big|_c = 0, \quad (10)$$

$$\left[ D(1-\mu) \left[ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \nu \partial \tau} + \left( \frac{1}{R} \frac{\partial F}{\partial \nu} + \frac{\partial^2 F}{\partial \tau^2} \right) \right] - \left( \frac{\rho h^3}{12} \ddot{F} + Gh\Gamma F \right) \right] \Big|_c = 0.$$

Здесь условия (9) представляют собой условия равенства нулю углов поворота вокруг касательной и вокруг нормали к контуру пластины; условия (10) представляют собой условия равенства нулю приведенного изгибающего момента и крутящего момента. При переходе от теории пластин типа Рейснера к приближенной формулировке задачи о высокочастотных свободных колебаниях пластины без учета быстро меняющейся функции  $\varphi$  условия

- 1)  $\Psi_\nu|_c = 0, \Psi_\tau|_c = 0, w|_c = 0,$
- 2)  $\Psi_\nu|_c = 0, \Psi_\tau|_c = 0, N_\nu|_c = 0,$
- 3)  $M_\nu|_c = 0, \Psi_\tau|_c = 0, N_\nu|_c = 0$

заменяются кинематическими условиями (9); условия

- 1)  $\Psi_\nu|_c = 0, M_\tau|_c = 0, w|_c = 0,$
- 2)  $\Psi_\nu|_c = 0, M_\tau|_c = 0, N_\nu|_c = 0,$
- 3)  $M_\nu|_c = 0, M_\tau|_c = 0, N_\nu|_c = 0$

заменяются первым условием из (9) и вторым условием из (10); условия

$$M_\nu|_c = 0, \Phi_\tau|_c = 0, w|_c = 0$$

заменяются вторым условием из (9) и первым условием из (10); условия

$$M_\nu|_c = 0, M_\tau|_c = 0, w|_c = 0$$

заменяются силовыми условиями (10).

На основе предшествующего анализа предложена формулировка высокочастотного функционала Гамильтона, содержащая только медленно меняющиеся функции

$$\begin{aligned}
\int_{t_1}^{t_2} (K - \Pi) dt &= \int_{t_1}^{t_2} \left[ \int_{(\Delta S)} \left[ \frac{1}{2} \frac{\rho h^3}{12} \left[ \left( \frac{\partial \dot{\Phi}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{F}}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \dot{\Phi}}{\partial y} - \frac{\partial \dot{F}}{\partial x} \right)^2 \right] - \right. \\
&- \frac{1}{2} Gh\Gamma \left[ \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 \right] - D \frac{1}{2} \left[ \left( 1 + \frac{\Gamma(1-\mu)}{2} \right) (\Delta \Phi)^2 + \right. \\
&+ \left. \frac{1-\mu}{2} (\Delta F)^2 \right] - D(1-\mu) \left[ \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \right)^2 - \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right) \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) - \right. \\
&- \left. \left( \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right) \left( \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right) + \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \right) \left( \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right) + \left( \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \right) \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) \right] \right] dS dt. \tag{11}
\end{aligned}$$

Анализ результатов численного решения конкретных задач позволил сделать оценки точности предложенной формулировки задачи о высокочастотных свободных колебаниях пластины Рейсснера.

**Вторая глава** посвящена исследованию квазилинейной постановки задачи о движении твердого тела на инерционной упругой пластине. Твердое тело на упругом основании является простейшей динамической моделью многих технических объектов, таких как центрифуги, роторы, различные гироскопические приборы. Исследованию задачи о движении твердого тела на упругом основании посвящена обширная литература. Однако в большинстве публикаций упругое основание считается безынерционным и исследуется система с конечным числом степеней свободы. В диссертационной работе рассматривается континуальная модель упругого основания в виде инерционной упругой

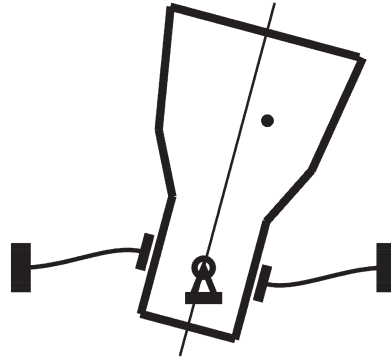


Рис. 1: Твердое тело на упругой пластине. Тело имеет неподвижную точку.

пластины в форме кольца (см. рис. 1). Твердое тело считается динамически симметричным с малым дисбалансом массы. Предполагается, что тело имеет неподвижную точку, лежащую на его оси симметрии. Внешний контур пластины жестко заземлен, внутренний контур пластины соединяется с твердым телом с помощью подшипника таким образом, что тело может свободно вращаться вокруг оси симметрии. Центр пластины совпадает с неподвижной точкой твердого тела; в недеформированном состоянии плоскость пластины перпендикулярна оси симметрии тела. Для описания движения пластины используется линейная теория пластин типа Рейсснера, учитывающая инерцию вращения и деформацию поперечного сдвига

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot \underline{N} &= \rho h \ddot{w}, & \nabla \cdot \underline{M} - \underline{N} &= \frac{1}{12} \rho h^3 \ddot{\Psi}, \\
 \underline{N} &= Gh \Gamma \underline{\gamma}, & \underline{M} &= D [(1 - \mu) \underline{\alpha} + \mu \operatorname{tr} \underline{\alpha} \underline{a}], \\
 \underline{\gamma} &= \nabla w + \underline{\Psi}, & \underline{\alpha} &= \frac{1}{2} (\nabla \underline{\Psi} + \nabla \underline{\Psi}^T).
 \end{aligned} \tag{12}$$

Здесь  $\underline{\gamma}$  — вектор деформации поперечного сдвига,  $\underline{\alpha}$  — тензор изгиба-кручения. Граничные условия на внутреннем контуре пластины зависят от движения твердого тела.

Тензор поворота твердого тела  $\underline{P}(t)$  и кинематические условия соединения твердого тела и пластины имеют вид

$$\underline{P}(t) = \underline{P}_2(\underline{\theta}) \cdot \underline{P}_1(\beta \underline{k}), \quad \underline{\theta} = \underline{k} \times \Psi|_{r=r_1}, \quad w|_{r=r_1} \underline{k} = \underline{\theta} \times r_1 \underline{e}_r, \tag{13}$$

где  $\underline{k}$  — единичный вектор, перпендикулярный плоскости недеформированной пластины,  $\underline{e}_r$  — единичный вектор полярной системы координат,  $r_1$  — радиус внутреннего контура пластины,  $\beta$  — угол поворота тела вокруг оси симметрии,  $\underline{\theta}$  — вектор малого поворота, характеризующий нутационные движения твердого тела.

Уравнения движения твердого тела формулируются так:

$$m\ddot{\underline{R}}_C = \underline{F}_R + m\underline{g}, \quad \underline{R}_C = \underline{P}(t) \cdot [a\underline{k} + \varepsilon\underline{j}], \quad m\underline{g} = -mg\underline{k},$$

$$(\underline{J}^{(t)} \cdot \underline{\omega}) \cdot = \underline{M}_{mt} + \underline{M}_{fr} + \underline{R}_C \times m\underline{g} + \underline{M}_{pl},$$

$$\underline{M}_{mt} = L(\omega_* - \dot{\beta})[\eta\underline{k} + (1 - \eta)\underline{n}], \quad \underline{M}_{fr} = -[b_3\underline{n}\underline{n} + b_{12}(\underline{E} - \underline{n}\underline{n})] \cdot \underline{\omega}, \quad (14)$$

$$\underline{n} = \underline{P}(t) \cdot \underline{k}, \quad \underline{J}^{(t)} = \underline{P}(t) \cdot \underline{J} \cdot \underline{P}^T(t), \quad \underline{J} = J_3\underline{k}\underline{k} + J_{12}(\underline{E} - \underline{k}\underline{k}),$$

$$\underline{M}_{pl} = r_1 \int_0^{2\pi} [(M_{rr} - rN_r)\underline{e}_\theta - M_{r\theta}\underline{e}_r] \Big|_{r=r_1} d\theta.$$

Здесь  $m$  — масса тела,  $\underline{R}_C$  — вектор положения центра масс тела в данный момент времени,  $a$  и  $\varepsilon$  — величины, характеризующие положение центра масс тела относительно шарнира ( $\varepsilon$  — малая величина),  $\underline{F}_R$  — реакция в шарнире,  $m\underline{g}$  — сила тяжести,  $\underline{J}$  — тензор инерции твердого тела в отсчетной конфигурации, вычисленный относительно его неподвижной точки,  $\underline{J}^{(t)}$  — тензор инерции тела в актуальной конфигурации,  $\underline{\omega}$  — вектор угловой скорости твердого тела,  $\underline{n}$  — единичный вектор, задающий направление оси симметрии тела в данный момент времени,  $\underline{M}_{mt}$  — момент двигателя ограниченной мощности,  $L$ ,  $\omega_*$  — константы, характеризующие величину момента двигателя,  $\eta$  — параметр, характеризующий направление момента двигателя:  $0 \leq \eta \leq 1$ , если  $\eta = 0$ ,  $\underline{M}_{mt}$  — следящий момент, если  $\eta = 1$ ,  $\underline{M}_{mt}$  — мертвый момент),  $\underline{M}_{fr}$  — момент линейного вязкого трения ( $b_{12}$ ,  $b_3$  — коэффициенты трения),  $\underline{M}_{pl}$  — суммарный упругий момент, действующий на тело со стороны пластины,  $M_{rr}$  — изгибающий момент,  $M_{r\theta}$  — крутящий момент,  $N_r$  — перерезывающая сила. Следствием уравнений (13), (14) являются граничные условия на внутреннем контуре пластины и выражение для угловой скорости собственного вращения твердого тела

$$[J_{12}\underline{k} \times \ddot{\underline{\Psi}} + J_3\dot{\beta}\dot{\underline{\Psi}} + b_{12}\underline{k} \times \dot{\underline{\Psi}} + \eta L(\omega_* - \dot{\beta})\underline{\Psi} - mga\underline{k} \times \underline{\Psi}] \Big|_{r=r_1} +$$

$$+ mg\varepsilon(\cos\beta\underline{i} + \sin\beta\underline{j}) = r_1 \int_0^{2\pi} [(M_{rr} - rN_r)\underline{e}_\theta - M_{r\theta}\underline{e}_r] \Big|_{r=r_1} d\theta, \quad (15)$$

$$(w + r\Psi_r) \Big|_{r=r_1} = 0, \quad \dot{\beta} = \omega_0 + (\dot{\beta}_0 - \omega_0)e^{-\frac{L+b_3}{\theta_3}t}, \quad \omega_0 = \frac{L\omega_*}{L+b_3}.$$

*Стационарный режим движения твердого тела на пластине.*

Проведено исследование свободных и вынужденных колебаний твердого тела на пластине. Показано, что при уменьшении сдвиговой жесткости пластины с одновременным увеличением ее толщины перемещения на внутреннем контуре пластины уменьшаются, а напряжения увеличиваются. При сво-

бодных колебаниях увеличение напряжений пропорционально уменьшению перемещений. При вынужденных колебаниях, возникающих из-за дисбаланса массы твердого тела, уменьшение перемещений на внутреннем контуре пластины оказывается существенно большим, чем увеличение напряжений. Этот эффект связан с тем, что в случае тонкой пластины с большой сдвиговой жесткостью максимальные перемещения и напряжения возникают на внутреннем контуре пластины, а в случае толстой пластины с малой сдвиговой жесткостью максимальные перемещения и напряжения возникают в середине пластины. Таким образом, при наличии трения, демпфирующего свободные колебания, использование упругого основания в виде толстой пластины с малой сдвиговой жесткостью может позволить уменьшить нутационные колебания твердого тела при незначительном увеличении напряжений в местах его соединения с упругим основанием.

Проведено исследование влияния диссипативного момента на устойчивость движения твердого тела на упругой пластине. Показано, что в том случае, когда момент двигателя является следящим, вращение твердого тела вокруг вертикальной оси будет устойчивым независимо от вида диссипативного момента. Если момент двигателя не удастся сделать в точности следящим, то устойчивости вращения твердого тела вокруг вертикальной оси можно добиться путем уменьшения коэффициента трения в направлении оси вращения или увеличения коэффициентов трения в направлении осей, перпендикулярных оси вращения.

Известно, что у высокоскоростных центрифуг рабочий диапазон угловых скоростей лежит выше первых собственных частот установки. В связи с этим, в режиме разгона и торможения возникает проблема прохождения через критические скорости. Изменение параметров упругого основания (в частности, использование толстой пластины с малой сдвиговой жесткостью) позволяет уменьшить амплитуды колебаний, но не дает возможности принципиально решить проблему. Проведено исследование возможности решения этой проблемы путем введения в систему дополнительных роторов (см. рис. 2). Показано, что специальный подбор параметров дополнительных роторов позволяет осуществлять торможение несущего тела, сохраняя постоянным суммарный кинетический момент системы. Если направления вращения дополнительных роторов совпадают с направлением вращения несущего тела, то значение второй резонансной частоты увеличивается, а первой — уменьшается. Следовательно, появляется возможность увеличить рабочий диапазон угловых скоростей несущего тела, не переходя при этом за вторую резонансную частоту и осуществить режим торможения несущего тела, при котором оно будет проходить только первый низкочастотный резонанс. Введение в си-



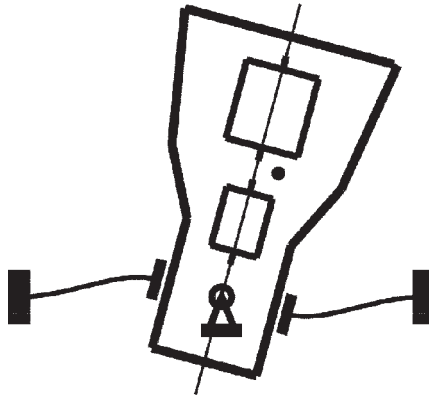


Рис. 2: Многороторный гириостат на упругой пластине.

стему дополнительного ротора, вращающегося в противоположную сторону, позволяет увеличить дорезонансный диапазон угловых скоростей вращения несущего тела.

*Нестационарный режим движения твердого тела на пластине.*

Проведено исследование нестационарного режима движения твердого тела на упругой пластине. Сложность данной задачи заключается в том, что коэффициенты в граничном условии на внутреннем контуре пластины (15) зависят от времени. Использован метод решения задачи, позволяющий свести ее к векторному интерго-дифференциальному уравнению относительно переменной  $\tilde{\Psi}(t)$ , характеризующей нутационные колебания твердого тела

$$\begin{aligned}
 & J_{12} \ddot{\tilde{\Psi}}(t) - J_3 \dot{\beta}(t) \underline{k} \times \dot{\tilde{\Psi}}(t) + b_{12} \dot{\tilde{\Psi}}(t) - \eta L(\omega_* - \dot{\beta}(t)) \underline{k} \times \tilde{\Psi}(t) + D_* \tilde{\Psi}(t) + \\
 & + mg\varepsilon (\sin \beta(t) \underline{i} - \cos \beta(t) \underline{j}) = \sum_j M_j^* \left[ \underline{C}_j^{(1)} \cos(p_{1j}t) + \underline{C}_j^{(2)} \sin(p_{1j}t) \right] + \quad (16) \\
 & + \int_0^t \left( \sum_j M_j^* p_{1j}^{-1} \left[ A_j \tilde{\Psi}(\tau) + B_j \ddot{\tilde{\Psi}}(\tau) \right] \sin [p_{1j}(t - \tau)] \right) d\tau,
 \end{aligned}$$

где  $D_*$ ,  $M_j^*$ ,  $\underline{C}_j^{(1)}$ ,  $\underline{C}_j^{(2)}$ ,  $A_j$ ,  $B_j$  — константы, зависящие от параметров задачи;  $p_{1j}$  — собственные частоты колебаний заземленной пластины. Предлагаемый подход дает возможность упростить исследование нестационарного режима движения твердого тела на пластине, поскольку после того, как задача сведена к уравнению (16), нет необходимости решать задачу о колебаниях пластины, а достаточно решить задачу о движении твердого тела под действием внешних моментов специального вида.

Рассмотрена модифицированная постановка задачи о движении твердого тела на пластине, которая отличается от обсуждавшейся выше тем, что твердое тело не имеет неподвижных точек. Твердое тело соединяется с внутренним контуром пластины, как показано на рис. 3; при этом оно может

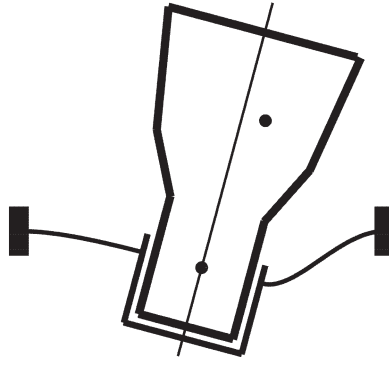


Рис. 3: Твердое тело на упругой пластине. Тело не имеет неподвижных точек.

свободно вращаться вокруг оси симметрии. Тензор поворота твердого тела и вектор положения его центра масс имеют вид

$$\underline{\underline{P}}(t) = \underline{\underline{P}}_2(\underline{\theta}) \cdot \underline{\underline{P}}_1(\beta \underline{k}), \quad \underline{\underline{R}}_C(t) = w_o(t) \underline{k} + \underline{\underline{P}}(t) \cdot [a \underline{k} + \varepsilon \underline{j}]. \quad (17)$$

Здесь  $w_o$  — перемещение точки твердого тела, лежащей на пересечении оси симметрии тела и плоскости пластины в недеформированном состоянии. Кинематические условия соединения твердого тела и пластины формулируются так:

$$\underline{\theta} = \underline{k} \times \underline{\Psi}|_{r=r_1}, \quad (w|_{r=r_1} - w_o) \underline{k} = \underline{\theta} \times r_1 \underline{e}_r. \quad (18)$$

Уравнения движения твердого тела имеют вид

$$\begin{aligned} m \underline{\underline{R}}_C &= m \underline{g} + \underline{F}_{pl}, \quad \underline{F}_{pl} = r_1 \int_0^{2\pi} N_r|_{r=r_1} d\theta, \\ (\underline{J}^{(t)} \cdot \underline{\omega}) \cdot &= \underline{M}_{mt} + \underline{M}_{fr} + \underline{\underline{R}}_C \times m \underline{g} + \underline{M}_{pl}. \end{aligned} \quad (19)$$

Следствием уравнений (17), (18), (19) являются граничные условия на внутреннем контуре пластины

$$\begin{aligned} m(\ddot{w} + r \ddot{\Psi}_r)|_{r=r_1} + mg &= r_1 \int_0^{2\pi} N_r|_{r=r_1} d\theta, \\ [J_{12} \underline{k} \times \ddot{\underline{\Psi}} + J_3 \dot{\beta} \dot{\underline{\Psi}} + b_{12} \underline{k} \times \dot{\underline{\Psi}} + \eta L(\omega_* - \dot{\beta}) \underline{\Psi} - mga \underline{k} \times \underline{\Psi}]|_{r=r_1} &+ \\ + mg\varepsilon (\cos \beta \underline{i} + \sin \beta \underline{j}) &= r_1 \int_0^{2\pi} [(M_{rr} - r N_r) \underline{e}_\theta - M_{r\theta} \underline{e}_r]|_{r=r_1} d\theta. \end{aligned} \quad (20)$$

Проведенное исследование показало, что качественного различия свойств движения твердого тела на пластине при наличии у него неподвижной точки и в случае отсутствия у него неподвижной точки не наблюдается.

**Третья глава** посвящена изучению влияния различных видов сопротивления на пространственное вращение твердых тел. Во второй главе при исследовании задачи о движении твердого тела на инерционной упругой пластине

в квазилинейной постановке сопротивление окружающей среды моделировалось моментом линейного вязкого трения простейшего вида. Было показано, что свойства движения твердого тела на пластине, в частности, условия устойчивости вертикального положения оси симметрии тела существенно зависят от соотношения коэффициентов трения. В случае нарушения условий устойчивости квазилинейная постановка задачи не дает представления о характере движения системы. В третьей главе исследуется движение твердого тела в сопротивляющейся среде при различных видах трения на примере модельных задач, решаемых в нелинейной постановке. Следует отметить, что результаты исследования указанных модельных задач могут оказаться полезными при построении и исследовании неклассических моделей сплошных сред, таких как, например, среда Кельвина. Отличительной особенностью этих сред является то, что частицы, из которых они состоят, могут совершать немалые пространственные вращения. Свойства подобных сред в настоящее время мало изучены. Поэтому решение модельных задач, в которых изучается движение одной частицы под действием сил и моментов, аналогичных тем, которые возникают при взаимодействии частиц среды, представляет определенный интерес. Исследование влияния различных видов сопротивления на пространственное вращение твердых тел проводится на примере задач о свободном вращении твердых тел в вязкой среде. Рассматриваются случаи линейного и нелинейного трения, полной и неполной диссипации. Исследование проводится путем построения и последующего анализа точного решения задачи. Для построения точных решений разработан метод, основанный на использовании рядов по убывающим степеням экспонент. Такая форма представления решения удобна для анализа его асимптотического поведения при  $t \rightarrow +\infty$ ; кроме того, сохраняя только первые члены ряда, можно получить простое приближенное решение, допускающее строгое обоснование и справедливое при больших временах. Данный метод может быть использован при исследовании некоторого класса задач, где на твердое тело помимо момента вязкого трения действуют внешние моменты иного происхождения, но подчиняющиеся некоторым ограничениям, являющимся необходимыми условиями принадлежности проекций вектора угловой скорости классу функций, на котором ряд по убывающим степеням экспонент является полной системой функций на интервале времени  $[0, +\infty]$ . С помощью разработанного метода получены следующие результаты.

Построено точное аналитическое решение задачи о свободном вращении осесимметричного твердого тела с учетом сопротивления окружающей среды,

моделируемого моментом линейного вязкого трения

$$\underline{M}_{vf} = -\underline{K}_{vf} \cdot \underline{\omega}, \quad \underline{K}_{vf} = k_3 \underline{n} \underline{n} + k_{12} (\underline{E} - \underline{n} \underline{n}). \quad (21)$$

Здесь  $\underline{K}_{vf}$  — тензорный коэффициент трения,  $\underline{\omega}$  — вектор угловой скорости тела,  $\underline{n}$  — единичный вектор, определяющий направление оси симметрии тела в данный момент времени,  $\underline{E}$  — единичный тензор,  $k_{12}$  и  $k_3$  — коэффициенты трения (постоянные величины). Решение представлено в виде рядов по убывающим степеням экспонент, равномерно сходящихся при всех значениях параметров задачи и любых начальных условиях.

Построено точное аналитическое решение задачи о свободном вращении динамически симметричного твердого тела, поверхность которого обладает геометрической несимметрией. В этом случае сопротивление окружающей среды моделируется моментом линейного вязкого трения более сложного вида

$$\underline{M}_{vf} = -\underline{K}_{vf} \cdot \underline{\omega}, \quad \underline{K}_{vf} = k_1 \underline{e}_1 \underline{e}_1 + k_2 \underline{e}_2 \underline{e}_2 + k_3 \underline{n} \underline{n}, \quad (22)$$

где векторы  $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{n}$  — единичные и взаимно ортогональные, причем вектор  $\underline{n}$  определяет направление оси динамической симметрии тела в данный момент времени;  $k_1, k_2, k_3$  — коэффициенты трения. Решение также строится в виде рядов по убывающим степеням экспонент, равномерно сходящихся при любых значениях параметров задачи и произвольных начальных условиях.

Построено формальное решение задачи о свободном вращении в вязкой среде несимметричного твердого тела. Сопротивление среды моделируется моментом вязкого трения, включающим в себя линейные и квадратичные по угловой скорости члены

$$\underline{M}_{vf} = -\underline{K}_{vf} \cdot \underline{\omega} - \underline{\omega}_* \cdot {}^3\underline{B}_{vf} \cdot \underline{\omega},$$

$$\underline{K}_{vf} = k_1 \underline{e}_1 \underline{e}_1 + k_2 \underline{e}_2 \underline{e}_2 + k_3 \underline{e}_3 \underline{e}_3, \quad \underline{\omega} = \omega_1 \underline{e}_1 + \omega_2 \underline{e}_2 + \omega_3 \underline{e}_3, \quad (23)$$

$${}^3\underline{B}_{vf} = b_1 \underline{e}_1 \underline{e}_1 \underline{e}_1 + b_2 \underline{e}_2 \underline{e}_2 \underline{e}_2 + b_3 \underline{e}_3 \underline{e}_3 \underline{e}_3, \quad \underline{\omega}_* = |\omega_1| \underline{e}_1 + |\omega_2| \underline{e}_2 + |\omega_3| \underline{e}_3.$$

Здесь  $\underline{K}_{vf}$  и  ${}^3\underline{B}_{vf}$  — тензорные коэффициенты трения,  $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$  — единичные векторы, определяющие направления главных осей инерции твердого тела в актуальной конфигурации,  $k_i$  и  $b_i$  — коэффициенты трения,  $\omega_i$  — проекции вектора угловой скорости на главные оси инерции твердого тела. Решение представлено в виде экспоненциальных рядов. Доказано существование области начальных значений вектора угловой скорости, при которых построенные ряды равномерно сходятся. Получены достаточные условия сходимости. Доказано, что в случае полной диссипации при любых начальных условиях существует некоторый момент времени, начиная с которого вектор угловой

скорости тела будет находиться в области равномерной сходимости рядов, представляющих решение задачи.

Проанализировано асимптотическое поведение решений перечисленных выше задач при больших временах. Показано, что в случае полной диссипации асимптотические свойства движения несимметричного тела в точности совпадают с асимптотическими свойствами движения динамически симметричного тела, причем асимптотическое поведение решения полностью определяется соотношением параметров, представляющих собой отношение коэффициентов линейного вязкого трения к соответствующим моментам инерции твердого тела. Показано, что в случае неполной диссипации на асимптотическое поведение решения существенное влияние оказывает соотношение моментов инерции тела и начальные значения вектора угловой скорости. В результате проведенного исследования установлено, какие виды сопротивления способствуют устойчивости вращения тела вокруг определенной оси, а какие виды трения оказывают дестабилизирующее воздействие.

**Четвертая глава** посвящена сравнительному анализу влияния на устойчивость вертикального положения оси ротора центрифуги различных по направлению моментов двигателя. Во второй главе был проведен сравнительный анализ влияния различных видов момента двигателя на устойчивость стационарного вращения твердого тела на упругой пластине. Рассматривались следящий момент, направленный по оси симметрии тела, постоянный по направлению момент и момент, являющийся суперпозицией следящего и постоянного моментов. Исследование показало, что при отсутствии трения направление момента двигателя не имеет значения, а при наличии трения оптимальным из рассмотренных является следящий момент. Подчеркнем, что во второй главе рассматривалась квазилинейная постановка задачи; угол нутации твердого тела и величины, характеризующие деформацию пластины, считались малыми. В случае неустойчивости по линейному приближению для описания движения системы требуется использование полных нелинейных уравнений. Кроме того, при уменьшении жесткости пластины (что бывает полезным для достижения необходимых динамических характеристик системы) перемещения становятся не малыми и анализ движения системы также требует рассмотрения нелинейной постановки задачи. Нелинейная постановка задачи о движении твердого тела на упругой пластине допускает только численное решение. В четвертой главе в нелинейной постановке аналитически исследуются модельные задачи, представляющие собой задачи о движении динамически симметричного твердого тела под действием моментов дви-

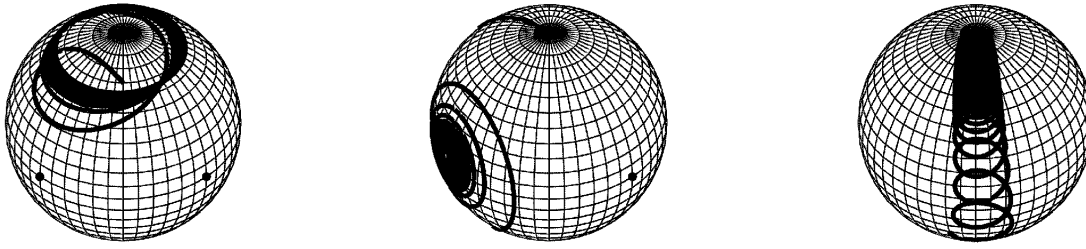


Рис. 4: Движение тела под действием различных по направлению моментов двигателя.

двигателя различных видов. Рассматриваются четыре задачи. Первая: задача о вращении динамически симметричного твердого тела под действием постоянного по величине и направлению момента  $\underline{M} = M^* \underline{e}$  (здесь  $\underline{e}$  — единичный вектор). Вторая: задача о вращении динамически симметричного твердого тела под действием постоянного по величине следящего момента, направленного по оси симметрии тела  $\underline{M}(t) = M^* \underline{n}(t)$ , где  $\underline{n}(t)$  — единичный вектор, определяющий направление оси симметрии тела. Третья: задача о вращении динамически симметричного тела под действием полускасательного момента, представляющего собой суперпозицию равных по величине постоянного и следящего моментов  $\underline{M}(t) = M^* [\underline{n}(t) + \underline{e}]$ . Четвертая: задача о вращении динамически симметричного тела под действием суперпозиции не равных по величине постоянного и следящего моментов  $\underline{M}(t) = M_1^* \underline{n}(t) + M_2^* \underline{e}$ . Для первых двух из перечисленных задач построены точные аналитические решения, выраженные через гипергеометрические функции. Для третьей и четвертой задач проведено аналитическое исследование, в результате которого установлен ряд свойств движения тела на всем интервале времени и построены асимптотические решения задач при больших временах. На рис.4 изображены годографы единичного вектора  $\underline{n}(t)$ , определяющего движение оси симметрии тела. Рисунок слева соответствует случаю постоянного момента, рисунок в центре соответствует случаю следящего момента, а рисунок справа — суперпозиции постоянного и следящего моментов. На всех рисунках полюса сфер совпадают с положением конца единичного вектора  $\underline{e}$ .

В случае действия на тело постоянного момента  $\underline{M} = M^* \underline{e}$  движение тела при  $t \rightarrow +\infty$  стремится к квазирегулярной прецессии, причем направление оси прецессии определяется направлением действующего на тело момента  $\underline{M} = M^* \underline{e}$ , а ось собственного вращения совпадает с осью симметрии тела

(см. рис. 4 слева). Предельный угол между осью симметрии тела и направлением внешнего момента может принимать любые значения от 0 до  $\pi$ ; он зависит от всей совокупности параметров и для его определения требуется полное решение задачи. Таким образом, постоянный момент оказывает стабилизирующее воздействие на движение тела только в том смысле, что он при любых начальных условиях приводит движение тела к квазипериодическому вращению, ось которой совпадает с направлением внешнего момента. В смысле поддержания квазиперманентных вращений тела вокруг оси симметрии постоянный момент является дестабилизирующим. Исключения составляют два частных случая. Первый частный случай — это квазиперманентное вращение вокруг вектора  $\underline{e}$  на всем интервале времени движения; он реализуется при условии  $\underline{M} = M^* \underline{e}$ ,  $\underline{n}(0) = \underline{e}$ ,  $\underline{\omega}(0) = \omega_0 \underline{e}$ . Вторым частным случаем — это стремление движения тела при  $t \rightarrow +\infty$  к квазиперманентному вращению вокруг оси симметрии, которая в свою очередь стремится занять положение, совпадающее с направлением вектора  $\underline{e}$ . Этот частный случай реализуется при определенном взаимном расположении векторов  $\underline{n}(0)$  и  $\underline{\omega}(0)$ , для нахождения которого требуется полное решение задачи.

В случае действия на тело следящего момента  $\underline{M}(t) = M^* \underline{n}(t)$  движение тела при  $t \rightarrow +\infty$  стремится к квазиперманентному вращению вокруг оси симметрии (см. рис. 4 в центре); предельное положение оси симметрии зависит от всей совокупности параметров и может быть определено только после того, как задача полностью решена. При этом угол между начальным и предельным положениями оси симметрии может принимать любые значения от 0 до  $\pi$ . Таким образом, следящий момент является стабилизирующим в том смысле, что он при любых начальных значениях вектора угловой скорости приводит движение тела к квазиперманентному вращению вокруг оси симметрии, но в то же время он является и дестабилизирующим в том смысле, что он уводит ось симметрии тела из ее начального положения. Исключение составляет частный случай  $\underline{\omega}(0) = \omega_0 \underline{e}$ , когда решением задачи на всем интервале времени  $[0, +\infty)$  является квазиперманентное вращение вокруг оси симметрии тела.

Самым простым и полностью предсказуемым является движение тела в случае действия на него момента  $\underline{M}(t) = M_1^* \underline{n}(t) + M_2^* \underline{e}$ , представляющего собой суперпозицию постоянного и следящего моментов. В этом случае движение тела при  $t \rightarrow +\infty$  стремится к квазиперманентному вращению вокруг оси симметрии, предельное положение которой совпадает с направлением постоянного момента  $M_2^* \underline{e}$  (см. рис. 4 справа).

Таким образом, сравнительный анализ решений четырех перечисленных

выше задач позволяет сделать вывод о том, что для поддержания вращательного движения ротора центрифуги оптимальным из рассмотренных является момент, представляющий собой суперпозицию постоянного и следящего моментов, так как именно этот момент способствует устойчивости положения оси симметрии твердого тела.

Исследование перечисленных выше задач проводилось методами, в основе которых лежит использование тензора поворота и связанных с ним понятий. В ходе решения перечисленных задач получены следующие новые результаты, которые могут найти применение при исследовании ряда других задач динамики абсолютно твердого тела и динамики дискретно-континуальных систем.

Предложено представление тензора поворота динамически симметричного твердого тела через вектор кинетического момента. Пусть тензор инерции твердого тела в отсчетной конфигурации имеет вид

$$\underline{\underline{\theta}} = \lambda \underline{e} \underline{e} + \mu (\underline{E} - \underline{e} \underline{e}). \quad (24)$$

Пусть положение тела в данный момент времени определяется тензором поворота  $\underline{P}(t)$  и пусть тело имеет угловую скорость  $\underline{\omega}(t)$  и кинетический момент  $\underline{L}(t)$ . Кинетический момент вычисляется по формуле

$$\underline{L}(t) = \underline{P}(t) \cdot \underline{\underline{\theta}} \cdot \underline{P}^T(t) \cdot \underline{\omega}(t). \quad (25)$$

Тогда тензор поворота тела  $\underline{P}(t)$  можно представить в виде композиции двух тензоров поворота

$$\underline{P}(t) = \underline{P}_L(t) \cdot \underline{P}_*(t). \quad (26)$$

Здесь тензор поворота  $\underline{P}_L(t)$  определяется через вектор кинетического момента твердого тела  $\underline{L}(t)$  как решение левой задачи Дарбу

$$\dot{\underline{P}}_L(t) = \underline{\omega}_L(t) \times \underline{P}_L(t), \quad \underline{\omega}_L(t) = \mu^{-1} \underline{L}(t), \quad \underline{P}_L(t_0) = \underline{P}(t_0), \quad (27)$$

а тензор поворота  $\underline{P}_*(t)$  имеет вид

$$\underline{P}_*(t) = (1 - \cos \beta(t)) \underline{e} \underline{e} + \cos \beta(t) \underline{E} + \sin \beta(t) \underline{e} \times \underline{E}, \quad (28)$$

где угол  $\beta(t)$  выражается через правую угловую скорость, соответствующую тензору поворота  $\underline{P}_L(t)$

$$\beta(t) = (\mu/\lambda - 1) \int \underline{e} \cdot \underline{\Omega}_L(t) dt, \quad \underline{\Omega}_L(t) = \underline{P}_L^T(t) \cdot \underline{\omega}_L(t), \quad \beta(t_0) = 0. \quad (29)$$

Показано, что при определенных внешних нагрузках использование данного представления тензора поворота позволяет свести задачу о движении симметричного тела к аналогичной задаче о движении тела с шаровым тензором инерции.



Предложено представление тензора поворота через левый и правый векторы угловой скорости. Это представление тензора поворота имеет вид

$$\underline{\underline{P}} = A\underline{\omega}\underline{\Omega} + B(\underline{\omega}\underline{\Omega})\dot{\phantom{x}} + C\underline{\dot{\omega}}\underline{\dot{\Omega}} + D(\underline{\omega} \times \underline{\dot{\omega}})(\underline{\Omega} \times \underline{\dot{\Omega}}), \quad (30)$$

где  $\underline{\omega}$  — левый вектор угловой скорости,  $\underline{\Omega}$  — правый вектор угловой скорости. Скалярные коэффициенты  $A, B, C, D$  вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} A &= \underline{\dot{\Omega}} \cdot \underline{\dot{\Omega}} D = \underline{\dot{\omega}} \cdot \underline{\dot{\omega}} D, & B &= -(1/2)(\underline{\Omega}^2)\dot{\phantom{x}} D = -(1/2)(\underline{\omega}^2)\dot{\phantom{x}} D \\ C &= \underline{\Omega}^2 D = \underline{\omega}^2 D, & D &= 1/(\underline{\Omega} \times \underline{\dot{\Omega}})^2 = 1/(\underline{\omega} \times \underline{\dot{\omega}})^2. \end{aligned} \quad (31)$$

Данное представление тензора поворота позволило получить новую формулировку задачи Дарбу (задачи определения тензора поворота по известному вектору угловой скорости). В традиционной постановке задача Дарбу — это задача определения тензора поворота по одному из векторов угловой скорости (левому или правому). Она решается путем интегрирования соответствующей системы дифференциальных уравнений. Если известны оба вектора угловой скорости, тензор поворота определяется без дополнительного интегрирования, согласно формулам (30), (31). Исходя из этого факта, задача Дарбу может быть переформулирована следующим образом.

*Левая задача Дарбу:* определить правый вектор угловой скорости по известному левому.

*Формулировка I.* Задача Коши для определения правого вектора угловой скорости имеет вид

$$\ddot{\underline{\Omega}} + a(\underline{\omega})\dot{\underline{\Omega}} + b(\underline{\omega})\underline{\Omega} = c(\underline{\omega})\underline{\Omega} \times \underline{\dot{\Omega}}, \quad (32)$$

$$\underline{\Omega}(0) = \underline{\underline{P}}_0^T \cdot \underline{\omega}_0, \quad \underline{\dot{\Omega}}(0) = \underline{\underline{P}}_0^T \cdot \underline{\dot{\omega}}_0. \quad (33)$$

Коэффициенты  $a(\underline{\omega}), b(\underline{\omega}), c(\underline{\omega})$  вычисляются так:

$$a(\underline{\omega}) = -(\ln |\underline{\omega} \times \underline{\dot{\omega}}|), \quad b(\underline{\omega}) = \frac{(\underline{\omega} \times \underline{\dot{\omega}}) \cdot (\underline{\dot{\omega}} \times \underline{\ddot{\omega}})}{(\underline{\omega} \times \underline{\dot{\omega}})^2}, \quad c(\underline{\omega}) = \frac{\underline{\ddot{\omega}} \cdot (\underline{\omega} \times \underline{\dot{\omega}})}{(\underline{\omega} \times \underline{\dot{\omega}})^2} - 1. \quad (34)$$

*Формулировка II* является следствием формулировки I. Дифференциальное уравнение имеет вид

$$\ddot{\underline{\Omega}} + A(\underline{\omega})\dot{\underline{\Omega}} + B(\underline{\omega})\underline{\dot{\Omega}} + C(\underline{\omega})\underline{\Omega} = 0, \quad (35)$$

где коэффициенты  $A(\underline{\omega}), B(\underline{\omega}), C(\underline{\omega})$  являются функциями коэффициентов  $a(\underline{\omega}), b(\underline{\omega}), c(\underline{\omega})$ . В качестве начальных условий используются дифференциальное уравнение (32) при  $t = 0$  и начальные условия (33).

*Правая задача Дарбу:* определить левый вектор угловой скорости по известному правому.

*Формулировка I.* Задача Коши для определения левого вектора угловой скорости имеет вид

$$\ddot{\underline{\omega}} + a(\underline{\Omega}) \dot{\underline{\omega}} + b(\underline{\Omega}) \underline{\omega} = c(\underline{\Omega}) \underline{\omega} \times \dot{\underline{\omega}}, \quad (36)$$

$$\underline{\omega}(0) = \underline{P}_0 \cdot \underline{\Omega}_0, \quad \dot{\underline{\omega}}(0) = \underline{P}_0 \cdot \dot{\underline{\Omega}}_0. \quad (37)$$

Коэффициенты  $a(\underline{\Omega})$ ,  $b(\underline{\Omega})$ ,  $c(\underline{\Omega})$  вычисляются так:

$$a(\underline{\Omega}) = -(\ln |\underline{\Omega} \times \dot{\underline{\Omega}}|), \quad b(\underline{\Omega}) = \frac{(\underline{\Omega} \times \dot{\underline{\Omega}}) \cdot (\dot{\underline{\Omega}} \times \ddot{\underline{\Omega}})}{(\underline{\Omega} \times \dot{\underline{\Omega}})^2}, \quad c(\underline{\Omega}) = \frac{\ddot{\underline{\Omega}} \cdot (\underline{\Omega} \times \dot{\underline{\Omega}})}{(\underline{\Omega} \times \dot{\underline{\Omega}})^2} + 1. \quad (38)$$

*Формулировка II* является следствием формулировки I. Дифференциальное уравнение имеет вид

$$\ddot{\underline{\omega}} + A(\underline{\Omega}) \dot{\underline{\omega}} + B(\underline{\Omega}) \underline{\omega} + C(\underline{\Omega}) \underline{\omega} = 0, \quad (39)$$

где  $A(\underline{\Omega})$ ,  $B(\underline{\Omega})$ ,  $C(\underline{\Omega})$  являются функциями коэффициентов  $a(\underline{\Omega})$ ,  $b(\underline{\Omega})$ ,  $c(\underline{\Omega})$ . В качестве начальных условий используются дифференциальное уравнение (36) при  $t = 0$  и начальные условия (37).

Использование предложенной формулировки задачи Дарбу дало возможность, в частности, построить точное аналитическое решение хорошо известной, но не полностью решенной до настоящего времени задачи о движении шара по шероховатой плоскости в режиме качения со скольжением.

**Пятая глава** посвящена выводу нелинейных уравнений движения твердого тела на инерционной упругой пластине. Цель исследования заключается в сведении задачи к системе скалярных уравнений, удобных для использования в численных процедурах. Основной трудностью является формулировка условий соединения твердого тела и пластины. Эта проблема решается посредством использования одинакового математического аппарата (прямого тензорного исчисления) при описании кинематики пластины и твердого тела. Проблема приведения системы дифференциальных уравнений к виду, удобному для численной реализации, решается с помощью специального выбора основных переменных, описывающих вращательное движение твердого тела и тел-точек пластины, а именно, использования представления тензора поворота через вектор конечного поворота. Для описания движения пластины используется нелинейная теория типа Рейсснера, имеющая десятый порядок и требующая постановки пяти граничных условий в каждой точке контура.

Рассматриваются две формулировки задачи. Одна формулировка задачи соответствует случаю, когда тело имеет неподвижную точку, закрепленную с помощью сферического шарнира (см. рис. 1). Другая формулировка задачи соответствует случаю, когда твердое тело не имеет неподвижных точек (см. рис. 3). Положение и ориентация тел-точек пластины задаются радиус-вектором  $\underline{R}$  и тензором поворота  $\underline{P}$

$$\begin{aligned} \underline{R}(r, \theta, t) &= (r + u_r) \underline{e}_r + u_\theta \underline{e}_\theta + u_z \underline{n}, \\ \underline{P}(r, \theta, t) &= \underline{E} + \frac{\sin \varphi}{\varphi} \underline{\varphi} \times \underline{E} + \frac{1 - \cos \varphi}{\varphi^2} \underline{\varphi} \times \underline{E} \times \underline{\varphi}, \\ \underline{\varphi}(r, \theta, t) &= \varphi_r \underline{e}_r + \varphi_\theta \underline{e}_\theta, \quad \varphi = \sqrt{\varphi_r^2 + \varphi_\theta^2} \end{aligned} \quad (40)$$

Граничные условия на внутреннем контуре пластины существенно зависят от движения твердого тела. Фактически, уравнения движения твердого тела в совокупности с кинематическими условиями соединения твердого тела и пластины представляют собой граничные условия на внутреннем контуре пластины.

*Задача 1. Тело имеет неподвижную точку (см. рис. 1).* Тензор поворота внешнего кольца подшипника представляется в форме

$$\tilde{\underline{P}}(t) = \underline{P}[\underline{\Psi}(t)] \cdot \underline{P}[\alpha(t)\underline{n}], \quad \underline{n} \cdot \underline{\Psi}(t) = 0, \quad (41)$$

где единичный вектор  $\underline{n}$  определяет направление оси подшипника в отсчетном положении, когда пластина недеформирована,  $\alpha$  — угол поворота внешнего кольца подшипника вокруг собственной оси,  $\underline{\Psi}$  — вектор поворота, характеризующий нутационные движения твердого тела и подшипника. Векторы углов поворота и векторы положения тел-точек на внутреннем контуре пластины связаны с величинами, задающими положение внешнего кольца подшипника, по формулам

$$\underline{\varphi}(r, \theta, t)|_{r=r_1} = \underline{\Psi}(t), \quad \underline{R}(r, \theta, t)|_{r=r_1} = \tilde{\underline{P}}(t) \cdot r_1 \underline{e}_r, \quad (42)$$

где  $\underline{\varphi}$  — вектор углов поворота тел-точек пластины. Тензор поворота твердого тела  $\underline{P}_*$  отличается от тензора поворота внешнего кольца подшипника  $\tilde{\underline{P}}$  поворотом вокруг оси подшипника

$$\underline{P}_*(t) = \underline{P}[\underline{\Psi}(t)] \cdot \underline{P}[\beta(t)\underline{n}]. \quad (43)$$

Здесь  $\beta$  — угол поворота твердого тела вокруг оси подшипника. Предполагается, что момент трения в подшипнике определяется формулой  $\underline{M}_{fr} =$

$-b(\dot{\alpha} - \dot{\beta}) [\underline{P}_* \cdot \underline{n}]$ , где  $b$  — коэффициент трения. Тогда уравнение движения внешнего кольца подшипника (подшипник считается безынерционным) дает уравнение связи углов  $\alpha$  и  $\beta$

$$(\underline{P}_* \cdot \underline{n}) \cdot \underline{M}_{pl} - b(\dot{\alpha} - \dot{\beta}) = 0, \quad (44)$$

где  $\underline{M}_{pl}$  — упругий момент, действующий на внешнее кольцо подшипника со стороны пластины. Уравнение движения твердого тела имеет вид

$$\begin{aligned} (\underline{P}_* \cdot \underline{J}_o \cdot \underline{P}_*^T \cdot \underline{\omega}_*) \cdot &= \underline{M}_{pl} + \underline{R}_C \times m\underline{g} - \underline{P}_* \cdot \underline{B}_{vf} \cdot \underline{P}_*^T \cdot \underline{\omega}_* + \underline{L}_{mt}, \\ \underline{M}_{pl} &= \int_0^{2\pi} [\underline{R} \cdot \underline{M} + \underline{R} \times (\underline{R} \cdot \underline{T})]_{|_{r=r_1}} d\theta. \end{aligned} \quad (45)$$

Здесь  $\underline{J}_o$  — тензор инерции твердого тела в отсчетном положении, вычисленный относительно его неподвижной точки,  $\underline{\omega}_*$  — вектор угловой скорости твердого тела,  $\underline{R}_C$  — вектор положения центра масс тела,  $m\underline{g}$  — сила тяжести,  $\underline{B}_{vf}$  — тензорный коэффициент вязкого трения,  $\underline{L}_{mt}$  — момент двигателя ограниченной мощности,  $\underline{M}$  — тензор моментов,  $\underline{T}$  — тензор усилий. Уравнения (41) – (45) представляют собой граничные условия на внутреннем контуре пластины.

*Задача 2. Тело не имеет неподвижных точек (см. рис. 3).* Тензор поворота внешнего кольца подшипника и тензор поворота твердого тела определяется формулами (41), (43). Векторы углов поворота и векторы положения тел-точек на внутреннем контуре пластины связаны с величинами, определяющими положение внешнего кольца подшипника, следующим образом

$$\underline{\varphi}(r, \theta, t)|_{r=r_1} = \underline{\Psi}(t), \quad \underline{R}(r, \theta, t)|_{r=r_1} = \underline{R}_o(t) + \underline{\tilde{P}}(t) \cdot r_1 \underline{e}_r, \quad (46)$$

где  $\underline{R}_o(t)$  — вектор положения точки твердого тела, которая при недеформированном состоянии пластины совпадает с ее центром. Связь углов  $\alpha$  и  $\beta$  (см. формулы (41), (43)) дается уравнением (44), характеризующим движение внешнего кольца подшипника. Уравнения движения твердого тела записываются так:

$$\begin{aligned} m\ddot{\underline{R}}_C &= \underline{E}_{pl} + m\underline{g}, \quad \underline{E}_{pl} = \int_0^{2\pi} [(\underline{R} - \underline{R}_o) \cdot \underline{T}]_{|_{r=r_1}} d\theta, \\ (\underline{P}_* \cdot \underline{J}_C \cdot \underline{P}_*^T \cdot \underline{\omega}_*) \cdot &= \underline{M}_{pl} - \underline{P}_* \cdot \underline{B}_{vf} \cdot \underline{P}_*^T \cdot \underline{\omega}_* + \underline{L}_{mt}, \\ \underline{M}_{pl} &= \int_0^{2\pi} [(\underline{R} - \underline{R}_o) \cdot \underline{M} + (\underline{R} - \underline{R}_C) \times ((\underline{R} - \underline{R}_o) \cdot \underline{T})]_{|_{r=r_1}} d\theta, \end{aligned} \quad (47)$$

где  $\underline{J}_C$  — тензор инерции твердого тела в отсчетном положении, вычисленный относительно центра масс,  $\underline{F}_{pl}$  — упругая сила, действующая на внешнее кольцо подшипника со стороны пластины. Таким образом, уравнения (41), (43), (44), (46), (47) являются граничными условиями на внутреннем контуре пластины.

Сформулированные выше задачи сведены к системам скалярных уравнений. Благодаря выбору в качестве основных переменных проекций вектора конечного поворота (40), полученные уравнения движения имеют форму, удобную для использования в численных процедурах.

**Заключение** содержит формулировку основных положений, выносимых на защиту.

1. Предложены новые формы функционала потенциальной энергии в задаче о статическом изгибе пластин и функционала Гамильтона в задаче о низкочастотных свободных колебаниях пластин с учетом инерции вращения и деформации поперечного сдвига. Особенность предложенных формулировок заключается в том, что функционалы включают в себя только медленно меняющиеся функции.
2. Проведено асимптотическое исследование задачи о высокочастотных свободных колебаниях пластин. Установлено, что решение содержит быстро меняющуюся по пространственным координатам функцию, которая не является функцией типа погранслоя, а проникает во всю область пластины. Предложена приближенная формулировка задачи о высокочастотных свободных колебаниях пластины, позволяющая определять асимптотически главные члены всех величин, характеризующих напряженно-деформированное состояние пластины.
3. Рассмотрена постановка задачи о движении вращающегося тяжелого твердого тела на инерционной упругой пластине. В предположении малости угла нутации твердого тела и малости деформации пластины построено точное решение задачи о движении системы в стационарном режиме. Исследовано влияние на устойчивость движения твердого тела на пластине различных видов трения и различных видов моментов двигателя. Показано, что оптимальным из рассмотренных является следящий момент двигателя, так как в этом случае движение устойчиво при любом соотношении коэффициентов трения. Исследованы свойства решения задачи в зависимости от соотношения изгибной и сдвиговой жесткости пластины. Показано, что при увеличении толщины пластины с одновременным уменьшением коэффициента поперечного сдвига

уменьшаются нутационные колебания твердого тела. При этом, если в системе есть трение, демпфирующее свободные колебания, увеличение напряжений в местах соединения твердого тела и пластины оказывается незначительным.

4. При анализе задачи о движении многороторного гиростата на инерционной упругой пластине показано, что введение в систему дополнительных роторов дает возможность осуществлять торможение несущего тела, сохраняя постоянным суммарный кинетический момент гиростата. Показано, что использование дополнительных роторов, направления вращения которых совпадают с направлением вращения несущего тела, позволяет существенно увеличить вторую резонансную частоту и уменьшить первую, так что в режиме торможения при постоянном кинетическом моменте несущее тело будет преодолевать только один низкочастотный резонанс. Показано, что использование дополнительного ротора, направление вращения которого противоположно направлению вращения несущего тела, позволяет увеличить дорезонансный диапазон угловых скоростей несущего тела.
5. Изучено влияние различных видов сопротивления на пространственное вращение твердых тел. Исследование проводилось на примере задач о свободном вращении твердых тел в вязкой среде в нелинейной постановке. Рассматривались случаи линейного и нелинейного трения, полной и неполной диссипации. Исследование проводилось путем построения и последующего анализа точного решения задач. Разработан метод построения решений в форме рядов по убывающим степеням экспонент. Доказана полнота системы убывающих экспонент на классе функций, являющихся решением рассмотренных задач. Доказана равномерная сходимость построенных рядов. В результате исследования установлено, какие виды сопротивления способствуют устойчивости вращения тела вокруг определенной оси, а какие виды трения оказывают дестабилизирующее воздействие. Получены асимптотические формулы, описывающие движение тела при больших временах.
6. Разработан метод описания кинематики абсолютно твердого тела, базирующийся на использовании тензора поворота и связанных с ним понятий. Предложено представление тензора поворота через левый и правый векторы угловой скорости. На основе данного представления тензора поворота получена новая формулировка задачи Дарбу (задачи определения тензора поворота по известному вектору угловой скорости). Использо-

зование предложенного метода продемонстрировано на примере задачи о движении шара по шероховатой плоскости в режиме качения со скольжением; построено точное аналитическое решение задачи, выраженное через гипергеометрические функции. Предложено представление тензора поворота динамически симметричного твердого тела через вектор кинетического момента. Показано, что при определенных внешних нагрузках использование данного представления тензора поворота позволяет свести задачу о движении симметричного тела к аналогичной задаче о движении тела с шаровым тензором инерции.

7. Проведено аналитическое исследование задач о вращении динамически симметричного твердого тела под действием моментов четырех видов: постоянного, следящего, полускасательного и суперпозиции постоянного и следящего. Для первых двух из указанных задач построены точные аналитические решения. Метод решения данных задач основан на использовании представления тензора поворота динамически симметричного твердого тела через вектор кинетического момента и новой формулировки задачи Дарбу. Для последних двух из указанных задач проведено аналитическое исследование, в результате которого установлен ряд свойств движения тела на всем интервале времени и построено асимптотическое решение задачи при больших временах. Сравнительный анализ решений четырех перечисленных задач позволил сделать вывод о том, что с точки зрения поддержания вращательного движения твердого тела вокруг оси симметрии, занимающей фиксированное положение в пространстве, оптимальным из рассмотренных является момент, представляющий собой суперпозицию постоянного и следящего моментов (в частности полускасательный момент), так как именно этот момент способствует устойчивости положения оси симметрии твердого тела.
8. Предложены нелинейные формулировки двух задач о движении тяжелого твердого тела на инерционной упругой пластине при учете инерции вращения и деформации поперечного сдвига. В первой задаче твердое тело имеет неподвижную точку, закрепленную с помощью сферического шарнира. Во второй задаче твердое тело не имеет неподвижных точек. Обе задачи сведены к системам скалярных уравнений. Основные переменные, описывающие кинематику твердого тела и пластины, выбраны таким образом, что полученные уравнения будут удобны для использования в численных процедурах.

## Основные результаты опубликованы в следующих работах:

1. Иванова Е. А. Асимптотическое разделение колебаний в динамике пластин типа Рейсснера // Труды СПбГТУ. 1993. N 446. С. 185 – 187.
2. Жилин П. А., Иванова Е. А. Модифицированный функционал энергии в теории пластин типа Рейсснера // Изв. РАН., МТТ. 1995. N 2. С. 120 – 128.
3. Иванова Е. А. Приближенные функционалы Гамильтона в задачах о низкочастотных и высокочастотных свободных колебаниях пластины Рейсснера // Изв. РАН., МТТ. 1995. N 4. С. 181 – 190.
4. Иванова Е. А. О реальной точности асимптотических уравнений в задаче о свободных колебаниях пластины Рейсснера // Труды СПбГТУ. 1995. N 458. С. 97 – 100.
5. Иванова Е. А. О реальной точности одного приближенного метода решения задач о колебаниях пластин под действием ударных нагрузок // Труды СПбГТУ. 1995. N 458. С. 100 – 109.
6. Иванова Е. А. Свободное вращение осесимметричного твердого тела в сопротивляющейся среде // Труды СПбГТУ. 1997. N 467. С. 61 – 69.
7. Ivanova E. A. Free rotation of rigid body in the resisting medium // Труды XXIV школы - семинара “Анализ и синтез нелинейных механических колебательных систем”, С.-Петербург, 1997. С. 394 – 406.
8. Иванова Е. А. Задание тензора поворота через вектор кинетического момента // Труды XXV - XXVI летних школ “Анализ и синтез нелинейных механических колебательных систем”, С.-Петербург, 1998. Т. 2. С. 113 – 125.
9. Иванова Е. А. Сравнительный анализ низкочастотных свободных колебаний прямоугольных пластин // Изв. РАН., МТТ. 1997. N 6. С. 148 – 159.
10. Иванова Е. А. Асимптотический и численный анализ высокочастотных свободных колебаний прямоугольных пластин // Изв. РАН., МТТ. 1998. N 2. С. 163 – 174.
11. Иванова Е. А. Об асимптотических свойствах пространственного вращения твердых тел в вязкой среде // Труды XXVII летней школы “Анализ и синтез нелинейных механических колебательных систем”, С.-Петербург, 1999. С. 413 – 420.



12. Иванова Е. А. Об одном подходе к решению задачи Дарбу // Изв. РАН., МТТ. 2000. N 1. С. 45 – 52.
13. Ivanova E. A. On the use of a new method of solution of Darboux problem for solution of the problem of motion of a ball on a rough plane // Proc. of the XXVIII Summer School "Nonlinear oscillations in Mechanical Systems. Actual Problems in Mechanics". V. 1. St. Petersburg. 2001. P. 361 – 367.
14. Ivanova E. A. A New Approach to Solution of some Problems of the Rigid Body Dynamics // ZAMM. Z. Angew. Math. Mech. 81 (2001). N 9. P. 613 – 622.
15. Иванова Е. А. Точное решение задачи о вращении осесимметричного твердого тела в линейной вязкой среде // Изв. РАН. МТТ. 2001. N 6. С. 15 – 30.
16. Ivanova E. A. Rotation of a Symmetric Rigid Body under the Action of a Constant Moment // Book of Abstracts of EUROMECH Colloquium 425: Nonlinear Dynamics, Control and Condition Monitoring, Aberdeen. UK. 2001. P. 19.
17. Иванова Е. А. Об использовании тензора поворота в динамике твердого тела и в динамике дискретно-континуальных систем // VIII Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике. Пермь. Россия. 23 – 29 августа, 2001 г.
18. Ivanova E. A. The motion of a rigid body on the inertial elastic plate. A nonlinear formulation of the problem and some effects // Proc. of the XXIX Summer School "Advanced Problems in Mechanics". St. Petersburg. 2002. P. 339 – 347.
19. Ivanova E. A. The rotation of a symmetrical rigid body under the action of superposition of a following moment and a constant moment // Proc. of the XXIX Summer School "Advanced Problems in Mechanics". St. Petersburg. 2002. P. 348 – 356.
20. Ivanova E. A., Zhilin P. A. Non-stationary regime of the motion of a rigid body on an elastic plate // Proc. of the XXIX Summer School "Advanced Problems in Mechanics". St. Petersburg. 2002. P. 357 – 363.