

УДК 539.3

Некоторые задачи наномеханики

В.А. Еремеев^{1,2}, Е.А. Иванова^{3,4}, Н.Ф. Морозов^{4,5}¹ Университет Отто фон Герике Магдебург, Магдебург, 39106, Германия² Южный научный центр РАН, Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, 344090, Россия³ Санкт-Петербургский государственный политехнический университет, Санкт-Петербург, 195251, Россия⁴ Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург, 199178, Россия⁵ Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, 198904, Россия

Представлены некоторые результаты моделирования наноразмерных объектов в рамках подходов механики сплошных сред и конструкций. Обсуждаются исследования наноструктур, состоящих из множества одинаковых наноэлементов, основанных на измерении собственных частот. Рассматриваются упорядоченные ориентированные массивы нанообъектов (нанокристаллов, нанооболочек), закрепленных на упругой подложке. Показано, что из общего спектра собственных колебаний такой механической системы возможно выделение нескольких собственных частот одного нанообъекта. Также рассмотрена модификация эффективных свойств наноматериалов, связанная с учетом поверхностных напряжений.

Ключевые слова: наноструктуры, колебания, поверхностные напряжения

Some problems of nanomechanics

V.A. Eremeev^{1,2}, E.A. Ivanova^{3,4}, and N.F. Morozov^{4,5}¹ Otto-von-Guericke Universität Magdeburg, Magdeburg, 39106, Germany² Southern Scientific Center RAS, Southern Federal University, Rostov-on-Don, 344090, Russia³ St. Petersburg State Polytechnic University, St. Petersburg, 195251, Russia⁴ Institute of Problems of Mechanical Engineering RAS, St. Petersburg, 199178, Russia⁵ St. Petersburg State University, St. Petersburg, 198904, Russia

The paper presents some results of simulation of nanosized objects in continuum and structural mechanics. Eigenfrequency studies of nanostructures comprising the multitude of like nanoelements are discussed. Consideration is given to ordered oriented arrays of nanoobjects (nanocrystals, nanoshells) fixed on an elastic substrate. It is shown that several eigenfrequencies of a single nanoobject in the natural vibration spectrum of such mechanical systems can be determined. Also considered in the paper is modification of effective properties of nanomaterials with regard for surface stresses.

Keywords: nanostructures, vibrations, surface stress

1. Введение

В последнее время для механики сплошных сред и конструкций характерно расширение области применения: ее методы с различными модификациями применяются на макро-, мезо-, микроуровнях [1, 2], а также на наноуровне. Наноматериалы демонстрируют свойства, отличные от соответствующих характеристик макроскопических материалов (см., например, [3–5]). В литературе известны различные методы описания нанообъектов: из первых принципов, дискретные методы (типа молекулярной динамики), дискретно-континуаль-

ные и континуальные. По мнению авторов, в зависимости от рассматриваемых задач, методы механики сплошных сред и конструкций вполне могут применяться и на наноуровне, но с учетом некоторых модификаций, связанных с определением традиционных механических и физических параметров нанообъектов, действием характерных сил (Ван-дер-Ваальса, Казимира и др.).

В данной работе проводится анализ наноструктур как при учете особенностей строения (как в случае упорядоченных массивов нанообъектов), так и при модифи-

кации уравнений состояния на наноуровне, например с помощью учета поверхностных напряжений.

2. Упорядоченные массивы нанобъектов и методы их исследования, основанные на анализе спектра собственных колебаний

Один из наиболее эффективных методов определения упругих модулей, в частности изгибной жесткости, используемых в механике макрообъектов, основан на измерении собственных частот исследуемого объекта. При попытке использовать этот метод применительно к нанобъектам возникают проблемы, связанные с трудностью измерения их собственных частот. В частности, измерение частот нанобъектов оказывается проблематичным при использовании оптических методов [6]. Механические аспекты этих методов заключаются в следующем: исследуемый объект закрепляется на рамке макроскопических размеров и возбуждается лучом лазера; затем с помощью второго луча лазера фиксируются амплитуды колебаний в некоторой точке объекта, сигнал преобразуется в электрический, полученная спектрограмма анализируется с помощью спектрометра, в результате чего определяются собственные частоты объекта. Главным, но не единственным фактором, ограничивающим область применимости метода, является то, что луч лазера не точка, а пятно диаметра порядка длины волны света. Если размер исследуемого объекта оказывается меньше диаметра луча лазера, результаты измерений теряют смысл. Таким образом, пользуясь указанными выше оптическими методами, измерить частоты одного нанобъекта не представляется возможным. Вместе с тем, вполне реальным является измерение собственных частот системы «микроподложка – регулярная структура одинаковых нанобъектов». Основной проблемой, возникающей при измерении частот исследуемых объектов, закрепленных на упругой подложке, является известное в механике перераспределение собственных частот колебаний системы «исследуемый объект – подложка» между собственными частотами каждого из них в отдельности [7].

В [8, 9] был предложен метод определения собственных частот некоторых наноструктур (нанотрубок и нанокристаллов), основанный на измерении собственных частот «большой системы», состоящей из высокоориентированного массива (решетки) одинаковых нанотрубок или нанокристаллов, выращенных на подложке и расположенных перпендикулярно к подложке (рис. 1, а). Примером массива нанокристаллов, исследованного в [8, 9], служат полупроводниковые микро- и нанокристаллы оксида цинка. Такие кристаллы в связи с их высокими механическими и физическими свойствами представляют значительный интерес для наномеханики и нанофотоники и получают различными способами, в частности методом импульсного лазерного напыления [10–

12]. Также существуют аналогичные массивы нанобъектов (углеродных нанотрубок и наночастиц), получаемые различными методами.

Поскольку размеры нанобъектов в массиве, как правило, примерно одинаковы, это позволяет использовать макроскопические размеры такого массива для изучения свойств нанобъектов путем определения первых собственных частот системы «решетка нанотрубок (нанокристаллов) – подложка». Далее показано, что по найденному спектру «большой системы» («решетка – подложка») и спектру подложки можно определить собственные частоты одного нанобъекта.

Идея метода экспериментального определения нескольких первых собственных частот нанобъектов заключается в следующем. Спектр собственных частот системы «решетка нанотрубок (нанокристаллов) – подложка» делится на две части. Одна часть спектра системы соответствует спектру собственных частот нанобъектов. При колебаниях нанобъектов с этими частотами подложка остается практически неподвижной. Другая часть спектра системы представляет собой спектр собственных частот, близких к собственным частотам подложки без нанобъектов. При этих частотах амплитуда колебаний нанобъектов оказывается существенно меньше амплитуды колебаний подложки. Такое разделение спектра «большой системы» на две части, соответствующие спектру подложки и нанобъектов, возможно для первых десятков собственных частот, для больших значений частот формы собственных колебаний носят более сложный характер. Все перечисленные выше свойства систем «решетка наноболобочек, нанотрубок или нанокристаллов – подложка» (рис. 1) выявлены в результате теоретического исследования, проведенного в работах [8, 9, 13–15]. На основании теоретически полученных фактов можно предложить методику проведения экспериментов по определению собственных частот нанобъектов в двух модификациях.

Модификация 1. Измерить несколько первых собственных частот системы «решетка нанотрубок (нано-

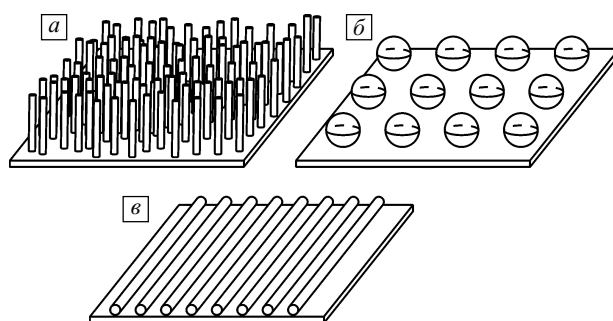


Рис. 1. Примеры наноструктур: массив вертикальных нанокристаллов или нанотрубок (а), наносферы на подложке (б), нанотрубки, лежащие на подложке (в)

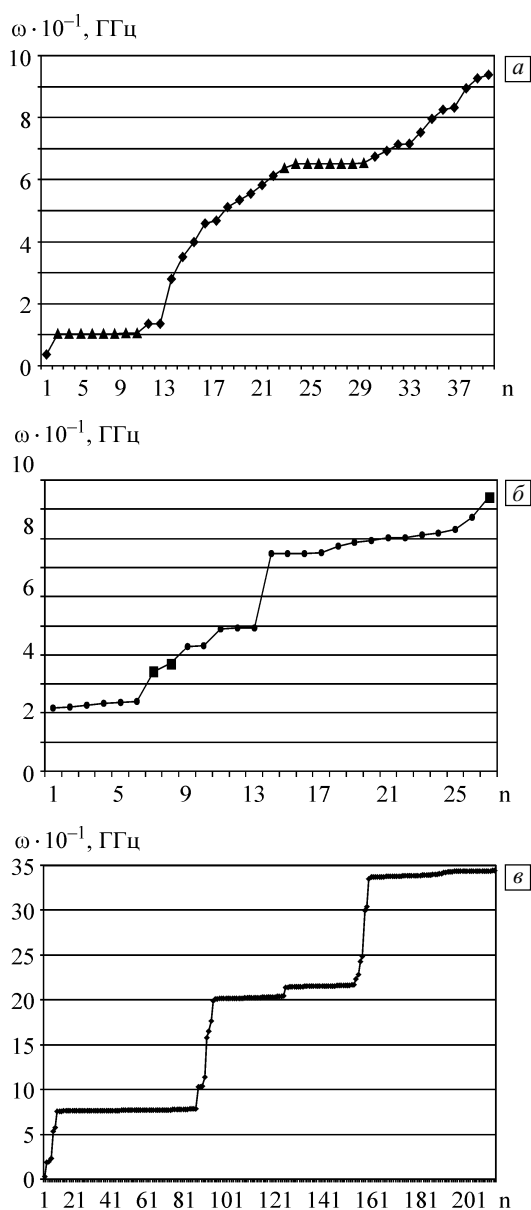


Рис. 2. Собственные частоты наноструктур для массива вертикальных нанокристаллов или нанотрубок (а), для системы наносфер на подложке (б), для системы нанотрубок на подложке (в)

кристаллов) – подложка». Измерить собственные частоты такой же подложки без нанобъектов. Сравнить два полученных спектра. Частоты в спектре системы, близкие к частотам подложки без нанобъектов, не представляют интереса. Частоты в спектре системы, которым не находится соответствия среди частот в спектре подложки, представляют собой частоты нанобъектов.

Модификация 2. Измерить резонансные частоты системы, зафиксировав электромагнитное излучение нанобъектов (это можно сделать, поскольку многие

нанобъекты представляют собой пьезоэлектрики). Одновременно измерить амплитуду колебаний подложки (это можно сделать, поскольку подложка представляет собой макрообъект). Резонансные частоты, при которых амплитуда колебаний подложки равна нулю, являются собственными частотами нанобъектов.

Спектр собственных частот, упорядоченных по номеру n , показан на рис. 2. Рисунок 2, а соответствует массиву вертикальных нанокристаллов из оксида цинка [8, 9], рисунок 2, б — системе наносфер на подложке [14], рисунок 2, в — системе нанотрубок на подложке [13, 15]. На рис. 2 видны участки спектра, близкие к горизонтальным (плато), которые соответствуют собственным частотам нанобъектов. Наиболее отчетливо плато проявляются в случае наносфер.

В связи с указанными исследованиями отметим также работы [16, 17], в которых рассматривались волновые свойства в телах, на поверхности которых прикреплены разного вида упругие структуры.

3. Учет поверхностных напряжений в наномеханике

Одним из объяснений аномальных, по сравнению с классическими, свойств наноматериалов является учет поверхностных напряжений [18–21]. Используемая модель поверхностной упругости ранее предложена в [22, 23], см. также [20, 24–26]. С физической точки зрения модель [22] представляет собой модель упругого тела с приклеенной на его поверхности упругой мембраной, а поверхностные напряжения являются усилиями, действующими в этой мембране. Двумерные уравнения состояния для поверхностных напряжений формулируются независимо от уравнений состояния в объеме. Уравнения [22] являются обобщением модели капиллярных эффектов в жидкости, построенной Т. Юнгом, П.-С. Лапласом, С.Д. Пуассоном и др. Другой способ введения поверхностных напряжений основан на интегрировании по нормали к рассматриваемой поверхности отклонения тензора напряжений от некоторой средней величины, приписываемой значению поля напряжений внутри материала, см., например, [27, 28]. Тем самым, поверхностные напряжения определяются тем же законом состояния, что и внутри материала, но проинтегрированным по толщине поверхностного слоя. Определение упругих параметров, отвечающих за свойства поверхностной упругости, проводилось методами молекулярной динамики [29, 30]. В связи с описанием поверхностных явлений следует также отметить градиентные модели сплошной среды, см., например, [31–34].

3.1. Спектр собственных колебаний для тел с поверхностными напряжениями

В [35–37] проведен анализ влияния поверхностных эффектов на поведение собственных частот для тела с

поверхностными напряжениями. Кроме того, для собственных частот установлены неулучшаемые оценки через собственные оценки для двух краевых задач для того же тела. Рассмотрим упругое ограниченное тело. На части его границы Γ действуют поверхностные напряжения. С математической точки зрения это соответствует смешанным краевым условиям, причем на Γ — это условия типа Венцеля, они зависят от вторых производных неизвестных функций. С физической точки зрения эта постановка задачи описывает деформации упругого тела, на части границы Γ которого приклеена упругая мембрана. Для этой задачи установлено, что собственные частоты образуют счетный спектр, каждой собственной частоте ω_k соответствует конечное число собственных мод. Собственные моды ортогональны в соответствующем энергетическом пространстве и образуют в нем базис. Доказана непрерывная зависимость собственных частот от упругих модулей. Увеличение значений поверхностных упругих модулей (аналогов упругих жесткостей мембраны) приводит к увеличению собственных частот. Рассмотрены также две другие краевые задачи для этого тела. В первой на границе Γ равны нулю перемещения, т.е. Γ зафиксирована, во второй Γ свободна. Соответствующие собственные частоты обозначим через ω_k^0 и ω_k^f . С использованием вариационного принципа Рэлея и модифицированного минимаксного принципа Куранта доказано, что для собственных частот выполняется неравенство

$$\omega_k^f \leq \omega_k \leq \omega_k^0, \quad k = 1, 2, \dots \quad (1)$$

Повышение собственных частот тела с поверхностными напряжениями, по сравнению с таким же телом без них, можно интерпретировать как повышение эффективной жесткости упругого тела с учетом поверхностной упругости. Этот вывод согласуется со сделанными ранее выводами об увеличении жесткости наноразмерных пластин и оболочек, а также нанопористых материалов при учете поверхностной упругости, а также с экспериментальными данными для наноразмерных пластинок и стержней. В качестве примера решена задача о радиальных колебаниях упругого шара, на примере которой показано, что оценки (1) нельзя улучшить. В [35, 37] обсуждается конечно-элементная постановка задачи с поверхностными напряжениями и ее отличия от классических задач, см. также [38, 39].

3.2. Эффективный модуль Юнга нанопористого стержня

Следуя [40–42], рассмотрим задачу о растяжении-сжатии линейно упругого прямолинейного стержня. Пусть стержень имеет круговое сечение радиуса R . Будем считать, что параллельно оси стержня проходит n пор цилиндрической формы с одинаковыми радиусами r . Площадь, занимаемую порами в сечении стержня обозначим через S , $S = \pi nr^2$. Также предположим, что

сечение стержня симметрично, так что при растяжении он не испытывает изгиба. На торцах стержня действует равномерно распределенная нагрузка, статически эквивалентная силам P .

Обозначим модуль Юнга материала стержня через E . При большом числе пор ($n \gg 1$) стержень можно рассматривать как однородный цилиндр, выполненный из трансверсально изотропного материала. Соответствующий эффективный продольный модуль Юнга будем обозначать индексом * сверху, так что

$$P = E^* F \epsilon,$$

где $F = \pi R^2$ — полная площадь сечения стержня, включая площадь пор; ϵ — продольная деформация.

В рамках классического сопротивления материала $E^* \equiv E_0^*$ описывается элементарной формулой

$$E^* = E(1 - \phi), \quad (2)$$

где $\phi = S/F$ — пористость. Нетрудно видеть, что E_0^* определяется только величиной модуля Юнга матрицы E и пористостью ϕ и не зависит от числа пор n , причем всегда $E_0^* < E$ при $\phi \neq 0$.

Для наноматериалов характерен размерный эффект, и при постоянной величине можно ожидать зависимость эффективного модуля Юнга также от радиуса пор или от их числа. Далее, считая площадь пор S заданной, рассмотрим, как зависит эффективный модуль Юнга от числа пор n , если учесть поверхностные эффекты.

Используя соотношения теории упругости при учете поверхностных напряжений [18, 22–24, 43, 44], рассмотрим задачу растяжения пористого стержня, если на границах пор действуют поверхностные напряжения:

$$E_S^* = E(1 - \phi) + E_S \frac{2\pi rn}{F} = E_0^* + E_S \frac{2\pi rn}{F},$$

где E_S — поверхностный аналог модуля Юнга, имеющий размерность Н/м. Поскольку величина S фиксирована, то радиус пор r связан с их числом n соотношением

$$r = \sqrt{\frac{S}{\pi n}}. \quad (3)$$

Следовательно, выполняется равенство

$$E_S^* = E(1 - \phi) + E_S \frac{2\sqrt{S}}{\sqrt{\pi F}} \sqrt{n} = E_0^* + E_S \frac{2\sqrt{S}}{\sqrt{\pi F}} \sqrt{n}. \quad (4)$$

Математически корректная постановка задачи теории упругости с поверхностными напряжениями требует, чтобы $E_S > 0$. Таким образом, E_S^* является возрастающей функцией n , причем $E_S^* > E_0^*$. Другими словами, чем меньше радиус пор, тем жестче становится стержень, обладающий поверхностными напряжениями.

Следует отметить, что поверхностные напряжения могут привести к тому, что для нанопористого стержня жесткость может оказаться даже больше, чем для сплошного с тем же радиусом R . Действительно, из (4) вытекает, что

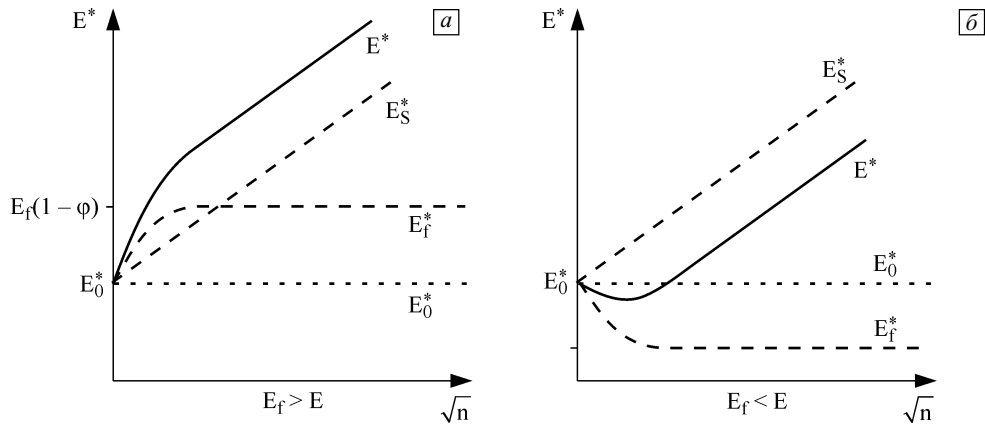


Рис. 3. Зависимости E^* , E_0^* , E_S^* и E_f^* от \sqrt{n} для $E_f > E$ (а) и $E_f < E$ (б)

$$E_S^* > E \text{ при } n > \frac{\pi}{4} S \left(\frac{E}{E_S} \right)^2.$$

Последнее условие может быть также преобразовано к виду $r < 2 E_S / E$. С учетом данных для поверхностных упругих постоянных [18, 43] неравенство $E_S^* > E$ вполне может быть выполнено для таких материалов, как, например, нанопористый анодированный алюминий.

Предположим теперь, что в окрестности каждой поры существует тонкий поверхностный слой толщины δ с модулем Юнга E_f . Примером такого слоя может служить пленка оксида, возникающая на поверхности. Воспользовавшись формулами теории волокнистых композитов, получим

$$E_f^* = E \left(1 - \frac{S + S_\delta}{F} \right) + E_f \frac{S_\delta}{F} = E_0^* + (E_f - E) \frac{S_\delta}{F}, \quad (5)$$

где $S_\delta = \pi l [(r + \delta)^2 - r^2]$ — суммарная площадь сечения поверхностных слоев, если они не пересекаются. Из (5) видно, что увеличение жесткости происходит, если модуль Юнга поверхностного слоя больше модуля матрицы ($E_f - E > 0$). В противном случае происходит уменьшение E_f^* . Выражая в (5) r через n при помощи (3) и считая, что $\delta \ll r$, получим

$$E_f^* = E_0^* + (E_f - E) \frac{2\delta\sqrt{\pi S}}{F} \sqrt{n}. \quad (6)$$

Следует отметить, что поскольку $S_\delta \leq F - S$, то в отличие от (5) формула (6) применима не при всех n . При возрастании n площадь поверхностных слоев возрастает как \sqrt{n} до тех пор, пока эти слои не станут пересекаться, при $n \rightarrow \infty$ все сечение окажется образованным материалом поверхностного слоя. Таким образом, $E_f^* \rightarrow E_f(1 - \varphi)$ при $n \rightarrow \infty$.

В [40] предложена модель, включающая в себя как поверхностные напряжения, действующие на границах пор, так и наличие тонкого поверхностного слоя, окружающего поры. В этом случае эффективный модуль Юнга стержня образуется слагаемыми, входящими в

формулы (2), (4) и (5):

$$E^* = E_0^* + E_S \frac{2\sqrt{S}}{\sqrt{\pi F}} \sqrt{n} + (E_f - E) \frac{S_\delta(n)}{F}. \quad (7)$$

Из (6), (7) следует, что E^* возрастает с ростом n , если выполняется соотношение

$$E_S \frac{2\sqrt{S}}{\sqrt{\pi F}} + (E_f - E) \frac{2\delta\sqrt{\pi S}}{F} > 0.$$

Если же это неравенство нарушается, что возможно, если поверхностный слой более мягкий по сравнению с матрицей, то зависимость E^* является немонотонной, вначале E^* убывает, но начиная с некоторого n опять возрастает. Качественные зависимости E^* от \sqrt{n} показаны на рис. 3 (сплошные линии). Пунктиром на рис. 3 также показаны зависимости для E_0^* , E_S^* и E_f^* .

3.3. Теория пластин и оболочек при учете поверхностных напряжений

Влияние поверхностных эффектов также оказывает существенным при рассмотрении тонкостенных элементов конструкций, в частности, нанопленок, нанолент и других подобных структур. В случае тела, один размер которого (толщина h) мал, называемого далее телом-оболочкой, краевую задачу с поверхностными напряжениями в случае малых деформаций можно привести к уравнениям равновесия теории пластин и оболочек в следующей форме [45–49]:

$$\begin{aligned} \nabla_s \cdot \mathbf{T}^* + \mathbf{q} &= 0, \quad \nabla_s \cdot \mathbf{M}^* + \mathbf{T}_x + \mathbf{m} = 0, \\ \mathbf{T}^* &= \mathbf{T} + \mathbf{T}_s, \quad \mathbf{M}^* = \mathbf{M} + \mathbf{M}_s, \\ \mathbf{T} &= \langle (\mathbf{A} - z\mathbf{B})^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma} \rangle, \quad \mathbf{M} = -\langle (\mathbf{A} - z\mathbf{B})^{-1} \cdot z\boldsymbol{\sigma} \times \mathbf{n} \rangle, \quad (8) \\ \langle (\dots) \rangle &= \int_{-h/2}^{h/2} (\dots) G dz, \\ \mathbf{T}_s &= \boldsymbol{\tau}_+ + \boldsymbol{\tau}_-, \quad \mathbf{M}_s = -\frac{h}{2} (\boldsymbol{\tau}_+ - \boldsymbol{\tau}_-) \times \mathbf{n}. \end{aligned}$$

В (8) введены эффективные тензоры усилий и моментов \mathbf{T}^* и \mathbf{M}^* ; \mathbf{T} и \mathbf{M} — тензоры усилий и моментов, используемые в линейной теории оболочек при учете

поперечного сдвига; \mathbf{T}_s и \mathbf{M}_s — тензоры усилий и моментов, порожденные наличием поверхностных напряжений $\boldsymbol{\tau}_+$ и $\boldsymbol{\tau}_-$, действующих на лицевых поверхностях оболочки; $\mathbf{A} = \mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}$, \mathbf{I} — единичный тензор; $\mathbf{B} = -\nabla_s \mathbf{n}$ — тензор кривизны; \mathbf{n} — вектор нормали; $G = \det(\mathbf{A} - z\mathbf{B})$; индексами \pm обозначены значения соответствующих величин при $z = \pm h/2$; \mathbf{q} и \mathbf{m} — распределенные по поверхности нагрузки и моменты.

Тензоры \mathbf{T}_s и \mathbf{M}_s оказываются равными [45–47]:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_s &= 2\tau_0 \mathbf{A} + G_1^s \boldsymbol{\varepsilon} + G_2^s \mathbf{A} \operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon}, \\ \mathbf{M}_s &= -[D_1^s \boldsymbol{\kappa} + D_2^s \mathbf{A} \operatorname{tr} \boldsymbol{\kappa}] \times \mathbf{n}, \\ G_1^s &= 4\mu_s, \quad G_2^s = 2\lambda_s, \\ D_1^s &= h^2 \mu_s, \quad D_2^s = h^2 \lambda_s / 2, \\ \boldsymbol{\varepsilon} &= \frac{1}{2} (\nabla_s \mathbf{w} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot (\nabla_s \mathbf{w})^T), \\ \boldsymbol{\kappa} &= \frac{1}{2} (\nabla_s \boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot (\nabla_s \boldsymbol{\theta})^T), \end{aligned} \quad (9)$$

где $\boldsymbol{\varepsilon}$, $\boldsymbol{\kappa}$ — двумерные тензоры деформации растяжения-сдвига и изгиба-кручения; \mathbf{w} и $\boldsymbol{\theta}$ — векторы перемещения и поворота базовой поверхности оболочки; μ_s и λ_s — поверхностные модули Ламе; τ_0 — остаточное поверхностное напряжение.

Тензоры усилий и моментов \mathbf{T} и \mathbf{M} имеют достаточно громоздкий вид для оболочек и здесь не приводятся, см., например, [45–48]. Более просто выглядят уравнения состояния в случае пластины, где $\mathbf{B} = \mathbf{0}$. Здесь \mathbf{T}^* , \mathbf{M}^* равны [49]

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^* &= 2\tau_0 \mathbf{A} + C_1 \boldsymbol{\varepsilon} + C_2 \mathbf{A} \operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon} + \Gamma \boldsymbol{\gamma} \otimes \mathbf{n}, \\ \mathbf{M}^* &= -[D_1 \boldsymbol{\kappa} + D_2 \mathbf{A} \operatorname{tr} \boldsymbol{\kappa}] \times \mathbf{n}, \\ C_1 &= C(1 - \nu) + 4\mu_s, \\ C_2 &= C\nu + 2\lambda_s, \\ D_1 &= D(1 - \nu) + h^2 \mu_s, \\ D_2 &= D\nu + h^2 \lambda_s / 2, \\ C &= \frac{Eh}{1 - \nu^2}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}, \end{aligned} \quad (10)$$

где $\boldsymbol{\gamma} = \nabla_s (\mathbf{w} \cdot \mathbf{n}) - \boldsymbol{\theta}$ — вектор поперечного сдвига; E и ν — модуль Юнга и коэффициент Пуассона. В (9) и (10) C_1, C_2, C_1^s, C_2^s — тангенциальные жесткости; D_1, D_2, D_1^s, D_2^s — жесткости пластинки на изгиб; Γ — жесткость на поперечный сдвиг. Эффективные тангенциальная и изгибная жесткости пластинки задаются соотношениями

$$\begin{aligned} C^* &\equiv C_1 + C_2 = C + 4\mu_s + 2\lambda_s, \\ D^* &\equiv D_1 + D_2 = D + h^2 \mu_s + h^2 \lambda_s / 2. \end{aligned}$$

На рис. 4 показана зависимость изгибной жесткости D^* от толщины h для наноразмерной пластинки из алюминия. Значения упругих постоянных взяты из [18, 44].

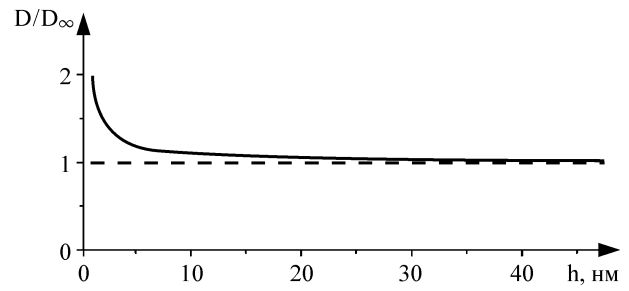


Рис. 4. Зависимость изгибной жесткости D^* от толщины пластинки h ($\mu = 34.7$ ГПа, $\nu = 0.3$, $\lambda_s = -3.48912$ Н/м, $\mu_s = 6.2178$ Н/м)

4. Заключение

Продемонстрированы широкие возможности методов механики сплошных сред и конструкций применительно к проблемам нанотехнологии. Анализ наноструктур возможен как при учете особенностей строения (как в случае упорядоченных массивов нанобъектов), так при модификации уравнений состояния на наноуровне, например с помощью учета поверхностных напряжений.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты №№ 12-01-00038 и 12-01-00815-а).

Литература

1. Лихачев В.А., Панин В.Е., Засимчук Е.Э. и др. Кооперативные деформационные процессы и локализации деформации. — Киев: Наукова думка, 1989. — 320 с.
2. Панин В.Е., Гриняев Ю.В., Данилов В.И. и др. Структурные уровни пластической деформации и разрушения / Под ред. В.Е. Панина. — Новосибирск: Наука, 1990. — 255 с.
3. Гуткин М.Ю., Овидько И.А. Физическая механика деформируемых наноструктур. В 2-х т. — СПб.: Янус, 2003. — Т. 1. — 194 с.; СПб.: Янус, 2005. — Т. 2. — 352 с.
4. *Nanotribology and Nanomechanics. An Introduction* / Ed. by B. Bhushan. — Berlin: Springer-Verlag, 2005. — 1148 p.
5. *Springer Handbook of Nanotechnology* / Ed. by B. Bhushan. — Berlin: Springer-Verlag, 2007. — 1916 p.
6. Marshall R.H., Sokolov L.A., Ning Y.N., Palmer A.W., Grattan K.T.V. Photoelectromotive force crystals for interferometric measurement of vibrational response // *Meas. Sci. Technol.* — 1996. — V. 7. — P. 1683–1686.
7. Гүлд С. Вариационные методы в задачах о собственных значениях. Введение в метод промежуточных задач Вайнштейна. — М.: Мир, 1970. — 328 с.
8. Еремеев В.А., Иванова Е.А., Морозов Н.Ф., Соловьев А.Н. Об определении собственных частот нанобъектов // *Докл. РАН.* — 2006. — Т. 406. — № 6. — С. 756–759.
9. Еремеев В.А., Иванова Е.А., Морозов Н.Ф., Соловьев А.Н. Об одном методе определения собственных частот упорядоченной системы нанобъектов // *ЖТФ.* — 2007. — Т. 77. — № 1. — С. 3–8.
10. Lorenz M., Lenzner J., Kaidashev E.M., Hochmuth H., Grundmann M. Cathodoluminescence of selected single ZnO nanowires on sapphire // *Annalen der Physik.* — 2004. — V. 2. — No. 1. — P. 39–42.
11. Kaidashev E.M., Lorenz M., Wenckstern H., Rahm A., Semmelback C., Ran K.-H., Benndorf G., Bundesmann C., Hochmuth H., Grundmann M. High electron mobility of epitaxial ZnO thin films on c-plane sapphire grown by multi-step pulsed laser deposition // *Appl. Phys. Lett.* — 2003. — V. 82. — P. 3901–3903.

12. Lorenz M., Hochmuth H., Schmidt-Grund R., Kaidashev E.M., Grundmann M. Advances of pulsed laser deposition of ZnO thin films // *Annalen der Physik*. – 2004. – V. 13. – № 1. – P. 59–61.
13. Еремеев В.А., Иванова Е.А., Морозов Н.Ф., Строчков С.Е. Собственные колебания нанотрубок // Докл. РАН. – 2007. – Т. 415. – № 5. – С. 605–610.
14. Еремеев В.А., Иванова Е.А., Морозов Н.Ф., Строчков С.Е. О спектре собственных колебаний набора микро- или наносфер, закрепленных на упругой подложке // Докл. РАН. – 2007. – Т. 417. – № 6. – С. 764–768.
15. Еремеев В.А., Иванова Е.А., Морозов Н.Ф., Строчков С.Е. Собственные колебания системы нанотрубок // ПМТФ. – 2008. – Т. 49. – № 2. – С. 160–171.
16. Boutin C., Roussillon P. Assessment of the urbanization effect on seismic response // *Bull. Seismol. Soc. Amer.* – 2004. – V. 94. – No 1. – P. 251–268.
17. Boutin C., Roussillon P. Wave propagation in presence of oscillators on the free surface // *Int. J. Eng. Sci.* – 2006. – V. 44. – No. 3–4. – P. 180–204.
18. Duan H.L., Wang J., Karihaloo B.L. Theory of elasticity at the nanoscale // *Adv. Appl. Mech.* – 2008. – V. 42. – P. 1–68.
19. Wang J., Huang Z., Duan H., Yu S., Feng X., Wang G., Zhang W., Wang T. Surface stress effect in mechanics of nanostructured materials // *Acta Mechanica Solida Sinica*. – 2011. – V. 24. – P. 52–82.
20. Javili A.A., Mc Bride A.A., Steinmann P. Thermomechanics of solids with lower-dimensional energetics: On the importance of surface, interface, and curve structures at the nanoscale. A unifying review // *Appl. Mech. Rev.* – 2013. – V. 65. – No. 1. – P. 010802–010802-31.
21. Гольдштейн Р.В., Городец В.А., Устинов К.Б. Влияние поверхностных остаточных напряжений и поверхностной упругости на деформирование шарообразных включений нанометровых размеров в упругой матрице // *Физ. мезомех.* – 2010. – Т. 13. – № 5. – С. 127–138.
22. Gurtin M.E., Murdoch A.I. A continuum theory of elastic material surfaces // *Arch. Rat. Mech. Analysis*. – 1975. – V. 57. – No. 4. – P. 291–323.
23. Murdoch A.I. A thermodynamical theory of elastic material interfaces // *Q. J. Mech. Appl. Math.* – 1976. – V. 29. – No. 3. – P. 245–274.
24. Подстригач Я.С., Повстенко Ю.З. Введение в механику поверхностных явлений в деформируемых твердых телах. – Киев: Наукова думка, 1985. – 200 с.
25. IUTAM Symposium on Surface Effects in the Mechanics of Nanomaterials and Heterostructures. IUTAM Bookseries (closed) / Ed. by A. Cocks, J. Wang. – Netherlands: Springer, 2013. – V. 31. – 310 p.
26. Surface Effects in Solid Mechanics: Models, Simulations and Applications. Advanced Structured Materials / Ed. by H. Altenbach, N.F. Morozov. – Berlin, Heidelberg: Springer, 2013. – V. 30. – 194 p.
27. Ibach H. The role of surface stress in reconstruction, epitaxial growth and stabilization of mesoscopic structures // *Surf. Sci. Rep.* – 1997. – V. 29. – No. 5–6. – P. 195–263.
28. Ustinov K.B., Goldstein R.V., Gorodtsov V.A. On the Modeling of Surface and Interface Elastic Effects in Case of Eigenstrains // *Advanced Structured Materials: Surface Effects in Solid Mechanics* / Ed. by H. Altenbach, N.F. Morozov. – Berlin: Springer, 2013. – V. 30. – P. 167–180.
29. Shenoy V.B., Miller R.E. Size-dependent elastic properties of nanosized structural elements // *Nanotechnology*. – 2000. – V. 11. – No. 3. – P. 139–147.
30. Shenoy V.B. Atomistic calculations of elastic properties of metallic fcc crystal surfaces // *Phys. Rev. B*. – 2005. – V. 71. – No. 9. – P. 094104-11.
31. Mindlin R.D. Second gradient of strain and surface-tension in linear elasticity // *Int. J. Solids Struct.* – 1965. – V. 1. – No. 4. – P. 417–438.
32. dell'Isola F., Seppacher P. The relationship between edge contact forces, double forces and interstitial working allowed by the principle of virtual power // *C. R. Acad. Sci. II*. – 1995. – V. 321. – No. 8. – P. 303–308.
33. dell'Isola F., Seppacher P. Edge contact forces and quasi-balanced power // *Meccanica*. – 1997. – V. 32. – No. 1. – P. 33–52.
34. Rosi G., Giorgio I., Eremeyev V.A. Propagation of linear compression waves through plane interfacial layers and mass adsorption in second gradient fluids // *Z. Angew. Math. Mech.* – 2013. – 10.1002/zamm.201200285.
35. Altenbach H., Eremeyev V.A., Lebedev L.P. On the existence of solution in the linear elasticity with surface stress // *Z. Angew. Math. Mech.* – 2010. – V. 90. – No. 3. – P. 231–240.
36. Altenbach H., Eremeyev V.A., Lebedev L.P. On the spectrum and stiffness of an elastic body with surface stresses // *Z. Angew. Math. Mech.* – 2011. – V. 91. – No. 9. – P. 699–710.
37. Eremeyev V.A., Lebedev L.P. Existence of weak solutions in elasticity // *Math. Mech. Solids*. – 2013. – V. 18. – No. 2. – P. 204–217.
38. Javili A., Steinmann P. A finite element framework for continua with boundary energies. Part I: The two-dimensional case // *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.* – 2009. – V. 198. – P. 219–2208.
39. Javili A., Steinmann P. A finite element framework for continua with boundary energies. Part II: The three-dimensional case // *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.* – 2010. – V. 199. – P. 755–765.
40. Еремеев В.А., Морозов Н.Ф. Об эффективной жесткости нанопористого стержня // Докл. РАН. – 2010. – Т. 432. – № 4. – С. 473–476.
41. Altenbach H., Eremeyev V.A., Morozov N.F. Mechanical properties of materials considering surface effects // IUTAM Bookseries: V. 31. IUTAM Symposium on Surface Effects in the Mechanics of Nanomaterials and Heterostructures / Ed. by A. Cocks, J. Wang. – Netherlands: Springer, 2013. – P. 105–115.
42. Altenbach H., Eremeyev V.A., Morozov N.F. On the influence of residual surface stresses on the properties of structures at the nanoscale // *Advanced Structured Materials: V. 30. Surface Effects in Solid Mechanics* / Ed. by H. Altenbach, N.F. Morozov. – Berlin: Springer, 2013. – P. 21–32.
43. Wang J., Duan H.L., Huang Z.P., Karihaloo B.L. A scaling law for properties of nano-structured materials // *Proc. Roy. Soc. London A*. – 2006. – V. 462. – No. 2069. – P. 1355–1363.
44. Duan H.L., Wang J., Karihaloo B.L., Huang Z.P. Nanoporous materials can be made stiffer than non-porous counterparts by surface modification // *Acta Mater.* – 2006. – V. 54. – P. 2983–2990.
45. Альтенбах Х., Еремеев В.А., Морозов Н.Ф. Линейная теория оболочек при учете поверхностных напряжений // Докл. РАН. – 2009. – Т. 429. – № 4. – С. 472–476.
46. Альтенбах Х., Еремеев В.А., Морозов Н.Ф. Об уравнениях линейной теории оболочек при учете поверхностных напряжений // *Изв. РАН. МТТ*. – 2010. – № 3. – С. 30–44.
47. Altenbach H., Eremeyev V.A. On the shell theory on the nanoscale with surface stresses // *Int. J. Eng. Sci.* – 2011. – V. 49. – No. 12. – P. 1294–1301.
48. Altenbach H., Eremeyev V.A., Morozov N.F. Surface viscoelasticity and effective properties of thin-walled structures at the nanoscale // *Int. J. Eng. Sci.* – 2012. – V. 59. – P. 83–89.
49. Еремеев В.А., Альтенбах Х., Морозов Н.Ф. О влиянии поверхностного натяжения на эффективную жесткость наноразмерных пластин // Докл. РАН. – 2009. – Т. 424. – № 5. – С. 618–620.

Поступила в редакцию
19.07.2013 г.

Сведения об авторах

Еремеев Виктор Анатольевич, д.ф.-м.н., проф. ЮФУ, eremeyev.victor@gmail.com
Иванова Елена Александровна, д.ф.-м.н., проф. СПбГПУ, elenaivanova239@post.ru
Морозов Никита Федорович, д.ф.-м.н., акад., зав. каф. СПбГУ, morozov@NM1016.spb.edu