

Материальный тензор деформации¹

Введение

Традиционная механика сплошных сред включает в себя: а) теорию напряжений и вывод уравнений движения; б) геометрическую теорию деформаций и введение тензоров деформации; с) определяющие уравнения. Такой подход был введен Л. Эйлером (для одномерной среды) и О. Коши (для трехмерного континуума) с целью описания механического поведения упругих материалов. Часто предполагается, что подход Эйлера–Коши может быть использован и для неупругих материалов; разработано много теорий такого рода. Однако ни одна из них не в состоянии описать совокупность имеющихся экспериментальных результатов. По этой причине многие экспериментаторы полагают, что подход Эйлера–Коши не может быть использован в механике неупругих материалов. Далее на простой дискретной модели проиллюстрированы проблемы, возникающие при больших неупругих деформациях и предложен метод введения материального тензора деформации, предназначенного для решения этих проблем.

G.1. Простейшая дискретная модель неупругого деформирования

Одна из основных проблем в использовании традиционных тензоров деформации состоит в том, что при неупругом деформировании происходит

¹ Приложение написано Е. А. Ивановой и А. М. Кривцовым с использованием оригинального текста П. А. Жилина, который с небольшими поясняющими добавлениями содержится во введении и разделах G.2, G.3 (перевод с английского). Материал приложения основан на докладе: P. A. Zhilin, A. M. Krivtsov. Point mass simulation of inelastic extension process, подготовленном для конгресса ICIAM 95 (the Third International Congress on Industrial and Applied Mathematics, Hamburg, Germany, July 3–7, 1995). (*Примеч. ред.*)

существенная перестройка внутренней структуры материала. В частности, понятие материальной линии может терять смысл, в силу того что частицы вещества могут встраиваться между частицами, бывшими ранее ближайшими соседями. Для иллюстрации этого факта рассмотрим деформирование простейшей дискретной системы, состоящей из трех взаимодействующих частиц (материальных точек) (рис. G.1).

Взаимодействие между частицами опишем потенциалом Морзе

$$\Pi(r) = D \left(e^{-2\alpha(r-a)} - 2e^{-\alpha(r-a)} \right), \quad (G.1)$$

где r — расстояние между частицами; D — энергия связи; a — длина связи; α — параметр взаимодействия. Потенциал Морзе — один из простейших потенциалов, применяющихся для качественного описания межатомного взаимодействия. Сила взаимодействия $f(r)$, соответствующая потенциалу Морзе, может быть вычислена как

$$f(r) = -\Pi'(r) = 2\alpha D \left(e^{-2\alpha(r-a)} - e^{-\alpha(r-a)} \right). \quad (G.2)$$

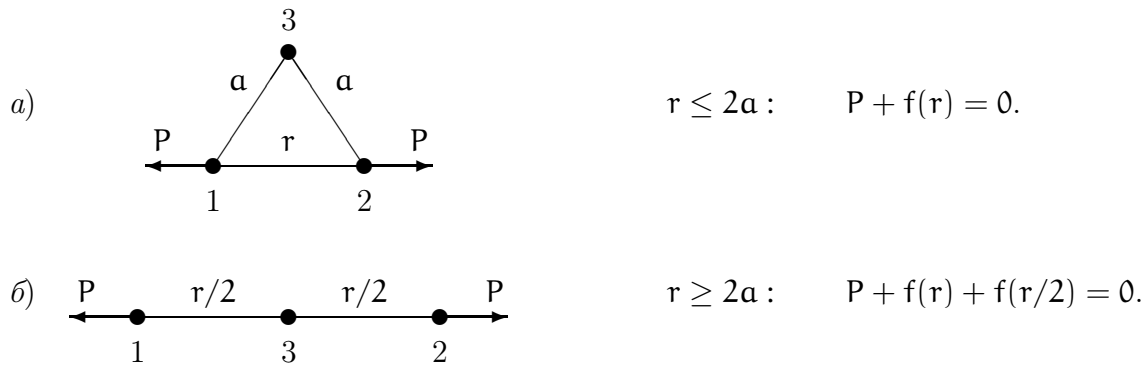


Рис. G.1. Растяжение системы из трех взаимодействующих частиц

При $r < a$ величина $f(r)$ положительна, что соответствует силе отталкивания, при $r > a$ величина $f(r)$ отрицательна, что соответствует силе притяжения, при $r = 0$ сила обращается в ноль. Введем прочность связи f_* — максимальное значение модуля притягивающей силы

$$f_* = \alpha D/2. \quad (G.3)$$

Для трех частиц при отсутствии внешней нагрузки существует единственная устойчивая равновесная конфигурация — в виде равностороннего треугольника со стороной a . Зададим деформирование системы, растягивая квазистатически треугольник вдоль одной из его сторон (см. рис. G.1, а). На

рис. G.1 изображены соответствующие растягивающие силы, модуль их обозначен символом P . Пока длина r растягиваемой стороны не превышает $2a$, система представляет собой равнобедренный треугольник, причем длина боковых сторон остается неизменной и равной a . Фактически, при этом частица 3 не участвует во взаимодействии — силы между ней и частицами основания равны нулю, а сила P определяется исключительно взаимодействием между частицами 1 и 2. Ситуация кардинально меняется, когда r превышает $2a$ (см. рис. G.1, б). В этом случае частица 3 “встраивается” между частицами 1 и 2, а взаимодействие в системе усложняется — теперь уже расстояние между частицей 3 и частицами 1 и 2 превышает равновесное, а следовательно, между ними возникает сила притяжения, вносящая дополнительный вклад в силу P . Соответствующие уравнения равновесия приведены на рис. G.1. Полученная из этих уравнений диаграмма растяжения, построенная при $\alpha a = 3$, представлена на рис. G.2.

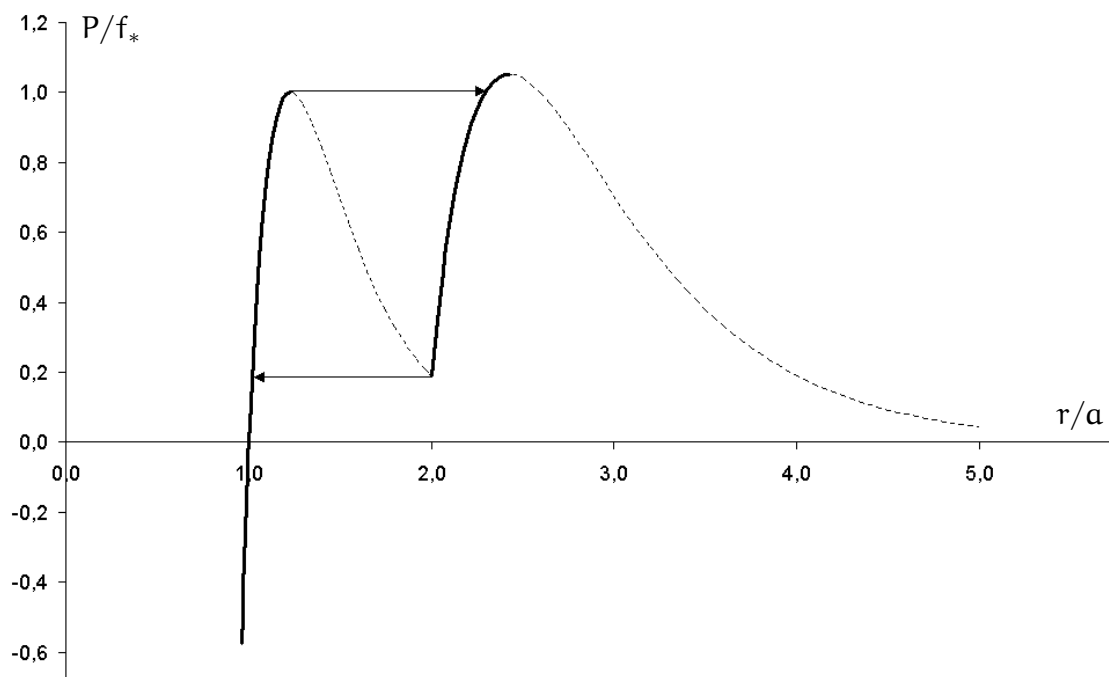


Рис. G.2. Диаграмма растяжения системы из трех взаимодействующих частиц

Найденная зависимость $P(r)$ имеет три экстремума. При мягком нагружении² ниспадающие участки диаграммы неустойчивы (пунктирная линия), а в точках экстремумов возможно возникновение динамических переходных режимов, обозначенных стрелками. Таким образом, уже на простейшей дискретной системе с чисто потенциальным взаимодействием можно наблюдать

² В случае, когда задается нагружающая сила, а не деформация.

аналоги таких эффектов, характерных для макроскопических неупругих систем, как текучесть, остаточная деформация, петля гистерезиса. Исследования более сложных дискретных систем [175], проведенные как аналитически, так и численно, показывают аналогичные результаты, приближающиеся, по мере увеличения числа степеней свободы, к результатам, известным для натуральных макроскопических экспериментов с реальными материалами.

Главный вывод, который можно сделать из данного рассмотрения, состоит в том, что из-за перестройки внутренней структуры такие понятия, как материальный отрезок, могут терять смысл, а вместе с ними теряет смысл и геометрическое определение деформации при сильном неупругом деформировании.

G.2. Континуальное описание

Из предыдущего раздела следует, что при сильном неупругом деформировании материалов тензоры деформации, определенные из чисто геометрических соображений, вообще говоря, не подходят для использования в теории определяющих уравнений. Необходим поиск другого подхода. Опишем идею возможного способа введения тензора деформации неупругого континуума. Запишем уравнение баланса энергии³

$$\rho \dot{\mathcal{U}} = \boldsymbol{\tau} \cdot \cdot \mathbf{D} + \rho \mathbf{q} + \overset{\circ}{\nabla} \cdot \mathbf{h}, \quad \mathbf{D} \equiv \frac{1}{2} (\overset{\circ}{\nabla} \mathbf{V} + \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{V}^T), \quad (\text{G.4})$$

где точкой обозначена полная производная по времени; $\overset{\circ}{\nabla}$ — набла-оператор в актуальной конфигурации; ρ — плотность материала в актуальной конфигурации; \mathcal{U} — массовая плотность внутренней энергии; $\boldsymbol{\tau}$ — тензор напряжений Коши; \mathbf{D} — тензор скоростей деформации; \mathbf{q} — скорость подвода тепла, приходящаяся на единицу массы; \mathbf{h} — вектор теплового потока; \mathbf{V} — вектор скорости. Первое слагаемое в правой части (G.4) называют мощностью напряжений. Примем следующее определение.

Определение. Величина \mathcal{H} , на изменении которой совершает работу тензор напряжений Коши $\boldsymbol{\tau}$, называется материальным тензором деформации.

Из определения следует

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \cdot \mathbf{D} = \boldsymbol{\tau} \cdot \cdot \dot{\mathcal{H}} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\tau} \cdot \cdot (\dot{\mathcal{H}} - \mathbf{D}) = 0, \quad \forall \boldsymbol{\tau}: \boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}^T. \quad (\text{G.5})$$

³ В данном приложении используется материальное описание. (Примеч. ред.)

Симметричный тензор \mathcal{H} должен быть объективным, т. е. при наложении жестких движений мы должны получить

$$\mathcal{H}_* = \mathbf{Q} \cdot \mathcal{H} \cdot \mathbf{Q}^\top, \quad (\text{G.6})$$

где \mathcal{H}_* — преобразованный тензор \mathcal{H} , полученный после наложения на систему жесткого поворота \mathbf{Q} : $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^\top = \mathbf{E}$. Условию объективности, естественно, удовлетворяют также тензоры $\boldsymbol{\tau}$ и \mathbf{D} :

$$\boldsymbol{\tau}_* = \mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{Q}^\top, \quad \mathbf{D}_* = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{Q}^\top \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\tau}_* \cdot \cdot \mathbf{D}_* = \boldsymbol{\tau} \cdot \cdot \mathbf{D}. \quad (\text{G.7})$$

Примем, что соотношение (G.5) остается в силе при наложении жестких движений

$$\boldsymbol{\tau}_* \cdot \cdot \mathbf{D}_* = \boldsymbol{\tau}_* \cdot \cdot \dot{\mathcal{H}}_*. \quad (\text{G.8})$$

Тогда согласно (G.7) (G.8) получаем тождество

$$\boldsymbol{\tau}_* \cdot \cdot \dot{\mathcal{H}}_* = \boldsymbol{\tau} \cdot \cdot \dot{\mathcal{H}}. \quad (\text{G.9})$$

Подстановка выражений (G.6), (G.7) для тензоров \mathcal{H} и $\boldsymbol{\tau}$ в тождество (G.9) после несложных преобразований⁴ дает

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \mathcal{H} = \mathcal{H} \cdot \boldsymbol{\tau}, \quad \boldsymbol{\tau}_* \cdot \mathcal{H}_* = \mathcal{H}_* \cdot \boldsymbol{\tau}_*. \quad (\text{G.10})$$

Из (G.10) следует, что собственные векторы тензоров $\boldsymbol{\tau}$ и \mathcal{H} совпадают. Таким образом, для любого материала тензор $\boldsymbol{\tau}$ является изотропной функцией тензора \mathcal{H} . Это означает, что тензор \mathcal{H} должен зависеть от свойств материала и он не может быть найден из чисто геометрического рассмотрения. Это понятно хотя бы из того, что равенство (G.10) должно выполняться для анизотропного материала⁵.

Используя (G.5) введем симметричный тензор \mathbf{L} , такой что

$$\dot{\mathcal{H}} + \mathbf{L} = \mathbf{D}, \quad (\boldsymbol{\tau} \cdot \cdot \mathbf{L} = 0, \quad \forall \boldsymbol{\tau}: \boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}^\top). \quad (\text{G.11})$$

⁴ Используется: $\dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{Q}^\top$ — антисимметричный тензор, тождество $\mathbf{A} \cdot \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \cdot \cdot \mathbf{C}$ и утверждение $\mathbf{A} \cdot \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \forall \mathbf{A}: \mathbf{A}^\top = -\mathbf{A} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{B}^\top = \mathbf{B}$.

⁵ Справедливость этого утверждения становится очевидной при переходе к линейной теории. Действительно, в линейной теории соотношение упругости имеет вид $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{C} \cdot \cdot \boldsymbol{\varepsilon}$, где \mathbf{C} — тензор жесткости; $\boldsymbol{\varepsilon}$ — линейный тензор деформации, который определяется путем чисто геометрических построений. В случае анизотропного материала главные оси тензоров $\boldsymbol{\varepsilon}$ и $\mathbf{C} \cdot \cdot \boldsymbol{\varepsilon}$ имеют разные направления. Допустим, ставится задача ввести такой тензор деформации \mathcal{H} , который был бы соосен тензору $\mathbf{C} \cdot \cdot \mathcal{H}$. Очевидно, что этот тензор деформации должен быть устроен так, чтобы в нем, хотя бы частично, учитывалась анизотропия материала.

Тензор \mathbf{L} заранее неизвестен и зависит от свойств материала. Представим тензор \mathbf{L} в виде

$$\mathbf{L} = \mathbf{w} \cdot \mathcal{H} - \mathcal{H} \cdot \mathbf{w}, \quad \mathbf{w}^\top = -\mathbf{w}. \quad (\text{G.12})$$

Используя объективность тензоров \mathcal{H} , \mathbf{D} и равенство (G.11), т. е. учитывая, что

$$\dot{\mathcal{H}}_* + \mathbf{L}_* = \mathbf{D}_*, \quad \mathbf{L}_* = \mathbf{w}_* \cdot \mathcal{H}_* - \mathcal{H}_* \cdot \mathbf{w}_*, \quad (\text{G.13})$$

можно показать, что при наложении жестких движений тензор \mathbf{w} должен удовлетворять соотношению

$$\mathbf{w}_* = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{w} \cdot \mathbf{Q}^\top - \dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{Q}^\top. \quad (\text{G.14})$$

Подстановка представления (G.12) для тензора \mathbf{L} в равенство (G.11) дает дифференциальное уравнение для материального тензора деформации \mathcal{H}

$$\dot{\mathcal{H}} + \mathbf{w} \cdot \mathcal{H} - \mathcal{H} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{D}. \quad (\text{G.15})$$

Тензоры \mathcal{H} и \mathbf{w} в уравнении (G.15) неизвестны. Чтобы их найти, необходимо использовать дополнительные (определяющие) уравнения.

G.3. Материальный тензор деформации в случае упругого изотропного материала

Найдем след тензора \mathcal{H} . Для этого вычислим след уравнения (G.15). С учетом тождества $\mathbf{w} \cdot \cdot \mathcal{H} = 0$ получим

$$(\text{tr } \mathcal{H})^\cdot = \text{tr } \mathbf{D} = \overset{\circ}{\nabla} \cdot \mathbf{V} = -\dot{\rho}/\rho. \quad (\text{G.16})$$

Здесь использовано уравнение неразрывности. Интегрирование соотношения (G.16) дает

$$\text{tr } \mathcal{H} = \ln(\rho_0/\rho) = \ln(1 + \Delta), \quad (\text{G.17})$$

где ρ_0 — плотность недеформированного материала; Δ — кубическая дилатация. Равенство (G.17) справедливо для всех материалов. Однако девиатор тензора \mathcal{H} существенно зависит от свойств материала.

Пренебрежем тепловыми эффектами. Тогда уравнение баланса энергии (G.4) примет вид

$$\rho \dot{\mathcal{U}} = \boldsymbol{\tau} \cdot \cdot \dot{\mathcal{H}}. \quad (\text{G.18})$$

Рассмотрим упругий материал, т. е. материал, у которого внутренняя энергия и тензор напряжений зависят от деформаций и не зависят от скоростей деформаций. Согласно уравнению (G.18) внутренняя энергия упругого материала имеет вид $\mathcal{U} = \mathcal{U}(\mathcal{H})$. Вычислив производную по времени от внутренней энергии и приняв во внимание (G.18), получим

$$\rho \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathcal{H}} \cdot \dot{\mathcal{H}} = \boldsymbol{\tau} \cdot \dot{\mathcal{H}} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\tau} = \rho \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathcal{H}}. \quad (\text{G.19})$$

Покажем, что для изотропного материала соотношение (G.19) выполняется в том случае, когда тензор \mathcal{H} является логарифмической мерой деформации Генки (логарифм правого ядра тензора дисторсии). Действительно⁶, в случае изотропного материала согласно [26]

$$\boldsymbol{\tau} = 2 \frac{\rho}{\rho_0} \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \mathbf{F}}, \quad \mathbf{F} = (\overset{\circ}{\nabla} \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} \overset{\circ}{\nabla})^{-1}, \quad (\text{G.20})$$

где \mathbf{r} — отсчетный вектор положения; \mathbf{F} — мера деформации Фингера (обратная мере деформации Альманзи); $\mathcal{W} = \rho_0 \mathcal{U}$ — удельная внутренняя энергия, отнесенная к единице объема отсчетной конфигурации. Для тензора Генки \mathbf{H} имеем [26]

$$\mathbf{H} = \ln \mathcal{V}, \quad \mathbf{F} = \mathcal{V}^2. \quad (\text{G.21})$$

Здесь \mathcal{V} — правая мера искажений (правое ядро тензора дисторсии). Подставив соотношения (G.21) в выражение (G.20) для тензора напряжений Коши, получим окончательно

$$\boldsymbol{\tau} = \rho \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathbf{H}} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{H} = \mathcal{H}. \quad (\text{G.22})$$

Итак, для упругого изотропного материала тензор напряжений Коши совершает работу на логарифмической мере деформации Генки⁷. Следовательно, согласно введенному ранее определению, мера Генки является материальным тензором деформации для упругого изотропного материала. Известно, что мера Генки часто признается экспериментаторами как наиболее удобный способ описания больших деформаций.

Можно показать⁸, что тензор \mathbf{w} находится однозначно для упругих изо-

⁶ Данное доказательство предложено А. М. Кривцовым, оригинальное доказательство П. А. Жилина не сохранилось. (Примеч. ред.)

⁷ Этот результат был получен П. А. Жилиным и рассказывался его ученикам до 1995 г., однако опубликован в официальной печати он так и не был. В 1995 г. короткая статья с этим результатом была направлена в труды конгресса ICIAM 95, однако была отклонена. В 1997 г. в журнале Acta Mechanica была опубликована статья других авторов [176], в которой был получен тот же результат и представлен как полученный впервые. (Примеч. ред.)

⁸ Доказательство П. А. Жилина этих утверждений не сохранилось. (Примеч. ред.)

тропных материалов; тензоры \mathcal{H} и \mathbf{w} могут быть также определены для материалов с мгновенно затухающей памятью⁹, которые удобны для описания больших пластических деформаций.

Г.4. Обсуждение и заключительные замечания

На этом заканчивается оригинальный текст П. А. Жилина, на основании которого готовилось данное приложение. В частных беседах П. А. Жилин указывал, что данный подход может положить основу принципиально новой теории определяющих уравнений. В частности, он указывал, что данный подход позволяет получить тензор деформации, который при периодическом знакопеременном закручивании стержня дает на каждом периоде прирост деформации, что хорошо подходит для описания усталостных явлений.

Позже была опубликована работа [176], в значительной мере коррелирующая с полученными П. А. Жилиным результатами. В этой работе проанализировано использование логарифмической меры деформации Генки \mathbf{H} и доказано, что она является энергетически сопряженной для тензора напряжений Коши (результат, полученный П. А. Жилиным ранее, но оставшийся неопубликованным). Кроме того, в [176] доказано, что \mathbf{H} — единственная мера (тензор) деформации, объективная коротационная производная которой дает тензор скоростей деформации \mathbf{D} . Напомним, что коротационная производная [58, 177] произвольного тензора \mathbf{A} определяется выражением¹⁰

$$\mathbf{A}' = \dot{\mathbf{A}} + \mathbf{\Phi} \cdot \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{\Phi}, \quad (\text{G.23})$$

где $\mathbf{\Phi}$ — тензор спина, характеризующий некоторые вращения, связанные с описанием процесса деформирования. Геометрический смысл коротационной производной состоит в том, что она игнорирует изменения тензора, связанные с вращением $\mathbf{\Phi}$. В литературе используется большое количество коротационных производных, различающихся выбором тензора $\mathbf{\Phi}$, в частности, если $\mathbf{\Phi} = (\overset{\circ}{\nabla} \mathbf{V})^A$ (тензор вихря), то (G.23) дает производную Яуманна [26, 178]. Так вот, на протяжении многих лет оставался открытым вопрос, является ли тензор скоростей деформации \mathbf{D} объективной коротационной производной

⁹ Материал, для которого тензор напряжений является функцией производной по времени от тензора деформации (материал дифференциального типа). (*Примеч. ред.*)

¹⁰ Часто используется альтернативная запись, отличающаяся знаком тензора $\mathbf{\Phi}$. Связано это с тем, что, как правило, определение градиента вектора в отечественной и западной литературе отличается транспонированием, и, как следствие, отличается знак тензора спина. (*Примеч. ред.*)

какого-либо тензора деформации, и в работе [176] впервые было показано, что таким тензором может быть только логарифмическая мера \mathbf{H} . Кроме того, в [176] был найден соответствующий тензор спина Φ^{\log} , названный авторами логарифмическим, для которого выполняется¹¹

$$\mathbf{H}'^{\log} = \dot{\mathbf{H}} + \Phi^{\log} \cdot \mathbf{H} - \mathbf{H} \cdot \Phi^{\log} = \mathbf{D}, \quad (\text{G.24})$$

где $()'^{\log}$ — логарифмическая производная, также введенная в [176]. Если теперь рассмотреть полученное П. А. Жилиным уравнение для материального тензора деформации (G.15) применительно к $\mathcal{H} = \mathbf{H}$, то из него сразу следует, что используемый в нем антисимметричный тензор есть логарифмический тензор спина: $\mathbf{w} = \Phi^{\log}$.

Рассмотрим еще раз уравнение (G.15). Задачу его решения можно теперь переформулировать так: найти такой объективный тензор \mathcal{H} , коротационная производная которого равна тензору скоростей деформации. Фактически, в работе [176] эта задача решена — доказано, что тензором \mathcal{H} является логарифмическая мера Генки \mathbf{H} , и найден тензор $\mathbf{w} = \Phi^{\log}$ как некоторая сложная функция¹² тензоров \mathcal{H} и \mathbf{D} [176, 177].

Таким образом, в [176] для тензоров \mathcal{H} и \mathbf{w} , определяемых из уравнения (G.15), получены чисто геометрические выражения. Эти результаты оказались очень плодотворным как в нелинейной теории упругости, так и в теории упругопластических сред. В дальнейшем было показано [179], что использование логарифмического тензора деформации и связанного с ним посредством уравнения (G.15) логарифмического тензора спина позволяет корректно сформулировать инкрементальные соотношения упругости гипопругих сред, широко использующиеся в численных методах. Именно использование указанных тензоров делает уравнения интегрируемыми, позволяя перейти от инкрементальной записи определяющих уравнений к явной, тем самым совмещая понятия гипопругого и гиперупругого материалов. За границей упругости этот подход позволил построить теорию упругопластических материалов, в которой не требуется разделения тензора деформации на упругую и пластическую составляющие [180]. Наряду с указанными успехами, сохра-

¹¹ Данная запись логарифмической производной отличается от записи, используемой в [176], знаком Φ^{\log} (см. предыдущую сноску). (*Примеч. ред.*)

¹² Для некоторых частных случаев поля деформаций (например, когда все тензоры \mathbf{H} соосны) тензор Φ^{\log} вырождается в тензор вихря $(\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{V})^A$, а логарифмическая производная — в производную Яуманна [58]. Однако в общем случае выражение для Φ^{\log} значительно сложнее, что связано с наличием двух независимых поворотов — поворота среды и поворота главных осей деформации.

нилось множество нерешенных проблем в описании неупругого деформирования материалов.

Идеи работы [176] отчасти совпадают с идеями П. А. Жилина, но именно отчасти, а не полностью. Суть идеи П. А. Жилина состоит в том, чтобы ввести такой тензор деформации, чтобы: 1) на нем совершал работу тензор напряжений Коши; 2) он был материально объективным; 3) он не обязательно был бы деформацией в классическом смысле. Последнее означает, что этот тензор не обязательно должен быть изотропной функцией тензора дисторсии, а может зависеть от свойств пространственной симметрии материала. В случае упругого изотропного материала, согласно [176], данная задача решается путем чисто геометрических построений. В [176] утверждается, что найдено единственное решение уравнения (G.15), однако решение этого уравнения искалось на множестве классических тензоров деформации. Для тензоров деформации в понимании П. А. Жилина уравнение (G.15), видимо, имеет еще и другие решения. Поясним сказанное на примере упругого анизотропного материала. Тензоры $\mathcal{H} = \mathbf{H}$, $\mathbf{w} = \mathbf{\Phi}^{\log}$ удовлетворяют уравнению (G.15) независимо от того, какой материал рассматривается — изотропный или анизотропный. Однако в случае анизотропного материала данное решение противоречит условию соосности тензора напряжений и тензора деформации (G.10), которое является следствием условий материальной объективности. Чтобы условие (G.10) выполнялось, тензор \mathcal{H} должен иметь структуру, зависящую от свойств симметрии материала. Таким образом, идея П. А. Жилина относительно введения материального тензора деформации, определяемого с использованием уравнения баланса энергии и *свойств моделируемого материала*, еще ждет своего развития.

В более поздних работах по неупругим средам П. А. Жилин отказался от материального описания и использовал только пространственное. Результаты, полученные для материального описания, непосредственно не переносятся на случай пространственного; с математической точки зрения, при переходе к пространственному описанию задача становится более сложной, поскольку в уравнении (G.15) полная производная по времени заменяется на материальную. Однако постановка задачи о нахождении тензора деформации, обладающего указанными ранее свойствами, возможна и при пространственном описании. В заключении к третьей главе данной книги, посвященной неупругим средам, П. А. Жилин пишет о том, что проблема конкретного задания “девиаторной” части энергии осталась нерешенной. Возможно, что одним из путей решения этой проблемы является развитие изложенных в данном приложении идей применительно к пространственному описанию.