

УДК 539.3,539.4

## ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОМУ ОПРЕДЕЛЕНИЮ ИЗГИБНОЙ ЖЕСТКОСТИ НАНООБОЛОЧЕК

© 2005 г. Е. А. Иванова, академик Н. Ф. Морозов

Поступило 15.10.2004 г.

В настоящее время весьма актуальной является задача экспериментального определения упругих модулей объектов наноразмерного масштабного уровня. Определение упругих модулей тонких макроскопических оболочек, как правило, основано на экспериментах с пластинами. Известно, что нанобъекты при некоторых способах их выращивания получают только в виде оболочек. Поэтому возникает необходимость разработки методики определения изгибной жесткости нанобъектов на базе экспериментов с оболочками. Особую трудность представляет экспериментальное определение изгибной жесткости наноразмерных оболочек. Это связано с тем, что при произвольном деформировании таких распространенных нанобъектов, как нанотрубки и фуллерены, материал работает и на изгиб, и на растяжение одновременно. Поэтому все величины, которые могут быть непосредственно измерены (например, собственные частоты), будут зависеть сложным образом и от изгибной жесткости, и от жесткости на растяжение. В последние годы наряду с нанотрубками и фуллеренами получены нанобъекты более сложной конфигурации [1–4]. С точки зрения возможности экспериментального определения изгибной жесткости особый интерес представляют наноразмерные цилиндрические спирали [1, 3]. Это связано с тем, что, во-первых, при произвольном деформировании спиральных оболочек материал работает главным образом на изгиб и при интерпретации экспериментальных данных эффектами растяжения материала можно пренебречь. Во-вторых, собственные формы колебаний спиральной оболочки наблюдать значительно легче, чем связанные с чистым изгибом материала собственные формы колебаний цилиндрической оболочки. Последнее утверждение иллюстрирует рис. 1, где приведены первые четыре формы колебаний спиральной оболочки. Ниже проводится исследование динамики спиральных оболочек [5],

которое может послужить теоретической основой для экспериментальной проверки применимости континуальной теории при расчете механических характеристик нанобъектов, а также для экспериментального определения изгибной жесткости оболочек наноразмерного масштабного уровня.

### ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ УПРУГИХ ОБОЛОЧЕК

Здесь приведена сводка основных уравнений классической линейной теории оболочек; для краткости записи использован аппарат прямого тензорного исчисления [6, 7]. Уравнения динамики имеют вид

$$\nabla \cdot \underline{T} = \rho \ddot{u}, \quad \nabla \cdot M + T_x = 0, \quad (1)$$

где  $\underline{T}$ ,  $\underline{M}$  – тензоры сил и моментов, знаком  $(\ )_x$  обозначен векторный инвариант тензора,  $\rho$  – поверхностная плотность массы,  $u$  – вектор перемещений. В классической теории оболочек вектор деформации поперечного сдвига полагается равным нулю, в результате чего вектор углов поворота  $\varphi$  выражается через вектор перемещений по формуле

$$\varphi = -n \times (\nabla u) \cdot n, \quad (2)$$

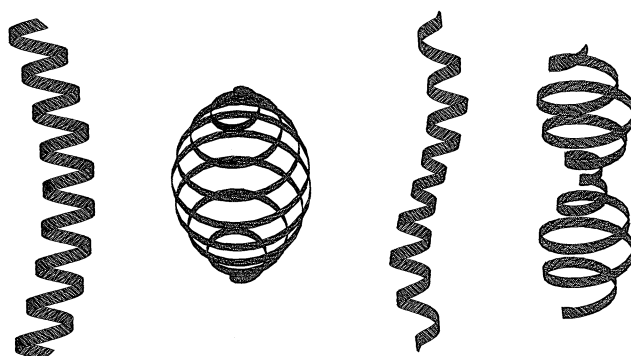


Рис. 1. Формы колебаний спиральной цилиндрической оболочки.

Санкт-Петербургский государственный  
политехнический университет  
Санкт-Петербургский государственный  
университет

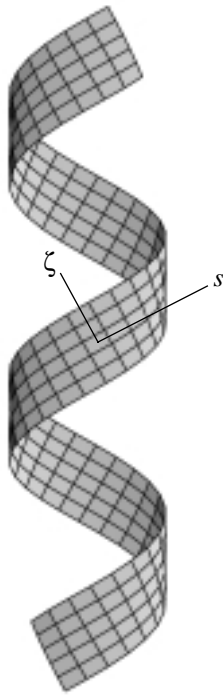


Рис. 2. Спиральная цилиндрическая оболочка.

где  $\underline{n}$  – вектор единичной нормали к поверхности оболочки. Вектор поперечных сил  $\underline{N} \equiv \underline{T} \cdot \underline{n}$  определяется из уравнений динамики (1). Соотношение упругости для тензора сил в касательной плоскости  $\underline{T} \cdot \underline{a}$  имеет вид

$$\underline{T} \cdot \underline{a} + \frac{1}{2}(\underline{M} \cdot \cdot \underline{b})\underline{c} = {}^4\underline{A} \cdot \cdot \underline{\varepsilon}. \quad (3)$$

Соотношение упругости для тензора моментов  $\underline{M}$  выглядит так:

$$\underline{M}^T = {}^4\underline{C} \cdot \cdot \underline{\kappa}. \quad (4)$$

Здесь  ${}^4\underline{A}$ ,  ${}^4\underline{C}$  – тензоры жесткости оболочки,  $\underline{\varepsilon}$ ,  $\underline{\kappa}$  – тензоры деформации,  $\underline{a}$  – единичный тензор в касательной плоскости,  $\underline{b} = -\nabla \underline{n}$ ,  $\underline{c} = -\underline{a} \times \underline{n}$ . Тензоры деформации вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} \underline{\varepsilon} &= \frac{1}{2}((\nabla \underline{u}) \cdot \underline{a} + \underline{a} \cdot (\nabla \underline{u})^T), \\ \underline{\kappa} &= (\nabla \underline{\varphi}) \cdot \underline{a} + \frac{1}{2}((\nabla \underline{u}) \cdot \cdot \underline{c})\underline{b}. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь  $\underline{\varepsilon}$  – тензор деформации растяжения–сдвига в касательной плоскости,  $\underline{\kappa}$  – тензор деформации изгиба–кручения.

## ГЕОМЕТРИЯ СПИРАЛЬНОЙ ОБОЛОЧКИ

Рассматривается цилиндрическая спиральная оболочка радиуса  $R$  (рис. 2):  $\alpha$  – угол подъема витков спирали,  $l$  – длина полосы, образующей спираль,  $a$  – ширина полосы,  $h$  – толщина. Ниже при описании кинематики оболочки используются две системы координат: цилиндрическая система координат  $r, \varphi, z$ , где ось  $z$  направлена по оси спирали, а  $r \equiv R$ , и криволинейная система координат  $s, \zeta$ , введенная на поверхности оболочки следующим образом:

$$z = R(\sin \alpha s + \cos \alpha \zeta), \quad \varphi = \cos \alpha s - \sin \alpha \zeta. \quad (6)$$

Безразмерные координаты  $s, \zeta$  изменяются в пределах

$$-\frac{l}{2} \leq R s \leq \frac{l}{2}, \quad -\frac{a}{2} \leq R \zeta \leq \frac{a}{2}. \quad (7)$$

Единичные векторы  $\underline{e}_s, \underline{e}_\zeta$ , направленные по координатным линиям, и единичный вектор  $\underline{n}$ , определяющий направление внешней нормали к поверхности оболочки, имеют вид

$$\begin{aligned} \underline{e}_s &= \cos \alpha \underline{e}_\varphi + \sin \alpha \underline{k}, \\ \underline{e}_\zeta &= -\sin \alpha \underline{e}_\varphi + \cos \alpha \underline{k}, \quad \underline{n} = \underline{e}_r. \end{aligned} \quad (8)$$

## ПРИБЛИЖЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ, ОПИСЫВАЮЩИЕ ДИНАМИКУ ТОНКОЙ СПИРАЛЬНОЙ ОБОЛОЧКИ

Известно, что тензор жесткости оболочки на растяжение и сдвиг в касательной плоскости  ${}^4\underline{A}$  пропорциональны толщине оболочки  $h$ , а тензор жесткости на изгиб и кручение  ${}^4\underline{C}$  пропорционален  $h^3$ . Поэтому в случае  $\frac{h}{a} \ll 1, \frac{h}{l} \ll 1$  рассматриваемую спиральную оболочку можно считать нерастяжимой. Таким образом, тензор деформации растяжения–сдвига в касательной плоскости будем считать равным нулю:

$$\underline{\varepsilon} = 0. \quad (9)$$

При этом  ${}^4\underline{A} \rightarrow \infty$ , соотношение упругости (3) теряет смысл, а тензор сил в касательной плоскости  $\underline{T} \cdot \underline{a}$  определяется из уравнений динамики (1) с учетом уравнения совместности деформаций

$$\Delta(\text{tr}(\underline{T} \cdot \underline{a})) - (1 + \nu) \nabla \cdot (\nabla \cdot (\underline{T} \cdot \underline{a})) = 0, \quad (10)$$

где  $\nu$  – коэффициент Пуассона. Заметим, что уравнение неразрывности (10) является следствием предположения об отсутствии деформации растяжения–сдвига в касательной плоскости. Таким образом, задача сводится к решению систе-

мы уравнений (1), (2), (4), (5), (9), (10), где тензор жесткости на изгиб и кручение  ${}^4C$  имеет вид

$${}^4C = D \left[ \frac{1+\nu}{2} \underline{\underline{c}}\underline{\underline{c}} + \frac{1-\nu}{2} (\underline{\underline{a}}_2\underline{\underline{a}}_2 + \underline{\underline{a}}_4\underline{\underline{a}}_4) \right]. \quad (11)$$

Здесь  $D$  – изгибная жесткость оболочки,  $\underline{\underline{a}}_2 = e_s e_s - e_\zeta e_\zeta$ ,  $\underline{\underline{a}}_4 = e_s e_\zeta$ .

### РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ ТОНКОЙ СПИРАЛЬНОЙ ОБОЛОЧКИ

Представим вектор перемещений в виде разложения по базису:  $\underline{u} = u_s e_s + u_\zeta e_\zeta + w \underline{n}$ . Выберем в качестве основной переменной перемещение по нормали к поверхности оболочки  $w$ . Путем несложных преобразований, уравнения движения оболочки сведутся к одному дифференциальному уравнению:

$$\left( \sin^2 \alpha \frac{\partial^4}{\partial s^4} + \cos^2 \alpha \frac{\partial^4}{\partial \zeta^4} - \frac{1}{4} \frac{\partial^4}{\partial s^2 \partial \zeta^2} \right) \times \times \left[ \frac{D}{\rho R^4} (\tilde{\Delta} + 1)^2 w + \ddot{w} \right] - \frac{\sin^2 2\alpha}{4} \tilde{\Delta} \ddot{w} = 0, \quad (12)$$

где  $\tilde{\Delta} \equiv R^2 \Delta$  – безразмерный оператор Лапласа. Условие отсутствия деформации растяжения–сдвига в касательной плоскости (9), записанное в координатной форме, позволяет найти связь между компонентами вектора перемещений

$$\frac{\partial u_s}{\partial s} = -\frac{\cos^2 \alpha}{R} w, \quad \frac{\partial u_\zeta}{\partial \zeta} = -\frac{\sin^2 \alpha}{R} w, \quad (13)$$

$$\frac{\partial u_\zeta}{\partial s} + \frac{\partial u_s}{\partial \zeta} = \frac{\sin 2\alpha}{R} w$$

и получить уравнение совместности деформаций в перемещениях

$$\sin 2\alpha \frac{\partial^2 w}{\partial s \partial \zeta} + \sin^2 \alpha \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \cos^2 \alpha \frac{\partial^2 w}{\partial \zeta^2} = 0. \quad (14)$$

Заметим, что уравнение (14) является непосредственным следствием уравнений (13).

Таким образом, задача сводится к нахождению решений уравнения динамики (12), удовлетворяющих дополнительному ограничению, которое накладывается уравнением совместности деформаций (14). Далее перейдем к цилиндрическим координатам (см. формулы (6)). Уравнение совместности деформаций (14), записанное в цилиндрических координатах, выглядит так:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0. \quad (15)$$

Очевидно, что решения уравнения динамики (12), удовлетворяющие уравнению совместности деформаций (15), имеют следующую структуру:

$$w(\varphi, z, t) = W(\varphi, z) e^{i\omega t}, \quad (16)$$

$$W(\varphi, z) = z W_1(\varphi) + W_2(\varphi).$$

Подставляя выражения (16) в уравнение динамики (12) и приравнявая нулю коэффициенты при различных степенях  $z$ , получаем систему двух дифференциальных уравнений относительно переменных  $W_1(\varphi)$ ,  $W_2(\varphi)$ . Решив эту систему и возвратившись к переменным  $s$ ,  $\zeta$ , получим

$$W(s, \zeta) = \sum_{j=1}^3 [(A_j^s(p_j s + q_j \zeta) + B_j^s) \times \times \sin[\lambda_j(\cos \alpha s - \sin \alpha \zeta)] + (A_j^c(p_j s + q_j \zeta) + B_j^c) \times \times \cos[\lambda_j(\cos \alpha s - \sin \alpha \zeta)]], \quad (17)$$

$$p_j = \sin \alpha - \beta_j, \quad q_j = \cos \alpha + \beta_j,$$

$$\beta_j = \frac{2 \cos 2\alpha \Omega^2}{9 \cos \alpha (\lambda_j^4 + (\Omega^2 - 1) \lambda_j^2 + 2\Omega^2)},$$

где  $A_j^s$ ,  $B_j^s$ ,  $A_j^c$ ,  $B_j^c$  – произвольные постоянные,  $\lambda_j$  – корни характеристического уравнения

$$\lambda^6 - 2\lambda^4 + (1 - \Omega^2)\lambda^2 - \frac{4}{3}\Omega^2 = 0, \quad \Omega = \sqrt{\frac{\rho R^4}{D}} \omega. \quad (18)$$

Здесь  $\Omega$  – безразмерная собственная частота, для определения которой требуется формулировка граничных условий. Как видно из уравнений (17), (18), безразмерная частота  $\Omega$  не будет зависеть от физических характеристик оболочки  $\rho$  и  $D$  при условии, что эти величины не попадут в граничные условия.

### ФОРМУЛИРОВКА ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ КОЛЕБАНИЙ ТОНКОЙ СПИРАЛЬНОЙ ОБОЛОЧКИ

Согласно формуле (17), функция  $W(s, \zeta)$  содержит 12 констант, которые, разумеется, не позволяют удовлетворить всем граничным условиям классической теории оболочек. Однако с формальной точки зрения, для решения задачи в рамках рассматриваемой здесь упрощенной постановки достаточно сформулировать 12 однородных уравнений, задающих перемещения или напряжения в каких-то точках границы.

Будем считать, что оболочка закреплена в углах, т.е. вектор перемещений  $\underline{u}(s, \zeta, t) = \underline{u}_*(s, \zeta) e^{i\omega t}$  в угловых точках равен нулю:

$$\begin{aligned} u_*\left(\frac{l}{2R}, \frac{a}{2R}\right) = 0, \quad u_*\left(-\frac{l}{2R}, \frac{a}{2R}\right) = 0, \\ u_*\left(\frac{l}{2R}, -\frac{a}{2R}\right) = 0, \quad u_*\left(-\frac{l}{2R}, -\frac{a}{2R}\right) = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Из условия равенства нулю определителя системы (19) получим частотное уравнение. Как видно из уравнений (13), (15) – (18), определитель системы (19) зависит от безразмерной частоты  $\Omega$  и трех безразмерных параметров:  $\alpha$ ,  $\frac{l}{R}$ ,  $\frac{a}{R}$ . Следовательно, решение частотного уравнения представляет собой спектр безразмерных собственных частот вида

$$\Omega_n = \Omega_n\left(\alpha, \frac{l}{R}, \frac{a}{R}\right), \quad n = 1, 2, \dots \quad (20)$$

Численные расчеты собственных частот и форм колебаний спиральной оболочки при значениях безразмерных параметров  $\alpha = \frac{\pi}{6}$ ,  $\frac{l}{R} = 20\pi$ ,  $\frac{a}{R} = 1$  показали, что приближенная теория (17) – (19) адекватно описывает низкочастотные колебания.

#### ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Рассмотрим две тонкие спиральные оболочки с различными физическими и геометрическими характеристиками, но с одинаковыми безразмерными параметрами  $\alpha$ ,  $\frac{l}{R}$ ,  $\frac{a}{R}$ . Будем считать, что обе оболочки закреплены в углах, т.е. имеют место граничные условия (19). В этом случае, согласно формуле (20), спектры безразмерных собственных частот рассматриваемых оболочек совпадают

$$\forall n: \Omega_n^{(1)} = \Omega_n^{(2)}. \quad (21)$$

Тогда в соответствии с формулой (18) отношение собственных частот  $\frac{\omega_n^{(1)}}{\omega_n^{(2)}}$  не зависит от их порядкового номера  $n$ :

$$\frac{\omega_n^{(1)}}{\omega_n^{(2)}} = \sqrt{\frac{D_2 \rho_1 R_1^4}{D_1 \rho_2 R_2^4}}. \quad (22)$$

Соотношение (22) может послужить теоретической основой для экспериментального исследования вопроса о применимости континуальной теории к объектам наноразмерного масштабного уровня, а в случае положительного ответа на этот вопрос – и для экспериментального определения изгибной жесткости наноболочек.

#### ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ПРОВЕРКА ПРИМЕНИМОСТИ КONTИНУАЛЬНОЙ ТЕОРИИ К НАНООБЪЕКТАМ

Для проверки возможности использования континуальной теории применительно к нанобъектам можно провести следующий эксперимент:

1) измерить несколько первых собственных частот спиральной оболочки наноразмерного масштабного уровня;

2) измерить собственные частоты макроскопической спиральной оболочки с такими же безразмерными параметрами  $\alpha$ ,  $\frac{l}{R}$ ,  $\frac{a}{R}$  и такими же условиями закрепления;

3) найти отношения измеренных частот  $\delta_m = \frac{\omega_n^{(1)}}{\omega_n^{(2)}}$ .

Если континуальная теория применима к нанобъектам, то теоретически  $\forall n$  должно выполняться равенство  $\delta_n = \delta_1$ . В реальности условие применимости континуальной теории формулируется как неравенство  $\frac{|\delta_n - \delta_1|}{\delta_1} \leq \varepsilon_N$ , которое должно

выполняться  $\forall n \leq N$ . Оценить величину допустимой погрешности  $\varepsilon_N$  можно путем сравнения с результатами аналогичного эксперимента, проведенного с двумя макроскопическими спиральными оболочками.

#### ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ИЗГИБНОЙ ЖЕСТКОСТИ НАНООБОЛОЧКИ

Если континуальная теория применима к нанобъектам, то формула (22) позволяет экспериментально определить изгибную жесткость оболочки наноразмерного масштабного уровня. Для определения изгибной жесткости нужно провести следующие измерения и вычисления:

1) измерить первую собственную частоту спиральной наноболочки  $\omega_1^{(1)}$ ;

2) измерить массу  $m_1$  и геометрические размеры  $l_1$ ,  $a_1$ ,  $R_1$  наноболочки и вычислить ее поперечную плотность  $\rho_1 = s \frac{m_1}{l_1 a_1}$ ;

3) взяв для сравнения макроскопическую спиральную оболочку с такими же безразмерными параметрами  $\alpha$ ,  $\frac{l}{R}$ ,  $\frac{a}{R}$  и условиями закрепления, как у исследуемой наноболочки, определить ее характеристики  $\omega_1^{(2)}$ ,  $D_2$ ,  $\rho_2$ ,  $R_2$ ;

4) вычислить значение изгибной жесткости наноболочки  $D_1$ , воспользовавшись формулой (22).

Заметим, что предлагаемый способ экспериментального определения изгибной жесткости не требует определения толщины наноболочки [8, 9].

Работа выполнена при поддержке РФФИ, гранты 02-01-00514, 03-01-00721.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Golod S.V., Prinz V.Ya., Mashanov V.I., Gutakovsky A.K. // *Semicond. Sci. Technol.* 2001. V. 16. P. 181–185.
2. Vorob'ev A.B., Prinz V.Ya. // *Semicond. Sci. Technol.* 2002. V. 17. P. 614–616.
3. Принц В.Я. // *Изв. вузов. Физика.* 2003. № 6. С. 35–43.
4. Prinz V.Ya. // *Microelectric Eng.* 2003. V. 69. Iss. 2/4. P. 466–475.
5. Устинов Ю.А. *Задача Сен-Венана для псевдоцилиндров.* М.: Наука, 2003. 128 с.
6. Жилин П.А. // *Тр. Ленинград. политехн. ин-та.* 1982. Т. 386. С. 29–46.
7. Альтенбах Х., Жилин П.А. // *Adv. Mech.* 1988. № 4. P. 107–148.
8. Кривцов А.М., Морозов Н.Ф. // *ДАН.* 2001. Т. 381. № 3. С. 825–827.
9. Иванова Е.А., Кривцов А.М., Морозов Н.Ф. // *ДАН.* 2002. Т. 385. № 4. С. 494–496.