Приложение F

Метод Жилина и метод Трусделла — сравнительный анализ[1]

Введение

В механике сплошных сред существует несколько методов получения определяющих уравнений. В данной книге используются и развиваются два из них — метод Трусделла и метод Жилина. Далее мы проведем сравнительный анализ этих двух методов.

Метод Трусделла основан на совместном использовании первого и второго законов термодинамики. Суть этого метода заключается в следующем. Второй закон термодинамики записывается в форме неравенства Клаузиуса–Дюгема. С помощью уравнения баланса энергии из неравенства Клаузиуса–Дюгема исключается часть тепловых слагаемых, а именно скорость подвода тепла непосредственно в объем среды и дивергенция вектора теплового потока. В результате получается так называемое приведенное неравенство диссипации, которое должно выполняться при всех мыслимых процессах, протекающих в среде. Так как в приведенное неравенство диссипации не входят ни внешние механические воздействия, ни подвод тепла от внешнего источника, это неравенство налагает ограничения на определяющие уравнения среды.

В случае упругой среды условие выполнения приведенного неравенства диссипации позволяет получить соотношения Коши–Грина для тензоров силовых и моментных напряжений и температуры, а также неравенство, налагающее ограничение на выбор определяющего уравнения для вектора теплового потока. Далее, после подстановки в уравнение баланса энергии соотношений Коши–Грина и проведения ряда формальных преобразований, получается уравнение теплопроводности, зависящее от температуры и энтропии,

[1] Приложение написано Е. А. Ивановой. (*Примеч. ред.*)

дивергенции вектора теплового потока и слагаемых, характеризующих скорость подвода тепла непосредственно в объем среды. Уравнение теплопроводности замыкает систему уравнений связанной задачи термоупругости.

Если среда проявляет неупругие свойства, приведенное неравенство диссипации не позволяет формализовать процесс получения определяющих уравнений, а только дает возможность исключить из рассмотрения те определяющие уравнения, которые противоречат второму закону термодинамики в форме неравенства Клаузиуса–Дюгема. В этом случае для получения определяющих уравнений приходится привлекать другие методы, например, метод реологических моделей или метод теории сред с затухающей памятью. При этом вопрос о формулировке уравнения теплопроводности в том виде, в котором оно получается в задаче термоупругости, остается открытым.

Метод Жилина основан на использовании уравнения баланса энергии и второго закона термодинамики в форме, отличной от неравенства Клаузиуса–Дюгема. Основная идея метода заключается в преобразовании уравнения баланса энергии к специальной форме, называемой приведенным уравнением баланса энергии. В ходе этого преобразования напряжения представляются в виде суммы упругой и диссипативной составляющих, вводятся в рассмотрение температура и энтропия и уравнение баланса энергии разделяется на два уравнения. Одно из этих уравнений — это приведенное уравнение баланса энергии, которое кроме внутренней энергии содержит упругие составляющие тензоров силовых и моментных напряжений, а также температуру и энтропию. Второе — это уравнение теплопроводности, которое содержит температуру и энтропию, диссипативные составляющие тензоров напряжений, дивергенцию вектора теплового потока и слагаемые, характеризующие скорость подвода тепла непосредственно в объем среды.

В отличие от приведенного неравенства диссипации, которое позволяет получить соотношения Коши–Грина только в случае упругой среды, приведенное уравнение баланса энергии в методе Жилина дает возможность получить соотношения Коши–Грина без предположения о том, что среда является упругой. Разумеется, речь идет о соотношениях Коши–Грина для упругих составляющих тензоров напряжений и температуры. Подчеркнем, что в методе Жилина соотношения Коши–Грина получаются без использования второго закона термодинамики. Второй закон термодинамики используется только при написании определяющих уравнений для диссипативных составляющих тензоров напряжений и вектора теплового потока.

Формулировка Жилина второго закона термодинамики отличается от неравенства Клаузиуса–Дюгема и представляет собой совокупность двух неравенств. Одно этих неравенств можно интерпретировать как утверждение о том, что диссипативные силы не могут совершать положительной работы. Это неравенство налагает ограничение на определяющие уравнения для диссипативных составляющих тензоров напряжений. Второе неравенство можно интерпретировать как утверждение о том, что тепло всегда течет от горячего к холодному. Это неравенство налагает ограничение на определяющее уравнение для вектора теплового потока. Формулировка Жилина второго закона термодинамики является более ограничительной, чем неравенство Клаузиуса–Дюгема, которое получается из формулировки Жилина следственным переходом.

Свой метод П. А. Жилин разработал в 2001–2005 гг. К этому времени относятся работы, посвященные описанию неупругого поведения сплошных сред, которые положены в основу третьей и пятой глав данной книги. В шестой главе рассмотрен континуум многоспиновых частиц, моделирующий электромагнитное поле, и показано, что принятие ряда упрощающих предположений позволяет свести уравнения динамики данного континуума к классическим уравнениям Максвелла. Эта работа относится к более раннему периоду, и в ней при выводе основных уравнений П. А. Жилин использовал метод Трусделла.

Цель нашего исследования заключается в том, чтобы, во-первых, продемонстрировать возможности метода Жилина применительно к континууму многоспиновых частиц, во-вторых, на этом примере провести сравнительный анализ результатов, полученных методом Трусделла и методом Жилина.

F.1. Приведенное уравнение баланса энергии и уравнение теплопроводности

Далее рассматривается континуум многоспиновых частиц. Поскольку термин “многоспиновая частица” не является общепринятым, его необходимо пояснить. Пусть частица $\mathcal{A}$ состоит из несущего тела $\mathcal{A}_0$ и встроенных в него роторов $\mathcal{A}_i$ $(i = 1, 2, ..., N)$. Положения центров масс тел $\mathcal{A}_i$ определяются радиус-векторами $\mathbf{R}_i$. Множество точек, определяемых радиус-векторами $\mathbf{R}_i$, является абсолютно твердым телом. При этом роторы могут вращаться независимо друг от друга и от несущего тела. Частица, имеющая такую структуру, называется многоспиновой частицей. Если роторы осесимметричны, а их оси фиксированы относительно несущего тела, то многоспиновая частица является гиростатом. Именно этот случай рассматривается в шестой главе и будет обсуждаться в дальнейшем.

В шестой главе для континуума многоспиновых частиц сформулированы уравнение баланса частиц, уравнения баланса количества движения и кинетического момента, а также уравнение баланса энергии. Затем уравнение баланса энергии, с учетом остальных балансовых соотношений, преобразовано к виду (6.57). Именно это уравнение является отправной точкой нашего исследования. Итак, рассмотрим уравнение баланса энергии в форме (6.57)

$$\begin{aligned}\eta\frac{\delta\mathcal{U}}{\delta t} &= \mathbf{T}^{\mathsf{T}}\cdot\cdot\,(\nabla\mathbf{V}+\mathbf{E}\times\boldsymbol{\omega})+\mathbf{M}^{\mathsf{T}}\cdot\cdot\,\nabla\boldsymbol{\omega}+\nabla\cdot\mathbf{h}+\eta q+\\ &+\eta\sum_{i=1}^{N}\nu_i\frac{\delta\beta_i}{\delta t}\left(\frac{\delta\beta_i}{\delta t}-\Omega_i\right).\end{aligned}\tag{F.1}$$

Здесь η — плотность распределения частиц; $\mathcal{U}$ — внутренняя энергия, приходящаяся на одну частицу; $\mathbf{T}$ и $\mathbf{M}$ — тензоры силовых и моментных напряжений; $\mathbf{V}$ — вектор трансляционной скорости; $\boldsymbol{\omega}$ — вектор угловой скорости несущего тела; β_i — угол поворота i-го ротора относительно несущего тела; Ω_i и ν_i — параметры частицы (постоянные величины); $\mathbf{h}$ — вектор теплового потока; q — подвод тепла в единицу времени, приходящийся на одну частицу.

Правая часть уравнения (F.1) содержит слагаемые, отвечающие за подвод энергии в форме тепла и подвод энергии, обусловленный динамикой внутренних роторов. Кроме того, правая часть уравнения (F.1) содержит мощность силовых и моментных напряжений, часть которой идет на изменение внутренней энергии, часть остается в теле в форме тепла и часть рассеивается в окружающую среду. Чтобы разделить эти части, согласно методу Жилина, изложенному в третьей главе, тензоры силовых и моментных напряжений представим в виде разложений

$$\mathbf{T}=\mathbf{T}_e+\mathbf{T}_f,\qquad \mathbf{M}=\mathbf{M}_e+\mathbf{M}_f,\tag{F.2}$$

где индексом “e” отмечена составляющая напряжений, не зависящая от скоростей (упругая составляющая), а индексом “f” обозначена вся оставшаяся часть напряжений (диссипативная составляющая). Используя разложение (F.2), перепишем уравнение баланса энергии (F.1) в виде

$$\begin{aligned}\eta\frac{\delta\mathcal{U}}{\delta t} &= \mathbf{T}_e^{\mathsf{T}}\cdot\cdot\,(\nabla\mathbf{V}+\mathbf{E}\times\boldsymbol{\omega})+\mathbf{M}_e^{\mathsf{T}}\cdot\cdot\,\nabla\boldsymbol{\omega}+\nabla\cdot\mathbf{h}+\eta q+\\ &+\eta\sum_{i=1}^{N}\nu_i\frac{\delta\beta_i}{\delta t}\left(\frac{\delta\beta_i}{\delta t}-\Omega_i\right)+\mathbf{T}_f^{\mathsf{T}}\cdot\cdot\,(\nabla\mathbf{V}+\mathbf{E}\times\boldsymbol{\omega})+\mathbf{M}_f^{\mathsf{T}}\cdot\cdot\,\nabla\boldsymbol{\omega}.\end{aligned}\tag{F.3}$$

Преобразуем уравнение баланса энергии (F.3) к специальному виду, называемому *приведенным уравнением баланса энергии.* Для этого введем в рассмотрение новые переменные ϑ и $\mathcal{H}$, такие, что

$$\eta\vartheta\,\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta t} = \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{h} + \eta q + \eta\sum_{i=1}^{N}\nu_i\frac{\delta\beta_i}{\delta t}\left(\frac{\delta\beta_i}{\delta t} - \Omega_i\right) + \\ + \mathbf{T}_f^{\mathsf{T}}\cdot\cdot\,(\boldsymbol{\nabla}\mathbf{V} + \mathbf{E}\times\boldsymbol{\omega}) + \mathbf{M}_f^{\mathsf{T}}\cdot\cdot\,\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\omega}. \tag{F.4}$$

Здесь ϑ — температура; $\mathcal{H}$ — плотность энтропии (энтропия, приходящаяся на одну частицу). Таким образом, температура и энтропия вводятся в рассмотрение как сопряженные величины, причем под температурой подразумевается величина, измеряемая термометром. Уравнение (F.4) — это *уравнение теплопроводности.* Фактически, оно представляет собой определение температуры и энтропии.

С учетом (F.4), уравнение баланса энергии (F.3) принимает вид

$$\eta\frac{\delta\mathcal{U}}{\delta t} = \mathbf{T}_e^{\mathsf{T}}\cdot\cdot\,(\boldsymbol{\nabla}\mathbf{V} + \mathbf{E}\times\boldsymbol{\omega}) + \mathbf{M}_e^{\mathsf{T}}\cdot\cdot\,\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\omega} + \eta\vartheta\,\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta t}. \tag{F.5}$$

Именно эта форма уравнения баланса энергии называется *приведенным уравнением баланса энергии.*

F.2. Соотношения Коши–Грина

Далее примем предположения (6.77)

$$\mathbf{V} = \text{const}, \qquad \mathbf{T} = \boldsymbol{\tau} + \varpi^{-1}\boldsymbol{\mathfrak{D}}\times\mathbf{E}, \qquad \boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}^{\mathsf{T}}, \qquad \mathbf{M} = \varpi^{-1}\boldsymbol{\mathfrak{B}}\times\mathbf{E}, \tag{F.6}$$

где $\boldsymbol{\tau}$ — симметричная часть тензора напряжений; $\boldsymbol{\mathfrak{D}}$ — вектор, определяющий антисимметричную часть тензора напряжений; $\boldsymbol{\mathfrak{B}}$ — вектор, определяющий тензор моментных напряжений при условии, что последний считается антисимметричным.

Согласно интерпретации, принятой в шестой главе, вектор $\boldsymbol{\mathfrak{B}}$ представляет собой вектор магнитной индукции, вектор $\boldsymbol{\mathfrak{D}}$ отвечает за джоулево тепло, ϖ — константа, введенная для соответствия размерностей. Следует отметить, что в шестой главе рассматривается *упругий* континуум многоспиновых частиц.

Далее, для того чтобы продемонстрировать применение метода в общем случае, откажемся от предположения об упругости среды. С учетом разложений (F.2) перепишем соотношения (F.6) в форме

$$\begin{aligned} &\mathbf{T}_e = \boldsymbol{\tau}_e + \varpi^{-1}\boldsymbol{\mathfrak{D}}_e \times \mathbf{E}, \qquad \boldsymbol{\tau}_e = \boldsymbol{\tau}_e^{\mathsf{T}}, \qquad \mathbf{M}_e = \varpi^{-1}\boldsymbol{\mathfrak{B}}_e \times \mathbf{E}, \\ &\mathbf{T}_f = \boldsymbol{\tau}_f + \varpi^{-1}\boldsymbol{\mathfrak{D}}_f \times \mathbf{E}, \qquad \boldsymbol{\tau}_f = \boldsymbol{\tau}_f^{\mathsf{T}}, \qquad \mathbf{M}_f = \varpi^{-1}\boldsymbol{\mathfrak{B}}_f \times \mathbf{E}. \end{aligned} \tag{F.7}$$

Подставив (F.7) в (F.4), получим уравнение теплопроводности

$$\begin{aligned} \eta\vartheta\,\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta t} = \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{h} + \eta q + \eta\sum_{i=1}^{N}\nu_i\frac{\delta\beta_i}{\delta t}\left(\frac{\delta\beta_i}{\delta t} - \Omega_i\right) + \\ + 2\varpi^{-1}\boldsymbol{\mathfrak{D}}_f\cdot\boldsymbol{\omega} - \varpi^{-1}\boldsymbol{\mathfrak{B}}_f\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\omega}). \end{aligned} \tag{F.8}$$

Подставив (F.7) в (F.5), получим приведенное уравнение баланса энергии

$$\eta\frac{\delta\mathcal{U}}{\delta t} = 2\varpi^{-1}\boldsymbol{\mathfrak{D}}_e\cdot\boldsymbol{\omega} - \varpi^{-1}\boldsymbol{\mathfrak{B}}_e\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\omega}) + \eta\vartheta\,\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta t}. \tag{F.9}$$

Последнее, с учетом соотношений (6.85)–(6.93), преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \eta\frac{\delta\mathcal{U}}{\delta t} = \left[\varpi^{-1}\left(\boldsymbol{\mathfrak{D}}_e - \frac{1}{2}\,\mathbf{F}\cdot\boldsymbol{\mathfrak{B}}_e + \frac{1}{2}(\operatorname{tr}\mathbf{F})\,\boldsymbol{\mathfrak{B}}_e\right)\times\mathbf{P}\right]^{\mathsf{T}}\cdot\cdot\,\frac{\delta\mathbf{P}}{\delta t} - \\ - \varpi^{-1}\boldsymbol{\mathfrak{B}}_e\cdot\frac{\delta\mathbf{f}}{\delta t} + \eta\vartheta\,\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta t}, \end{aligned} \tag{F.10}$$

где $\mathbf{P}$ — тензор поворота несущего тела; $\mathbf{F}$ и $\mathbf{f}$ — соответствующие меры деформации:

$$\boldsymbol{\nabla}\mathbf{P} = \mathbf{F}\times\mathbf{P}, \qquad \mathbf{f} \equiv \mathbf{F}_{\times}. \tag{F.11}$$

Теперь можно определить, от каких аргументов[2] зависят функции $\mathcal{U}$, $\boldsymbol{\mathfrak{D}}_e$, $\boldsymbol{\mathfrak{B}}_e$ и ϑ,

$$\begin{aligned} \mathcal{U} = \mathcal{U}(\mathbf{P},\,\mathbf{f},\,\mathcal{H}), \qquad \boldsymbol{\mathfrak{D}}_e = \boldsymbol{\mathfrak{D}}_e(\mathbf{P},\,\mathbf{F},\,\mathcal{H}), \\ \boldsymbol{\mathfrak{B}}_e = \boldsymbol{\mathfrak{B}}_e(\mathbf{P},\,\mathbf{f},\,\mathcal{H}), \qquad \vartheta = \vartheta(\mathbf{P},\,\mathbf{f},\,\mathcal{H}). \end{aligned} \tag{F.12}$$

Согласно (F.12), материальная производная от плотности внутренней энергии вычисляется по формуле

$$\frac{\delta\mathcal{U}}{\delta t} = \frac{\partial\mathcal{U}}{\partial\mathbf{f}}\cdot\frac{\delta\mathbf{f}}{\delta t} + \left(\frac{\partial\mathcal{U}}{\partial\mathbf{P}}\right)^{\mathsf{T}}\cdot\cdot\,\frac{\delta\mathbf{P}}{\delta t} + \frac{\partial\mathcal{U}}{\partial\mathcal{H}}\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta t}. \tag{F.13}$$

[2] Обратим внимание на то, что вектор $\boldsymbol{\mathfrak{D}}_e$ должен зависеть от тензора деформации $\mathbf{F}$, а не только от его векторного инварианта $\mathbf{f}$. Это обусловлено тем, что согласно уравнению (F.10) одно из соотношений Коши–Грина будет получено для выражения в квадратных скобках. Именно это соотношение Коши–Грина позволяет определить вектор $\boldsymbol{\mathfrak{D}}_e$. Поскольку выражение в квадратных скобках содержит тензор $\mathbf{F}$, вектор $\boldsymbol{\mathfrak{D}}_e$ будет от него зависеть.

Подставляя (F.13) в (F.10), получаем

$$\begin{gathered}\left[\varpi^{-1}\left(\boldsymbol{\mathcal{D}}_e-\frac{1}{2}\mathbf{F}\cdot\boldsymbol{\mathcal{B}}_e+\frac{1}{2}(\operatorname{tr}\mathbf{F})\,\boldsymbol{\mathcal{B}}_e\right)\times\mathbf{P}-\eta\frac{\partial\mathcal{U}}{\partial\mathbf{P}}\right]^{\mathsf{T}}\cdot\cdot\,\frac{\delta\mathbf{P}}{\delta t}-\\-\left(\varpi^{-1}\boldsymbol{\mathcal{B}}_e+\eta\frac{\partial\mathcal{U}}{\partial\mathbf{f}}\right)\cdot\frac{\delta\mathbf{f}}{\delta t}+\eta\left(\vartheta-\frac{\partial\mathcal{U}}{\partial\mathcal{H}}\right)\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta t}=0.\end{gathered}\tag{F.14}$$

С учетом ограничения на материальную производную от тензора поворота (6.100), из уравнения (F.14) получаем соотношения Коши–Грина

$$\begin{gathered}\boldsymbol{\mathcal{B}}_e=-\varpi\eta\frac{\partial\mathcal{U}}{\partial\mathbf{f}},\qquad\vartheta=\frac{\partial\mathcal{U}}{\partial\mathcal{H}},\\2\boldsymbol{\mathcal{D}}_e=-\varpi\eta\left(\frac{\partial\mathcal{U}}{\partial\mathbf{P}}\cdot\mathbf{P}^{\mathsf{T}}\right)_{\times}+\varpi\eta\mathbf{F}\cdot\frac{\partial\mathcal{U}}{\partial\mathbf{f}}-\varpi\eta\,(\operatorname{tr}\mathbf{F})\,\frac{\partial\mathcal{U}}{\partial\mathbf{f}}.\end{gathered}\tag{F.15}$$

В результате, задача определения векторов $\boldsymbol{\mathcal{B}}_e$, $\boldsymbol{\mathcal{D}}_e$ и температуры свелась к заданию плотности внутренней энергии как функции тензора поворота несущего тела, вектора деформации $\mathbf{f}$ и плотности энтропии.

Часто бывает удобнее выбрать в качестве основной переменной не энтропию, а температуру. В этом случае необходимо ввести в рассмотрение плотность свободной энергии

$$\mathcal{F}=\mathcal{U}-\vartheta\,\mathcal{H}.\tag{F.16}$$

Тогда приведенное уравнение баланса энергии (F.10) примет вид

$$\begin{gathered}\eta\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta t}=\left[\varpi^{-1}\left(\boldsymbol{\mathcal{D}}_e-\frac{1}{2}\mathbf{F}\cdot\boldsymbol{\mathcal{B}}_e+\frac{1}{2}(\operatorname{tr}\mathbf{F})\,\boldsymbol{\mathcal{B}}_e\right)\times\mathbf{P}\right]^{\mathsf{T}}\cdot\cdot\,\frac{\delta\mathbf{P}}{\delta t}-\\-\varpi^{-1}\boldsymbol{\mathcal{B}}_e\cdot\frac{\delta\mathbf{f}}{\delta t}-\eta\mathcal{H}\,\frac{\delta\vartheta}{\delta t}.\end{gathered}\tag{F.17}$$

Теперь можно определить, от каких аргументов зависят функции $\mathcal{F}$, $\boldsymbol{\mathcal{D}}_e$, $\boldsymbol{\mathcal{B}}_e$ и $\mathcal{H}$,

$$\begin{gathered}\mathcal{F}=\mathcal{F}(\mathbf{P},\,\mathbf{f},\,\vartheta),\qquad\boldsymbol{\mathcal{D}}_e=\boldsymbol{\mathcal{D}}_e(\mathbf{P},\,\mathbf{F},\,\vartheta),\\\boldsymbol{\mathcal{B}}_e=\boldsymbol{\mathcal{B}}_e(\mathbf{P},\,\mathbf{f},\,\vartheta),\qquad\mathcal{H}=\mathcal{H}(\mathbf{P},\,\mathbf{f},\,\vartheta).\end{gathered}\tag{F.18}$$

Согласно (F.18), материальная производная от плотности свободной энергии вычисляется по формуле

$$\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta t}=\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\mathbf{f}}\cdot\frac{\delta\mathbf{f}}{\delta t}+\left(\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\mathbf{P}}\right)^{\mathsf{T}}\cdot\cdot\,\frac{\delta\mathbf{P}}{\delta t}+\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\vartheta}\frac{\delta\vartheta}{\delta t}.\tag{F.19}$$

Подставляя (F.19) в (F.17), получаем

$$\begin{aligned}\left[\varpi^{-1}\left(\boldsymbol{\mathcal{D}}_e - \frac{1}{2}\mathbf{F}\cdot\boldsymbol{\mathcal{B}}_e + \frac{1}{2}(\operatorname{tr}\mathbf{F})\,\boldsymbol{\mathcal{B}}_e\right)\times\mathbf{P} - \eta\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\mathbf{P}}\right]^{\mathsf{T}}\cdot\cdot\,\frac{\delta\mathbf{P}}{\delta t} - \\ -\varpi^{-1}\left(\boldsymbol{\mathcal{B}}_e + \eta\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\mathbf{f}}\right)\cdot\frac{\delta\mathbf{f}}{\delta t} - \eta\left(\mathcal{H} + \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\vartheta}\right)\frac{\delta\vartheta}{\delta t} = 0.\end{aligned} \tag{F.20}$$

Согласно (F.20) получаем соотношения Коши–Грина

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\mathcal{B}}_e = -\,\varpi\eta\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\mathbf{f}}, \qquad \vartheta = -\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\mathcal{H}}, \\ 2\boldsymbol{\mathcal{D}}_e = -\,\varpi\eta\left(\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\mathbf{P}}\cdot\mathbf{P}^{\mathsf{T}}\right)_{\times} + \varpi\eta\mathbf{F}\cdot\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\mathbf{f}} - \varpi\eta\,(\operatorname{tr}\mathbf{F})\,\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\mathbf{f}}.\end{aligned} \tag{F.21}$$

Уравнения (F.21) по форме совпадают с соотношениями Коши–Грина (6.101), (6.102), полученными в шестой главе.

F.3. Второй закон термодинамики

Формулировка Жилина второго закона термодинамики применительно к рассматриваемому континууму многоспиновых частиц имеет вид

$$2\varpi^{-1}\boldsymbol{\mathcal{D}}_f\cdot\boldsymbol{\omega} - \varpi^{-1}\boldsymbol{\mathcal{B}}_f\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\omega}) \geq 0, \qquad \mathbf{h}\cdot\boldsymbol{\nabla}\vartheta \geq 0. \tag{F.22}$$

В качестве простейшего примера определяющих уравнений для векторов $\boldsymbol{\mathcal{D}}_f$, $\boldsymbol{\mathcal{B}}_f$ и $\mathbf{h}$, не противоречащих неравенствам (F.22), можно предложить следующие:

$$\boldsymbol{\mathcal{D}}_f = \varpi k_1\boldsymbol{\omega}, \qquad \boldsymbol{\mathcal{B}}_f = -\varpi k_2\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\omega}, \qquad \mathbf{h} = k_3\boldsymbol{\nabla}\vartheta, \tag{F.23}$$

где k_1, k_2, k_3 — положительные константы. Подчеркнем, что уравнения (F.23) приведены не с целью уточнения модели электромагнитного поля, построенной в шестой главе, а исключительно с целью иллюстрации того, как можно удовлетворить ограничениям, налагаемым вторым законом термодинамики в форме Жилина.

Приняв во внимание уравнение теплопроводности (F.8), нетрудно показать, что следствием неравенств (F.22) является неравенство

$$\eta\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta t} \geq \frac{1}{\vartheta}\left[\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{h} + \eta q + \eta\sum_{i=1}^{N}\nu_i\frac{\delta\beta_i}{\delta t}\left(\frac{\delta\beta_i}{\delta t} - \Omega_i\right)\right] - \frac{1}{\vartheta^2}\,\mathbf{h}\cdot\boldsymbol{\nabla}\vartheta. \tag{F.24}$$

Неравенство (F.24) в точности совпадает с локальной формой неравенства Клаузиуса–Дюгема (6.60), приведенной в шестой главе для континуума многоспиновых частиц. Таким образом показано, что неравенство Клаузиуса–Дюгема получается из неравенств Жилина следственным переходом. Это означает, что формулировка Жилина второго закона термодинамики более ограничительна, чем неравенство Клаузиуса–Дюгема.

Домножим неравенство (F.24) на температуру и вычтем из него уравнение теплопроводности (F.8). В результате получим

$$2\varpi^{-1}\boldsymbol{\mathfrak{D}}_{\mathrm{f}} \cdot \boldsymbol{\omega} - \varpi^{-1}\boldsymbol{\mathfrak{B}}_{\mathrm{f}} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\omega}) + \mathbf{h} \cdot \boldsymbol{\nabla}\vartheta \geq 0. \tag{F.25}$$

Неравенства (F.24) и (F.25) эквивалентны. Сравнение неравенств (F.22) и (F.25) делает очевидным отличие формулировки Жилина второго закона термодинамики от формулировки Клаузиуса–Дюгема. Формулировка Жилина требует, чтобы диссипативные силы не совершали положительной работы и тепло не могло течь от холодного к горячему. Формулировка Клаузиуса–Дюгема, в принципе, допускает и то и другое.

Несмотря на то что неравенство (F.25) является другой формой записи неравенства (F.24), в рамках метода Трусделла его получить невозможно, поскольку метод Трусделла не предполагает априорное разделение напряжений на упругие и диссипативные. Заметим, что отказ от разделения напряжений на упругие и диссипативные приводит к тому, что в рамках метода Трусделла в принципе невозможно принять более ограничительную формулировку второго закона термодинамики, подобную неравенствам Жилина.

Заключение

Подводя итог проведенному исследованию, отметим некоторые особенности основных уравнений, получающихся при использовании метода Трусделла и метода Жилина.

Во-первых, в случае упругой среды методом Трусделла и методом Жилина получаются совершенно одинаковые соотношения Коши–Грина. В случае неупругой среды полученные методом Жилина соотношения Коши–Грина (F.21) для упругих составляющих векторов $\boldsymbol{\mathfrak{D}}$ и $\boldsymbol{\mathfrak{B}}$ выглядят точно так же, как в случае упругой среды. Несмотря на это, наличие диссипативных составляющих векторов векторов $\boldsymbol{\mathfrak{D}}$ и $\boldsymbol{\mathfrak{B}}$ влияет на их упругие составляющие. Это влияние обусловлено тем, что свободная энергия зависит от температуры, а характер изменения температуры определяется, в частности, уравнением теплопроводности (F.8), в котором содержатся диссипативные составляющие векторов $\boldsymbol{\mathfrak{D}}$ и $\boldsymbol{\mathfrak{B}}$.

Во-вторых, в случае неупругой среды метод Трусделла не дает возможности формализовать процесс составления определяющих уравнений. При использовании метода Жилина остается неформализованной только задача составления определяющих уравнений для диссипативных частей векторов $\boldsymbol{\mathfrak{D}}$ и $\boldsymbol{\mathfrak{B}}$; получение определяющих уравнений для упругих частей векторов $\boldsymbol{\mathfrak{D}}$ и $\boldsymbol{\mathfrak{B}}$ сведено к заданию свободной (или внутренней) энергии. В этом состоит преимущество метода Жилина по сравнению с методом Трусделла.

В-третьих, одним из ключевых моментов метода Жилина является получение уравнения теплопроводности в форме (F.8). Подчеркнем, что согласно методу Жилина уравнение теплопроводности получается независимо от того, какая среда рассматривается — упругая или неупругая, тогда как методом Трусделла уравнение теплопроводности в форме, похожей на (F.8), можно получить только для упругой среды. Заметим, что в случае двухспиновых частиц[3] при условии $\boldsymbol{\mathfrak{D}}_{\mathsf{f}} = \mathbf{0}$ и $\boldsymbol{\mathfrak{B}}_{\mathsf{f}} = \mathbf{0}$ уравнение теплопроводности (F.8) совпадает с уравнением теплопроводности (6.107), полученным в шестой главе для упругой среды методом Трусделла.

Таким образом, в рамках задачи термоупругости метод Жилина, изложенный в третьей главе и использованный здесь применительно к континууму многоспиновых частиц, и метод Трусделла, примененный в шестой главе, дают одинаковые результаты. Различие указанных методов проявляется при учете диссипативных составляющих тензоров напряжений.

[3] В шестой главе построена модель среды, состоящей из многоспиновых частиц. Электродинамическая интерпретация предложена для частного случая этой среды — среды, состоящей из двухспиновых частиц. Именно для этого частного случая в шестой главе получено уравнение теплопроводности.