Теория термовязкоупругости гиперболического типа

Е. А. Иванова

Институт проблем машиноведения РАН
Санкт-Петербургский государственный политехнический университет

Пермь, 2011

Существующие подходы и методы

Классическая механика сплошных сред

- Теория сред с затухающей памятью
- Метод реологических моделей

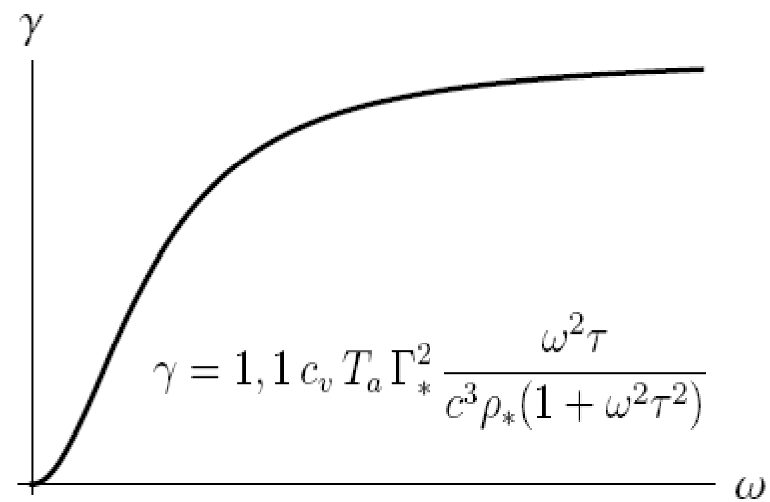
Квантово-механическое описание (фононная теория)

- Механизм Ахиезера $\omega\tau \ll 1$
- Механизм Ландау-Румера $\omega\tau \sim 1$

$$\frac{2\gamma}{\omega^2} = \frac{1}{c^3\rho_*}\left(\eta_v^{cl} + \frac{4}{3}\eta_s^{cl} + \frac{\lambda(c_p - c_v)}{c_p\, c_v}\right)$$

γ - коэффициент поглощения звука

ω - частота, τ - время релаксации



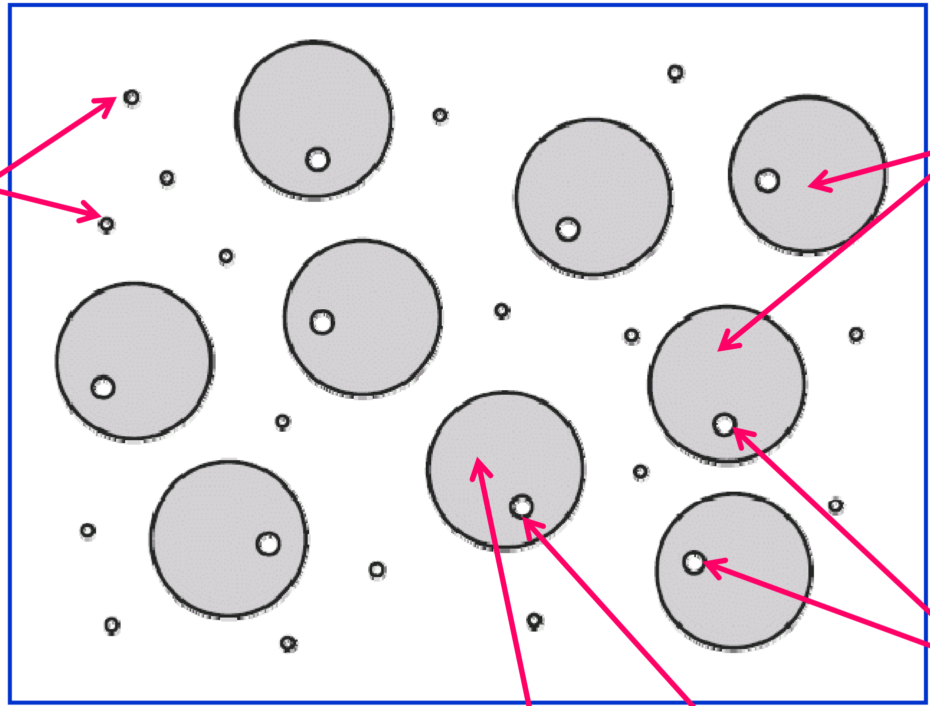
Цель исследования:

В рамках механики сплошных сред предложить теорию термовязкоупругости, которая

- в области низких частот приводит к тем же следствиям, что и классические теории;
- в области гиперзвуковых частот приводит к тем же следствиям, что и квантово-механические теории;
- содержит в себе механическую интерпретацию механизма теплопроводности и внутреннего трения.

Механическая модель, лежащая в основе предлагаемой теории

Континуум однороторных гиростатов



Частицы “теплового эфира” (аналог фононов) обеспечивают механизм теплопроводности и вязкости

Взаимодействие несущих тел гиростатов отвечает за механические процессы

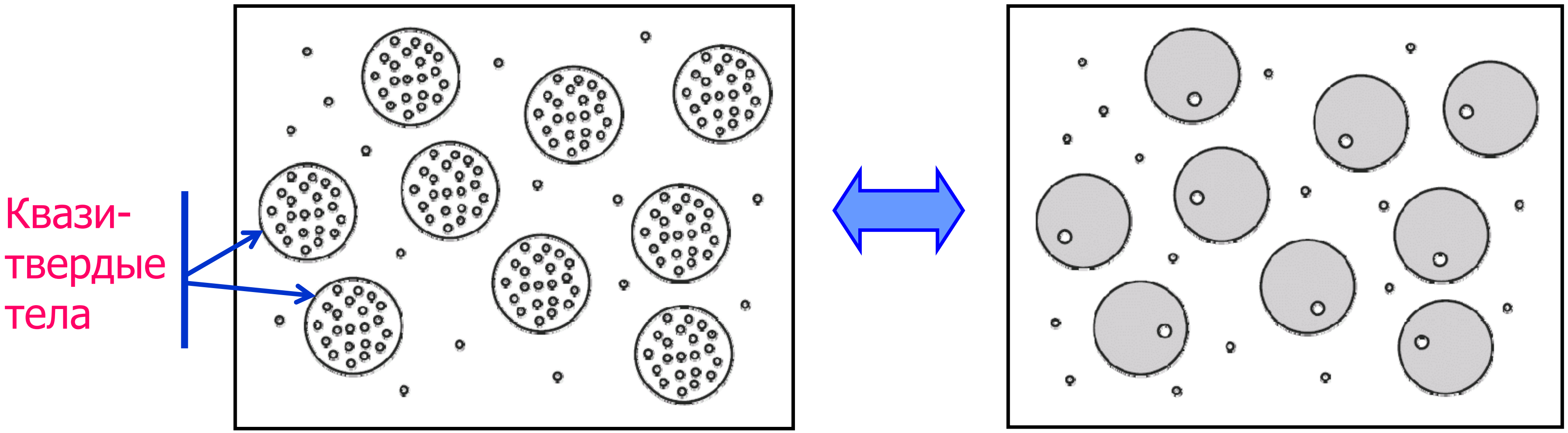
Взаимодействие роторов моделирует тепловые процессы

Взаимное влияние несущих тел и роторов обеспечивает взаимосвязь механических и тепловых процессов

Почему тепловые эффекты связаны с вращательными степенями свободы?

Квази-твердые тела (многороторные гиростаты) моделируют атомы. Движение несущих тел гиростатов связано с механическими процессами. Наличие внутренних степеней свободы позволяет наделить атомы дополнительными свойствами и описать "немеханические процессы", например, тепловые.

Если бы внутренние степени свободы были трансляционными, возникли бы проблемы, связанные с большими деформациями и большими скоростями.



Если угловые скорости тел-точек внутри одного квази-твердого тела примерно одинаковы, среда, состоящая из квази-твердых тел эквивалентна среде, состоящей из однороторных гиростатов.

Немного истории:

Леонард Эйлер. “Диссертация об огне”. (Н. Н. Барабанов. “Леонард Эйлер и его вклад в развитие физики: К 300-летию со дня рождения ученого” .)

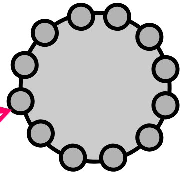
"… частицы горючей материи содержат внутри своих оболочек быстро вращающуюся и очень упругую материю и, если по какой-то причине оболочка разрушается, то высвобождается содержащийся внутри нее запас движения.”

М. В. Ломоносов. “Размышления о причине теплоты и холода”.

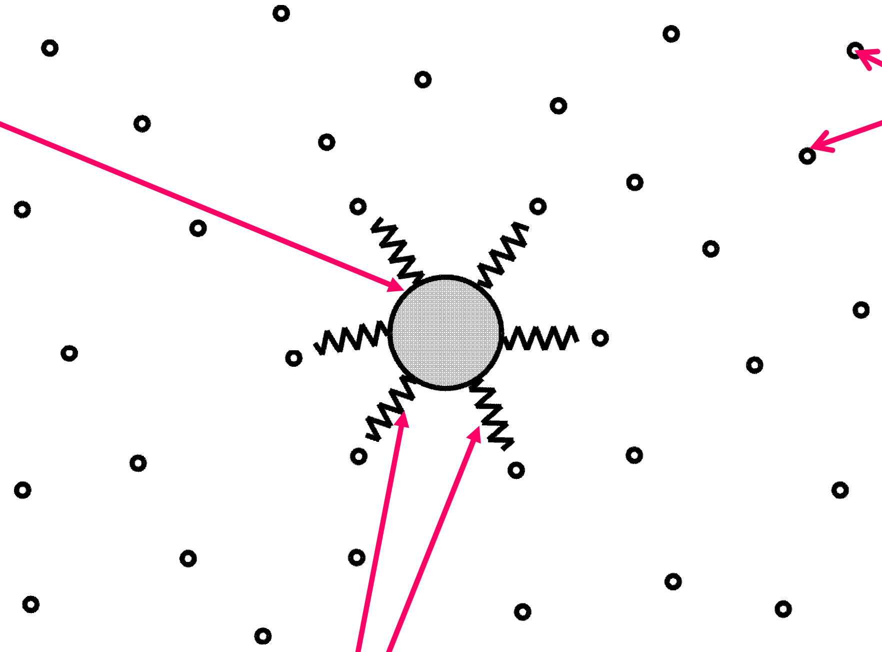
“Итак, после того как мы отвергли поступательное и колебательное внутренние движения, с необходимостью следует, что теплота состоит во внутреннем вращательном движении связанной материи…”

Механизм теплопроводности

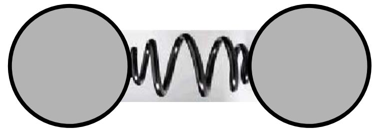
Сферический источник



Каждая частица на поверхности сферы моделирует ротор гиростата



Частицы “теплового эфира” (аналог фононов)



Взаимодействие: при повороте возникает упругий момент; реакции на перемещение нет

Частицы сферического источника взаимодействуют с частицами “теплового эфира” посредством упругих моментов, возникающих при относительном повороте; реакции на относительное перемещение нет

Диссипация энергии сферического источника происходит за счет того, что “тепловой эфир” – безграничная среда

Кинематика сферического источника: $\underline{\xi} = \xi(t)\,\underline{e}_r$, $\underline{\psi} = \psi(t)\,\underline{e}_r$.

Кинематика "теплового эфира": $\underline{u} = u(r,t)\,\underline{e}_r$, $\underline{\theta} = \theta_r(r,t)\,\underline{e}_r$.

Уравнение движения "теплового эфира":

$$\frac{\partial^2 (r\vartheta)}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2}(r\vartheta)^{\cdot\cdot} = 0, \qquad \vartheta = \frac{\partial \theta_r}{\partial r} + \frac{2}{r}\,\theta_r. \tag{1}$$

Граничное условие для "теплового эфира":

$$\tilde{k}\,\vartheta\Big|_{r=r_0} = -\frac{k_*}{r_0}\big(\psi - \theta_r|_{r=r_0}\big). \tag{2}$$

В результате решения задачи для сферического источника получается уравнение, содержащее диссипативное слагаемое, пропорциональное кинетическому моменту.

Механизм внутреннего трения

- Энергия трансляционных движений переходит в энергию вращательных движений внутренних роторов.
- Затем происходит рассеяние энергии по вращательным степеням свободы в результате взаимодействия роторов с "тепловым эфиром".

Модель тела-точки
(введена в рассмотрение в работах П. А. Жилина)

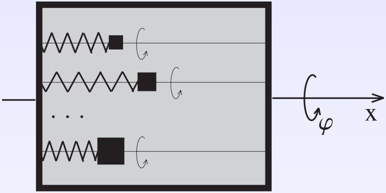
Кинетическая энергия, количество движения и собственный кинетический момент тела-точки имеют вид:

$$K = m\left(\frac{1}{2}\underline{v}\cdot\underline{v} + B\,\underline{v}\cdot\underline{\omega} + \frac{1}{2}J\,\underline{\omega}\cdot\underline{\omega}\right), \tag{3}$$

$$\underline{K}_1 = m\,(\underline{v} + B\,\underline{\omega}), \qquad \underline{K}_2 = m\,(B\,\underline{v} + J\,\underline{\omega}). \tag{4}$$

Здесь m — масса тела-точки, B и J — моменты инерции.

Обоснование модели тела-точки



Внутренняя энергия i-й пружины, а также сила и момент, моделирующие действие i-й пружины на корпус имеют вид:

$$U_i = U_i(x_i + \chi\varphi_i), \qquad F_i = \frac{\partial U_i}{\partial x_i}, \qquad M_i = \frac{\partial U_i}{\partial \varphi_i}, \tag{5}$$

Обозначив штрихом производную по $x_i + \chi\varphi_i$, получим:

$$F_i = U_i', \qquad M_i = \chi U_i' \qquad \Rightarrow \qquad M_i = \chi F_i. \tag{6}$$

Уравнения движения корпуса:

$$m\ddot{x} = A_F t + \sum_{i=1}^{N} F_i, \qquad J\ddot{\varphi} = A_M t + \sum_{i=1}^{N} M_i, \qquad J = \chi^2 m. \quad (7)$$

Уравнения движения внутренних тел:

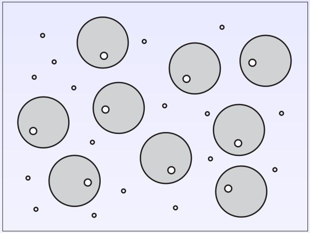
$$m_i(x + x_i)^{\cdot\cdot} = -F_i, \qquad J_i(\varphi + \varphi_i)^{\cdot\cdot} = -M_i, \qquad i = \overline{1, N}. \quad (8)$$

Здесь x_i, φ_i — перемещение и угол поворота i-го тела относительно корпуса.

Исключив характеристики движения по внутренним степеням свободы и усреднив за период характеристики движения корпуса, получим:

$$\hat{m}\ddot{\bar{x}} + \hat{B}\ddot{\bar{\varphi}} = A_F t, \qquad \hat{B}\ddot{\bar{x}} + \hat{J}\ddot{\bar{\varphi}} = A_M t. \quad (9)$$

Континуум однороторных гиростатов



Предположение 1.

Тензор моментных напряжений $\underline{\underline{T}}$, возникающий в результате взаимодействия роторов, представляет собой сумму шарового и антисимметричного тензоров:

$$\underline{\underline{T}} = T\underline{\underline{E}} - \underline{M} \times \underline{\underline{E}}. \tag{10}$$

Предположение 2.

Предполагается, что моментное взаимодействие между несущими телами гиростатов описывается антисимметричным тензором, внешнее моментное воздействие на несущие тела гиростатов отсутствует, а тензорами инерции несущих тел гиростатов можно пренебречь:

$$\underline{\underline{\mu}} = -\underline{\mu}_v \times \underline{\underline{E}}, \qquad \underline{m} = 0, \qquad \underline{\underline{I}}_0 = 0. \tag{11}$$

Предположение 3.

Вектор $\underline{L}$ — массовая плотность внешних воздействий на роторы гиростатов — представляет собой сумму момента $\underline{L}_h$, характеризующего внешние воздействия различного происхождения, и момента линейного вязкого трения:

$$\underline{L}_f = -\beta(B\underline{v} + J\underline{\omega}). \tag{12}$$

Момент (12) характеризует воздействие “теплового эфира”.

Уравнения движения

$$\nabla \cdot \underline{\underline{\tau}} + \rho_* \underline{f} = \rho_* \frac{d}{dt}\left(\underline{v} + B\underline{\omega}\right), \qquad \nabla \times \underline{\mu}_v = \underline{\underline{\tau}}_\times. \tag{13}$$

$$\nabla T - \nabla \times \underline{M} - \beta\rho_*(B\underline{v} + J\underline{\omega}) + \rho_* \underline{L}_h = \rho_* \frac{d}{dt}\left(B\underline{v} + J\underline{\omega}\right). \tag{14}$$

Определяющие уравнения

$$\underline{\underline{\tau}}^s = \underline{\underline{\tau}}_0 + K_{ad}\,\varepsilon \underline{\underline{E}} + 2G \operatorname{dev} \underline{\underline{\varepsilon}}^s + \Upsilon \vartheta \underline{\underline{E}}, \qquad \underline{q} = \underline{q}_0 + A\underline{\gamma} + D\underline{\psi},$$

$$\underline{\underline{\tau}} = \underline{\underline{\tau}}^s - \underline{q} \times \underline{\underline{E}}, \quad T = T_* + \Upsilon \operatorname{tr} \underline{\underline{\varepsilon}} + K\vartheta, \quad \underline{M} = \underline{M}_* + D\underline{\gamma} + \Gamma \underline{\psi}. \tag{15}$$

Геометрические соотношения

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^s = \frac{1}{2}\left(\nabla \underline{u} + \nabla \underline{u}^T\right), \quad \underline{\gamma} = \nabla \times \underline{u} - 2\underline{\varphi}, \quad \nabla \times \underline{\varphi} = 0,$$
$$\varepsilon = \operatorname{tr} \underline{\underline{\varepsilon}}^s, \quad \vartheta = \operatorname{tr} \underline{\underline{\vartheta}}, \quad \underline{\psi} = \underline{\underline{\vartheta}}_\times, \qquad \underline{\underline{\vartheta}} = \nabla \underline{\theta}. \tag{16}$$

Температура и энтропия

Уравнение баланса энергии для построенной выше модели:

$$\frac{d(\rho_* U_m)}{dt} = \underline{\underline{\tau}}^s \cdot\cdot \frac{d\underline{\underline{\varepsilon}}^s}{dt} + \underline{q} \cdot \frac{d\underline{\gamma}}{dt} + T\,\frac{d\vartheta}{dt} + \underline{M} \cdot \frac{d\underline{\psi}}{dt}\,, \qquad (17)$$

Запишем уравнение баланса энергии (17), для простоты положив $\underline{q} = 0$ и $\underline{M} = 0$:

$$\frac{d(\rho_* U_m)}{dt} = \underline{\underline{\tau}}^s \cdot\cdot \frac{d\underline{\underline{\varepsilon}}^s}{dt} + T\,\frac{d\vartheta}{dt}. \qquad (18)$$

Если рассматривать (18) как уравнение баланса энергии для классической среды, то последнее слагаемое в правой части этого уравнения следует трактовать как термодинамическое слагаемое. Тогда величина T приобретает смысл температуры, а величина ϑ — объемной плотности энтропии.

Проблема размерности

Вводится нормировочный коэффициент a:

$$T = aT_a, \qquad \vartheta = \frac{1}{a}\vartheta_a. \tag{19}$$

Здесь T_a — абсолютная температура, измеряемая термометром, ϑ_a — объемная плотность энтропии.

Введя новые переменные и параметры

$$\underline{\theta} = \frac{1}{a}\underline{\theta}_a, \quad \underline{\omega} = \frac{1}{a}\underline{\omega}_a, \quad \underline{M} = a\underline{M}_a, \quad \underline{\psi} = \frac{1}{a}\underline{\psi}_a, \quad \underline{L}_h = a\underline{L}_h^a.$$

$$B_a = \frac{B}{a}, \quad J_a = \frac{J}{a^2}, \quad \Upsilon_a = \frac{\Upsilon}{a}, \quad K_a = \frac{K}{a^2}, \quad D_a = \frac{D}{a}, \quad \Gamma_a = \frac{\Gamma}{a^2},$$

можно исключить нормировочный коэффициент a из всех уравнений.

Термоупругость гиперболического типа

Пусть параметры, связанные с антисимметричными частями $\underline{\underline{\tau}}$ и $\underline{\underline{T}}_a$ равны нулю, параметр B_a, отвечающий за перекрестное слагаемое в кинетической энергии, также равен нулю.

$$\beta J_a = \frac{T_a^*}{\rho_* \lambda}, \qquad K_a = \frac{T_a^*}{\rho_* c_v}, \qquad \Upsilon_a = -\frac{\alpha K_{iz} T_a^*}{\rho_* c_v}, \qquad (20)$$

K_{iz} — модуль объемного сжатия, c_v — удельная теплоемкость, λ — теплопроводность, α — тепловое расширение.

Тогда система основных уравнений приводится к виду:

$$\nabla \cdot \underline{\underline{\tau}}^s + \rho_* \underline{f} = \rho_* \frac{d^2 \underline{u}}{dt^2}, \qquad \underline{\underline{\tau}}^s = \left(K_{iz} - \frac{2}{3} G\right) \varepsilon \underline{\underline{E}} + 2G \underline{\underline{\varepsilon}}^s - \alpha K_{iz} \tilde{T}_a \underline{\underline{E}},$$

$$\Delta \tilde{T}_a - \frac{\rho_* c_v}{\lambda} \left(\frac{d \tilde{T}_a}{dt} + \frac{1}{\beta} \frac{d^2 \tilde{T}_a}{dt^2} \right) = \frac{\alpha K_{iz} T_a^*}{\lambda} \left(\frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{1}{\beta} \frac{d^2 \varepsilon}{dt^2} \right) - \rho_* \nabla \cdot \underline{L}_h^a,$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^s = \frac{1}{2} \left(\nabla \underline{u} + \nabla \underline{u}^T \right), \qquad \varepsilon = \operatorname{tr} \underline{\underline{\varepsilon}}^s. \qquad (21)$$

Внутреннее трение (объемная вязкость)

Классическое уравнение самодиффузии

$$\eta_v^{cl}\,\Delta\varepsilon = \rho_*\frac{d\varepsilon}{dt} - \rho_*\Psi. \tag{22}$$

Уравнение самодиффузии при адиабатическом процессе

$$\eta_v\,\Delta\varepsilon = \rho_*\frac{d\varepsilon}{dt} - \frac{\rho_*}{\beta B_a}\nabla\cdot\underline{L}_h^a, \qquad \eta_v = \frac{\Upsilon_a}{\beta B_a}. \tag{23}$$

Уравнение самодиффузии при изобарном процессе

$$\eta_p\,\Delta\varepsilon = \rho_*\frac{d\varepsilon}{dt} - \rho_*\alpha\nabla\cdot\underline{L}_h^a, \qquad \frac{1}{\eta_p} = \frac{c_p}{\lambda} - \frac{c_p - c_v}{c_v\eta_v}. \tag{24}$$

Внутреннее трение (сдвиговая вязкость)

Классическое уравнение вихревого движения вязкой жидкости

$$\eta_s^{cl} \Delta \nabla \times \underline{v} = \rho_* \frac{d}{dt} \nabla \times \underline{v}. \qquad (25)$$

Значение вектора $\underline{\psi}_a$ постоянно (аналог адиабатичности)

$$\eta_s \, \Delta \nabla \times \underline{v} = \rho_* \frac{d}{dt} \nabla \times \underline{v}, \qquad \eta_s = \frac{D_a}{\beta B_a}. \qquad (26)$$

Процесс, при котором $\underline{\underline{\tau}}_{\times} = 0$

$$\eta_q \, \Delta \nabla \times \underline{v} = \rho_* \frac{d}{dt} \nabla \times \underline{v} + \rho_* \underline{\Psi}_q(\underline{\varphi}), \qquad \eta_q = \frac{D_a^2 - A\Gamma_a}{\beta(D_a B_a - AJ_a)}. \qquad (27)$$

В случае жидкости и газа считаем, что $\eta_q = \eta_s = \eta_s^{cl}$

$$\frac{D_a^2}{\rho_* \beta J_a} \Delta\Delta\nabla \times \underline{u} - \frac{B_a D_a}{J_a} \frac{d}{dt} \Delta\nabla \times \underline{u} - \frac{2B_a D_a}{\beta J_a} \frac{d^2}{dt^2} \Delta\nabla \times \underline{u} -$$
$$- \rho_* \left(1 - \frac{B_a^2}{J_a}\right) \frac{d^3}{dt^3} \nabla \times \underline{u} - \frac{\rho_*}{\beta} \left(1 - \frac{B_a^2}{J_a}\right) \frac{d^4}{dt^4} \nabla \times \underline{u} = 0. \quad (28)$$

В случае медленного процесса:

$$\Delta \left[\eta_s^{cl} \Delta\nabla \times \underline{u} - \rho_* \frac{d}{dt} \nabla \times \underline{u} \right] = 0. \quad (29)$$

В случае быстрого процесса:

$$\frac{d}{dt} \left[k \, \Delta\nabla \times \underline{u} + \rho_* \frac{d^2}{dt^2} \nabla \times \underline{u} \right] = 0,$$
$$k = \frac{\lambda (K_{ad} - K_{iz}) \eta_s^{cl}}{c_v \eta_v^2 - \beta^{-1} \lambda (K_{ad} - K_{iz})} > 0. \quad (30)$$

Связанная задача термовязкоупругости

$$\nabla\cdot\underline{\underline{\tau}}^s-\nabla\times\underline{q}+\rho_*\underline{f}=\rho_*\frac{d^2\underline{u}}{dt^2}-\frac{\alpha K_{iz}T_a^*}{\beta c_v\eta_v}\,\frac{d^2\underline{\theta}_a}{dt^2},\quad \nabla\times\underline{\mu}_v=2\underline{q},\quad \nabla\times\underline{\varphi}=0,$$

$$\nabla\tilde{T}_a-\nabla\times\underline{\tilde{M}}_a+\frac{\alpha K_{iz}T_a^*}{c_v\eta_v}\left(\frac{d\underline{u}}{dt}+\frac{1}{\beta}\frac{d^2\underline{u}}{dt^2}\right)-\frac{T_a^*}{\lambda}\left(\frac{d\underline{\theta}_a}{dt}+\frac{1}{\beta}\frac{d^2\underline{\theta}_a}{dt^2}\right)=-\rho_*\underline{L}_h^a,$$

$$\underline{\underline{\tau}}^s=\left[\left(K_{iz}-\frac{2}{3}\,G\right)\varepsilon-\alpha K_{iz}\,\tilde{T}_a\right]\underline{\underline{E}}+2G\,\underline{\underline{\varepsilon}}^s,\quad \underline{\underline{\varepsilon}}^s=\frac{1}{2}\left(\nabla\underline{u}+\nabla\underline{u}^T\right),\quad \varepsilon=\mathrm{tr}\,\underline{\underline{\varepsilon}}^s,$$

$$\underline{q}=\frac{\lambda\,(\eta_q-\eta_s)(K_{ad}-K_{iz})}{c_v\eta_v^2}\,\underline{\gamma}-\frac{\alpha K_{iz}T_a^*\eta_s}{\rho_*c_v\eta_v}\nabla\times\underline{\theta}_a,\qquad \underline{\gamma}=\nabla\times\underline{u}-2\underline{\varphi},$$

$$\nabla\cdot\underline{\theta}_a=\frac{\rho_*c_v}{T_a^*}\,\tilde{T}_a+\alpha K_{iz}\,\varepsilon,\qquad \underline{\tilde{M}}_a=-\frac{\alpha K_{iz}T_a^*\eta_s}{\rho_*c_v\eta_v}\,\underline{\gamma}+\frac{(\eta_q-\eta_s)\,T_a^*}{\lambda\,\rho_*}\nabla\times\underline{\theta}_a\,. \tag{31}$$

Уравнения для классического континуума

$$\nabla\cdot\underline{\underline{\tilde{T}}}^{s}-\nabla\times\underline{\tilde{q}}+\rho_*\underline{f}=\rho_*\frac{d^2\underline{u}}{dt^2}\,,\qquad \nabla\times\underline{\tilde{\mu}}_{v}=2\underline{\tilde{q}}\,,$$

$$\underline{\underline{\tilde{T}}}^{s}=\left[\left(K_{iz}-\frac{2}{3}\,G\right)\varepsilon-\alpha K_{iz}\,\tilde{T}_a+p\right]\underline{\underline{E}}+2\,G\,\underline{\underline{\varepsilon}}^{s},\qquad \underline{\underline{\varepsilon}}^{s}=\frac{1}{2}\left(\nabla\underline{u}+\nabla\underline{u}^{T}\right),$$

$$\underline{\tilde{q}}=\frac{\lambda\,(\eta_q-\eta_s)(K_{ad}-K_{iz})}{c_v\eta_v^2}\left(\nabla\times\underline{u}-2\underline{\varphi}\right)-\frac{\alpha K_{iz}\,T_a^*\,\eta_s}{\rho_* c_v\eta_v}\;\underline{\tilde{\psi}}_{a}+\underline{t}\,,\qquad \nabla\times\underline{\varphi}=0,$$

$$\Delta p=\frac{\alpha K_{iz}}{\beta\eta_v}\left[\rho_*\frac{d^2\,\tilde{T}_a}{dt^2}+\frac{\alpha K_{iz}\,T_a^*}{c_v}\,\frac{d^2\varepsilon}{dt^2}\right],\qquad \Delta\underline{t}=\frac{\alpha K_{iz}\,T_a^*}{\beta c_v\eta_v}\,\frac{d^2\underline{\tilde{\psi}}_{a}}{dt^2}\,,\qquad \varepsilon=\mathrm{tr}\,\underline{\underline{\varepsilon}}^{s},$$

$$\Delta\,\tilde{T}_a-\frac{\rho_* c_v}{\lambda}\left[\frac{d\,\tilde{T}_a}{dt}+\frac{1}{\beta}\,\frac{d^2\,\tilde{T}_a}{dt^2}\right]=\alpha K_{iz}\,T_a^*\left(\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{c_v\eta_v}\right)\left[\frac{d\varepsilon}{dt}+\frac{1}{\beta}\,\frac{d^2\varepsilon}{dt^2}\right]-\rho_*\nabla\cdot\underline{L}_h^a,$$

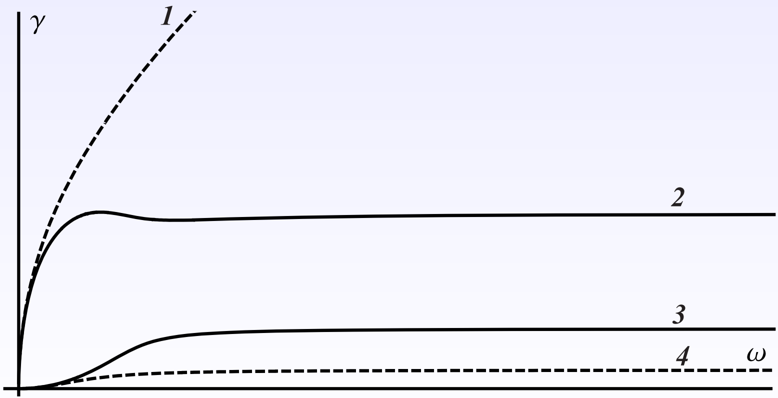
$$(\eta_q-\eta_s)\Delta\underline{\tilde{\psi}}_{a}-\rho_*\left(\frac{d\underline{\tilde{\psi}}_{a}}{dt}+\frac{1}{\beta}\,\frac{d^2\underline{\tilde{\psi}}_{a}}{dt^2}\right)=$$

$$=\frac{\lambda\,\alpha K_{iz}}{c_v\eta_v}\left[\eta_s\,\Delta\nabla\times\underline{u}-\rho_*\left(\frac{d\nabla\times\underline{u}}{dt}+\frac{1}{\beta}\,\frac{d^2\nabla\times\underline{u}}{dt^2}\right)\right]-\frac{\lambda\,\rho_*^2}{T_a^*}\,\nabla\times\underline{L}_h^a.\qquad(32)$$

Анализ дисперсионных соотношений

Представим решение задачи в форме

$$\varepsilon = A_\varepsilon \, e^{i\omega t-(\gamma+i\delta)s}, \qquad \tilde{T}_a = A_T \, e^{i\omega t-(\gamma+i\delta)s}, \tag{33}$$



Определение параметров модели

Выражение для времени релаксации теплового потока β^{-1} совпадает с тем, которое получается при использовании квантово-механического подхода:

$$\beta^{-1} = \frac{\lambda}{c_v(K_{ad} + 4G/3)} \,. \tag{34}$$

Объемная вязкость вычисляется по формуле:

$$\eta_v = \frac{\lambda}{c_v} + \rho_* c^3 \left(\frac{2\,\gamma}{\omega^2}\right) \Big/ \left(1 - \frac{\rho_* c^2}{K_{ad} + 4G/3}\right) . \tag{35}$$

Сдвиговые вязкости твердых тел вычисляются по формулам:

$$\eta_s = \frac{G_{ad}}{\beta} + \rho_* c^3 \left(\frac{2\,\gamma_s}{\omega_s^2}\right) \Big/ \left(1 - \frac{\rho_* c^2}{G_{ad}}\right), \quad \eta_q = \frac{G_{ad}}{\beta} + \eta_s \,. \tag{36}$$

Спасибо за внимание!