Описание электро-механических процессов посредством среды Коссера с микроструктурой

Е. А. Иванова

Институт проблем машиноведения РАН
Санкт-Петербургский государственный политехнический университет

Мотивировка

- Согласно идеям современной физики, электромагнитное поле не имеет материального носителя.
- Ученые XIX века считали электромагнитное поле особым видом материи.
- Максвелл и Кельвин предложили несколько моделей этой материальной среды, в которых вращательные движения рассматривались как независимые.
- Уровень развития науки того времени не позволял описывать среды с вращательными степенями свободы.
- Возможность описания таких сред появилась значительно позже, когда братья Коссера опубликовали свой трактат.
- Сейчас мы можем описать не только среду Коссера, но и среды со сложной микроструктурой.
- Мы можем использовать такие среды для моделирования различных физических процессов и явлений.

Немного истории

В XIX веке Томас Юнг, Огюстен Жан Френель, Джордж Габриэль Стокс, Клод Луи Навье, Огюстен Луи Коши, Джордж Грин и другие выдающиеся ученые предлагали различные теории эфира (теории оптики), основанные на аналогии с твердым деформируемым телом. Каждая из предложенных теорий описывала какие-то экспериментальные факты, но ни одна из них не описывала все экспериментальные факты.

Джеймс МакКулаг построил модель среды, внутренняя энергия которой зависит только от вращения объемных элементов, т. е. от ротора вектора перемещений. Колебания этой среды обладают теми же свойствами, что и колебания света. Теория МакКулага не корректна, поскольку тензор напряжений антисимметричен, а моментные напряжения и инерция вращения не учитываются.

Немного истории

По мнению Фарадея, силовые линии магнитного и электрического полей аналогичны эфиру в том смысле, что силовые линии, так же как и эфир, являются некой физической реальностью, отличной от весомой материи.

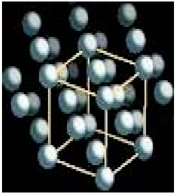
Следуя идеям Фарадея, Максвелл предполагал, что эфир — это среда, вращающаяся вокруг магнитных силовых линий, и каждую силовую трубку можно представить как изолированный вихрь.

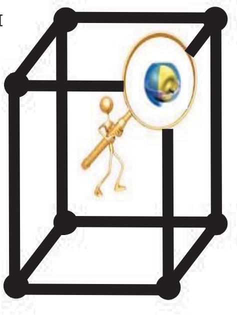
Лорд Кельвин предложил несколько механических моделей, обладающих упругостью на повороты. В отличие от модели Максвелла, модели Кельвина были трехмерными. Кельвин создавал модели сред с вращательными степенями свободы на описательно-инженерном уровне.

Немного истории

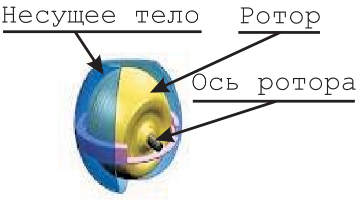
На рубеже XX–XXI веков Павел Андреевич Жилин (1942–2005) создал несколько механических моделей различных физических процессов. В частности, он предложил модель электромагнитного поля в вакууме, основанную исключительно на вращательных степенях свободы.

Кристаллическая решетка





Двухспиновая частица



Цель и основные идеи исследования

- Цель исследования — предложить механическую модель, математическое описание которой сводится к уравнениям электромагнитного поля в веществе.
- Используется подход, разработанный П. А. Жилиным для описания электромагнитного поля в вакууме.
- В отличие от модели П. А. Жилина, предлагаемая механическая модель основана на континууме, обладающем и вращательными, и трансляционными степенями свободы.
- Ниже используется аналогия между величинами, характеризующими электромагнитное поле, и механическими характеристиками сплошной среды, которая отличается от аналогии, предложенной П. А. Жилиным.

Частица специального вида с микроструктурой

Ниже рассматривается континуум двухспиновых частиц. Двухспиновая частица — это частица, состоящая из несущего тела и ротора. Ротор может вращаться независимо от вращения несущего тела, но он не может перемещаться относительно несущего тела.

Несущее тело: $$K^{cb} = m\left(\frac{1}{2}(1-\epsilon)\,\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} + B_0\,\mathbf{v}\cdot\tilde{\boldsymbol{\omega}} + \frac{1}{2}J_0\,\tilde{\boldsymbol{\omega}}\cdot\tilde{\boldsymbol{\omega}}\right)$$

$$\mathbf{K}_1^{cb} = \frac{\partial K^{cb}}{\partial \mathbf{v}} = m\,((1-\epsilon)\,\mathbf{v} + B_0\,\tilde{\boldsymbol{\omega}})\,, \quad \mathbf{K}_2^{cb} = \frac{\partial K^{cb}}{\partial \tilde{\boldsymbol{\omega}}} = m\,(B_0\,\mathbf{v} + J_0\,\tilde{\boldsymbol{\omega}})$$

Ротор: $$K^{rot} = m\left(\frac{1}{2}\,\epsilon\,\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} + B\,\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2}J\,\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega}\right)$$

$$\mathbf{K}_1^{rot} = \frac{\partial K^{rot}}{\partial \mathbf{v}} = m\,(\epsilon\,\mathbf{v} + B\,\boldsymbol{\omega})\,, \qquad \mathbf{K}_2^{rot} = \frac{\partial K^{rot}}{\partial \boldsymbol{\omega}} = m\,(B\,\mathbf{v} + J\,\boldsymbol{\omega})$$

Континуум двухспиновых частиц: уравнения движения

Основные переменные: вектор перемещений $\mathbf{u}$, вектор поворотов несущих тел $\tilde{\boldsymbol{\theta}}$, вектор поворотов роторов $\boldsymbol{\theta}$, тензор напряжений $\mathbf{T} = \boldsymbol{\tau} - \mathbf{I} \times \mathbf{q}$ (где $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}^T$ и $\mathbf{I}$ — единичный тензор), тензор моментных напряжений, характеризующий взаимодействие несущих тел $\boldsymbol{\mu}_* = -\mathbf{I} \times \boldsymbol{\mu}$, и тензор моментных напряжений, характеризующий взаимодействие роторов $\mathbf{M}_* = -\mathbf{I} \times \mathbf{M}$.

Кинематические соотношения: $\mathbf{v} = \dfrac{d\mathbf{u}}{dt}, \quad \tilde{\boldsymbol{\omega}} = \dfrac{d\tilde{\boldsymbol{\theta}}}{dt}, \quad \boldsymbol{\omega} = \dfrac{d\boldsymbol{\theta}}{dt}$

Уравнение баланса количества движения:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} - \nabla \times \mathbf{q} + \rho \mathbf{f} = \rho \frac{d}{dt}(\mathbf{v} + B_0\, \tilde{\boldsymbol{\omega}} + B\, \boldsymbol{\omega})$$

Уравнение баланса кинетического момента для несущих тел:

$$-\nabla \times \boldsymbol{\mu} + 2\mathbf{q} + \rho \mathbf{L} = \rho \mathbf{v} \times B_0\, \tilde{\boldsymbol{\omega}} + \rho \frac{d}{dt}(B_0\, \mathbf{v} + J_0\, \tilde{\boldsymbol{\omega}})$$

и для роторов: $-\nabla \times \mathbf{M} - \rho \mathbf{L} = \rho \mathbf{v} \times B\, \boldsymbol{\omega} + \rho \dfrac{d}{dt}(B\, \mathbf{v} + J\, \boldsymbol{\omega})$

Континуум двухспиновых частиц: определяющие уравнения

Уравнение баланса энергии:

$$\rho \frac{d\mathfrak{U}}{dt} = \boldsymbol{\tau} \cdot\cdot \frac{d\boldsymbol{\varepsilon}}{dt} + \mathbf{q} \cdot \frac{d\boldsymbol{\gamma}}{dt} + \boldsymbol{\mu} \cdot \frac{d(\nabla \times \tilde{\boldsymbol{\theta}})}{dt} + \mathbf{M} \cdot \frac{d(\nabla \times \boldsymbol{\theta})}{dt},$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \left(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T\right)/2, \quad \boldsymbol{\gamma} = \nabla \times \mathbf{u} - 2\tilde{\boldsymbol{\theta}}$$

Следовательно: $\boxed{\rho\mathfrak{U} = \rho\mathfrak{U}\left(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\gamma}, \nabla \times \tilde{\boldsymbol{\theta}}, \nabla \times \boldsymbol{\theta}\right)}$

Определяющие уравнения: $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{C} \cdot\cdot \boldsymbol{\varepsilon}$

$$\mathbf{q} = A_1(\nabla \times \mathbf{u} - 2\tilde{\boldsymbol{\theta}}) + A_2 \nabla \times \tilde{\boldsymbol{\theta}} + A_3 \nabla \times \boldsymbol{\theta}$$

$$\boldsymbol{\mu} = A_2(\nabla \times \mathbf{u} - 2\tilde{\boldsymbol{\theta}}) + A_4 \nabla \times \tilde{\boldsymbol{\theta}} + A_5 \nabla \times \boldsymbol{\theta}$$

$$\mathbf{M} = A_3(\nabla \times \mathbf{u} - 2\tilde{\boldsymbol{\theta}}) + A_5 \nabla \times \tilde{\boldsymbol{\theta}} + A_6 \nabla \times \boldsymbol{\theta}$$

Электромеханические аналогии и основные гипотезы

$$\boxed{\mathbf{M} = \chi\mathcal{E}, \qquad \rho(B\,\mathbf{v} + J\,\boldsymbol{\omega}) = \chi\mathfrak{B}, \qquad \chi = \mathrm{const}}$$

Вектор моментных напряжений $\mathbf{M}$, связанный с роторами $\longleftrightarrow$ Вектор электрического поля $\mathcal{E}$

Плотность кинетического момента роторов $\rho(B\,\mathbf{v} + J\,\boldsymbol{\omega})$ $\longleftrightarrow$ Вектор магнитной индукции $\mathfrak{B}$

Заряд: $q_* = \dfrac{\chi B(B - B_0)}{J^2}$

$$J = \frac{\chi^2 \mu\mu_0}{\rho}, \qquad A_6 = \frac{\chi^2}{\varepsilon\varepsilon_0}$$

Остальные параметры модели:

$$A_1 = \alpha^2 A_6, \quad A_2 = \alpha\beta A_6, \quad A_3 = -\alpha A_6, \quad A_4 = \beta^2 A_6, \quad A_5 = -\beta A_6,$$

$$\alpha = \frac{B - B_0}{2J}, \quad \beta = \frac{3J - J_0}{2J}, \quad J_0 = \frac{JB_0}{B}, \quad \epsilon = \frac{B^2}{J}$$

Сила Лоренца

В соответствие с выбором параметров, имеем связь между характеристиками взаимодействий:

$$\mathbf{q} = -\frac{B - B_0}{2J}\,\mathbf{M}, \qquad \boldsymbol{\mu} = -\frac{3J - J_0}{2J}\,\mathbf{M}$$

Предполагается, что $\tilde{\boldsymbol{\theta}} = -\boldsymbol{\theta}$ (здесь $\tilde{\boldsymbol{\theta}}$ — вектор поворотов несущих тел, $\boldsymbol{\theta}$ — вектор поворотов роторов).

Исключив вектор внешних моментов $\rho\mathbf{L}$ и вектор угловой скорости $\tilde{\boldsymbol{\omega}}$ из уравнений движения, получим:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho\mathbf{f} + \underbrace{q_*(\mathcal{E} + \mathbf{v} \times \mathcal{B})}_{\text{Lorentz force}} = \rho\left(1 - \frac{(B - B_0)^2}{J - J_0}\right)\frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

Если $\dfrac{(B - B_0)^2}{|J - J_0|} \ll 1$ то $\boxed{\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho\mathbf{f} + q_*(\mathcal{E} + \mathbf{v} \times \mathcal{B}) = \rho\dfrac{d\mathbf{v}}{dt}}$

Уравнения Максвелла

Откажемся от ограничения $\tilde{\boldsymbol{\theta}} = -\boldsymbol{\theta}$ и предположим, что $\rho\mathbf{L} = 0$ ($\rho\mathbf{L}$ — взаимодействие между несущими телами и роторами).

Пренебрежем нелинейными слагаемыми во всех уравнениях.

Из уравнения баланса кинетического момента для роторов следует:

$$\boxed{\nabla \times \mathcal{E} = -\frac{d\mathcal{B}}{dt}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\nabla \cdot \mathcal{B} = 0}$$

Продифференцировав по времени определяющее уравнение для вектора моментов $\mathbf{M}$ (взаимодействие роторов), получим:

$$\boxed{\nabla \times \mathcal{B} - \mu\mu_0 \mathbf{j} = \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{d\mathcal{E}}{dt}}$$

Выражение для электрического тока $\mathbf{j}$ будет рассмотрено далее.

Уравнения Максвелла

Вычислив дивергенцию уравнения баланса кинетического момента для несущих тел, с учетом других уравнений получим:

$$\frac{d^2}{dt^2}\nabla\cdot\mathcal{E}+\frac{q_*^2}{\rho_*\varepsilon\varepsilon_0}\left(\epsilon-\frac{q_*\chi\mu\mu_0}{\rho_*}\right)^{-1}\nabla\cdot\mathcal{E}=-\frac{q_*}{\varepsilon\varepsilon_0}\frac{d}{dt}\nabla\cdot\mathbf{v}\,.$$

Пренебрежем вторым слагаемым в левой части этого уравнения и проинтегрируем по времени. В результате получим:

$$\boxed{\nabla\cdot\mathcal{E}=\frac{q}{\varepsilon\varepsilon_0}}$$

Здесь q — плотность заряда в актуальной конфигурации:

$$\boxed{q=q_*(1-\nabla\cdot\mathbf{u})}$$

Уравнения Максвелла

Выражение для электрического тока имеет вид:

$$\mathbf{j} = \frac{\rho_*}{\mu\mu_0\chi}\left[\frac{3J - J_0}{2J_0}\boldsymbol{\nabla}\times(B_0\mathbf{v} + J_0\tilde{\boldsymbol{\omega}}) - (B - B_0)\,\tilde{\boldsymbol{\omega}}\right]$$

Пренебрежем всеми слагаемыми в левой части уравнения баланса кинетического момента для несущих тел. В результате это уравнение примет вид:

$$\rho\frac{d}{dt}(B_0\,\mathbf{v} + J_0\,\tilde{\boldsymbol{\omega}}) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \tilde{\boldsymbol{\omega}} = -\frac{B_0}{J_0}\,\mathbf{v}$$

С учетом последнего предположения получаем:

$$\boxed{\mathbf{j} = q_*\mathbf{v}}$$

Электрическая и магнитная энергия

Скорость изменения внутренней энергии за счет мощности моментных и антисимметричных силовых напряжений:

$$\frac{d(\rho_* U)}{dt} = \mathbf{M} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{\omega}) + \mathbf{q} \cdot (\nabla \times \mathbf{v} - 2\tilde{\boldsymbol{\omega}}) + \boldsymbol{\mu} \cdot (\nabla \times \tilde{\boldsymbol{\omega}})$$

Это уравнение можно представить в следующих двух формах:

$$\frac{d(\rho_* U)}{dt} = \mathcal{E} \cdot \left(-\mathbf{j} + \frac{1}{\mu\mu_0} \nabla \times \mathcal{B} \right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{d(\rho_* U)}{dt} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \mathcal{E} \cdot \mathcal{E} \right)}$$

Скорость изменения кинетической энергии роторов:

$$\frac{d(\rho_* K)}{dt} = \rho_* \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \epsilon \, \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + B \, \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2} J \, \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega} \right)$$

Это уравнение можно представить в следующих двух формах:

$$\boxed{\frac{d(\rho_* K)}{dt} = \frac{1}{\mu\mu_0} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \mathcal{B} \cdot \mathcal{B} \right)} \quad \Rightarrow \quad \frac{d(\rho_* K)}{dt} = \mathcal{B} \cdot \left(-\frac{1}{\mu\mu_0} \nabla \times \mathcal{E} \right)$$

Поток электромагнитной энергии и Джоулево тепло

Введем в рассмотрение полную энергию $\boxed{\mathbb{E} = K + U}$

которая является суммой кинетической энергии роторов и внутренней энергии, связанной с моментными напряжениями и антисимметричной частью силовых напряжений.

Введем в рассмотрение вектор электрической индукции $\mathcal{D}$, вектор магнитного поля $\mathcal{H}$ и вектор потока электромагнитной энергии $\mathbf{S}$:

$$\mathcal{D} = \varepsilon\varepsilon_0\,\mathcal{E}, \quad \mathcal{B} = \mu\mu_0\,\mathcal{H}, \quad \mathbf{S} = \mathcal{E} \times \mathcal{H}$$

В результате получим формулу для скорости изменения полной энергии:

$$\boxed{\frac{d(\rho_*\mathbb{E})}{dt} = -\mathcal{E}\cdot\mathbf{j} - \nabla\cdot\mathbf{S}}$$

Слагаемое $\mathcal{E}\cdot\mathbf{j}$ в последнем уравнении — это Джоулево тепло.

Заключение

- Предложена механическая модель, математическое описание которой сводится к уравнениям электромагнитного поля в веществе.
- Данная модель представляет собой континуум двухспиновых частиц. Несущие тела и роторы двухспиновых частиц представляют собой частицы специального вида, обладающие кинетической энергией, которая содержит перекрестный член, зависящий от шаровой части тензора инерции.
- В рамках этой модели получены сила Лоренца, уравнения Максвелла, выражения для электрической и магнитной энергии, а также уравнение баланса энергии, содержащее поток электромагнитной энергии и Джоулево тепло.

Спасибо за внимание!