Международная научная конференция по механике

ПЯТЫЕ ПОЛЯХОВСКИЕ ЧТЕНИЯ

3–6 февраля 2009 г.
Санкт–Петербург

ИЗБРАННЫЕ ТРУДЫ

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К ФОРМУЛИРОВКЕ СВЯЗАННОЙ ЗАДАЧИ ТЕРМОВЯЗКОУПРУГОСТИ, ВКЛЮЧАЮЩЕЙ УРАВНЕНИЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Иванова Е.А.
Санкт-Петербургский государственный политехнический университет
elenaivanova239@post.ru

1. Введение

В настоящее время термодинамика охватывает широчайший круг вопросов, включая газовую динамику, термоупругость, термовязкоупругость, термоэлектрические и термомагнитные эффекты, фазовые переходы и химические реакции. Вместе с тем, она представляет собой совокупность не связанных между собой областей науки, различающихся как трактовкой основных понятий, так и применяемыми математическими методами. Цель исследований, часть из которых представлена в данной работе, заключается в том, чтобы с единых позиций, исходя из фундаментальных законов механики и используя метод механики сплошной среды, описать термодинамические эффекты, изучаемые сейчас в разных областях термодинамики с помощью различных методов. В основе предлагаемой теории лежит континуальная механическая модель, математическое описание которой в частных случаях сводится к хорошо известным уравнениям термодинамики и термоупругости. Предлагаемая модель отличается от классических континуальных моделей наличием дополнительных степеней свободы и, соответственно, дополнительных инерционных и упругих характеристик, которым можно придать смысл термодинамических констант. Фактически, эта модель представляет собой двухкомпонентную среду, одна компонента которой — классический континуум, а вторая компонента — континуум, построенный исключительно на вращательных степенях свободы и моментных взаимодействиях. Идея математического описания различных физических явлений в микромире посредством континуальных моделей, основанных на вращательных степенях свободы и моментных взаимодействиях, неоднократно высказывалась П. А. Жилиным [1, 2, 3, 4]. Предлагаемая в настоящей работе, модель является реализацией данной идеи применительно к описанию тепловых явлений.

2. Тело–точка и квази–твердое тело

Хорошо известно, что выражение для кинетической энергии абсолютно твердого тела макроскопических размеров имеет вид

$$K = \frac{1}{2} m\, \underline{v} \cdot \underline{v} + \underline{v} \cdot m \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\omega} + \frac{1}{2} \underline{\omega} \cdot m \underline{\underline{J}} \cdot \underline{\omega}\,,$$

где $\underline{v}$ — скорость некоторой точки твердого тела, принятой за полюс, $\underline{\omega}$ — угловая скорость твердого тела, m — масса, а $m\underline{\underline{B}}$ и $m\underline{\underline{J}}$ — тензоры инерции, вычисленные относительно полюса. Значения тензоров инерции зависят от геометрии тела, распределения массы и выбора полюса. Заметим, что $m\underline{\underline{B}}$ — антисимметричный тензор, значение которого определяется массой тела и радиус–вектором, проведенным из полюса в центр масс. Если

Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ по поддержке молодых докторов наук (МД-4829.2007.1) и гранта Президента РФ по поддержке ведущих научных школ (НШ-2405.2008.1).

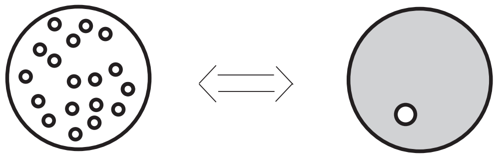

Рис. 1. Квази-твердое тело и его простейший аналог.

полюс совпадает с центром масс, тензор $m\underline{\underline{B}}$ обращается в ноль. В моментных континуальных теориях, таких как теория стержней, теория оболочек, трехмерная теория упругости и т. д., элементарный объем сплошной среды рассматривается как маленькое абсолютно твердое тело. Таким образом, тензоры инерции в механике сплошной среды имеют такую же структуру, как тензоры инерции макроскопических твердых тел. В частности, тензор $m\underline{\underline{B}}$ всегда антисимметричен. Если тело–точку не отождествлять с бесконечно малым абсолютно твердым телом, то тензор инерции $m\underline{\underline{B}}$ можно считать произвольным. Поскольку свойства тела–точки определяются его тензорами инерции, а все механические свойства содержатся в тензоре $m\underline{\underline{J}}$ и антисимметричной части тензора $m\underline{\underline{B}}$, симметричная часть тензора $m\underline{\underline{B}}$ может характеризовать какие-то не механические свойства тела-точки. Впервые подобные тела–точки были введены в рассмотрение П.А. Жилиным (см. [1, 2, 4]). Далее, частицы, состоящие из тел–точек, у которых тензор инерции $m\underline{\underline{B}}$ не является антисимметричным, будем называть неклассическими; это же название будем использовать для сплошной среды, элементарный объем которой представляет собой неклассическую частицу. Цель дальнейшего исследования заключается в построении модели сплошной среды, состоящей из неклассических частиц и изучении ее свойств.

Рассмотрим тело–точку, у которого все тензоры инерции шаровые, а кинетическая энергия, количество движения и собственный кинетический момент имеют вид:

$$K = m\left(\frac{1}{2}\underline{v}\cdot\underline{v} + B\,\underline{v}\cdot\underline{\omega} + \frac{1}{2}J\,\underline{\omega}\cdot\underline{\omega}\right), \quad \underline{K}_1 = m\,(\underline{v} + B\,\underline{\omega}), \quad \underline{K}_2 = m\,(B\,\underline{v} + J\,\underline{\omega}). \tag{1}$$

Далее, рассмотрим частицу (см. рис. 1, слева), представляющую собой квази–твердое тело, составленное из тел–точек вида (1). Данная частица является твердым телом в том смысле, что в процессе движения расстояния между любыми двумя точками этой частицы сохраняются. Однако, в отличие от обычного твердого тела, в каждой точке этой частицы находится тело-точка, которое может совершать произвольное вращательное движение, не зависящее от вращательных движений соседних тел–точек и вращательного движения самой частицы. Иными словами, рассматриваемая частица — это многороторный гиростат, роторы которого представляют собой тела–точки вида (1), совершающие произвольное вращательное движение. Несущее тело гиростата является безынерционным, а роторы распределены непрерывным образом. Движение несущего тела определяется радиус–вектором центра масс $\underline{R}(t)$, скоростью центра масс $\underline{v}(t)$, тензором поворота $\tilde{\underline{\underline{P}}}(t)$ вектором угловой скорости $\tilde{\underline{\omega}}(t)$.

Рассмотрим ротор, положение которого относительно центра масс в отсчетной конфигурации определяется радиус–вектором $\tilde{\underline{r}}$, а вращательное движение задается тензором поворота $\underline{\underline{P}}_*(\tilde{\underline{r}}, t)$. Радиус–вектор, определяющий положение данного ротора в актуальной конфигурации, а также трансляционная и угловая скорости вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} &\underline{R}_*(\tilde{\underline{r}}, t) = \underline{R}(t) + \tilde{\underline{\underline{P}}}(t)\cdot\tilde{\underline{r}}, \qquad \underline{v}_*(\tilde{\underline{r}}, t) = \underline{v}(t) + \tilde{\underline{\omega}}(t)\times\tilde{\underline{\underline{P}}}(t)\cdot\tilde{\underline{r}}, \\ &\underline{\omega}_*(\tilde{\underline{r}}, t) = -\frac{1}{2}\left(\dot{\underline{\underline{P}}}_*(\tilde{\underline{r}}, t)\cdot\underline{\underline{P}}_*^T(\tilde{\underline{r}}, t)\right)_\times . \end{aligned} \tag{2}$$

Предположив, что угловые скорости вращения роторов примерно одинаковы $\underline{\omega}_*(\tilde{\underline{r}}, t) \approx \underline{\omega}(t)$, и воспользовавшись формулами (2), нетрудно показать, что выраже-

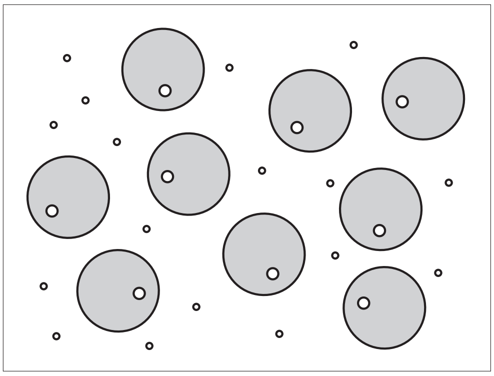

Рис. 2. Элементарный объем среды, состоящей из однороторных гиростатов.

ния для кинетической энергии, количества движения и кинетического момента имеют вид вид

$$K(A) = m\left(\frac{1}{2}\,\underline{v}\cdot\underline{v} + \frac{1}{2}\,\underline{\tilde{\omega}}\cdot\underline{\underline{I}}_*\cdot\underline{\tilde{\omega}} + B\,\underline{v}\cdot\underline{\omega} + \frac{1}{2}J\,\underline{\omega}\cdot\underline{\omega}\right), \quad m\underline{\underline{I}}_* = \underline{\underline{\tilde{P}}}\cdot\int_{(m)}\Big(\tilde{r}^2\underline{\underline{E}} - \tilde{\underline{r}}\tilde{\underline{r}}\Big)dm\cdot\underline{\underline{\tilde{P}}}^T,$$

$$\underline{K}_1(A) = m\big(\underline{v} + B\underline{\omega}\big), \quad \underline{K}_2^Q(A) = m\Big[\underline{R}\times(\underline{v} + B\,\underline{\omega}) + \underline{\underline{I}}_*\cdot\underline{\tilde{\omega}} + B\,\underline{v} + J\,\underline{\omega}\Big]. \quad (3)$$

Проанализировав формулы (3), нетрудно заметить, что приближенные значения кинетической энергии, количества движения и кинетического момента квази–твердого тела совпадают с соответствующими динамическими структурами однороторного гиростата (рис. 1, справа), ротор которого расположен в центре масс квази-твердого тела. Несущее тело этого гиростата представляет собой классическое твердое тело, инерционные свойства которого характеризуются тензором инерции $\underline{\underline{I}}_*$, а ротор является неклассической частицей, аналогичной телам–точкам, составляющим квази-твердое тело (рис. 1, слева).

3. Простейшая модель континуума однороторных гиростатов

Рассматривается материальная среда (см. рис. 2), состоящая из однороторных гиростатов вида (3). Динамика этой среды в рамках линейной теории описывается уравнениями

$$\nabla\cdot\underline{\underline{\tau}} + \rho\underline{f} = \rho\frac{d}{dt}\big(\underline{v} + B\underline{\omega}\big), \qquad \nabla\cdot\underline{\underline{\mu}} + \underline{\underline{\tau}}_\times + \rho\underline{m} = \rho\frac{d}{dt}\big(\underline{\underline{I}}_0\cdot\underline{\tilde{\omega}}\big), \qquad \nabla\cdot\underline{\underline{M}} + \rho\underline{L} = \rho\frac{d}{dt}\big(B\underline{v} + J\underline{\omega}\big),$$

$$\underline{v} = \frac{d\underline{u}}{dt}, \qquad \underline{\tilde{\omega}} = \frac{d\underline{\varphi}}{dt}, \qquad \underline{\omega} = \frac{d\underline{\theta}}{dt}, \qquad \underline{\underline{\varepsilon}} = \nabla\underline{u} + \underline{\underline{E}}\times\underline{\varphi}, \qquad \underline{\underline{\kappa}} = \nabla\underline{\varphi}, \qquad \underline{\underline{\vartheta}} = \nabla\underline{\theta}, \quad (4)$$

где $\underline{\underline{\tau}}$ — тензор напряжений, $\underline{\underline{\mu}}$ — тензор моментных напряжений, характеризующий взаимодействия между несущими телами гиростатов, $\underline{\underline{M}}$ — тензор моментных напряжений, характеризующий взаимодействия между роторами; ρ — объемная плотность массы, $\underline{f}$, $\underline{m}$, $\underline{L}$ — массовые плотности внешних воздействий; $\underline{u}$ — вектор перемещений, $\underline{\varphi}$, $\underline{\theta}$ — векторы углов поворота, характеризующие вращения несущих тел гиростатов и их роторов соответственно; $\underline{\underline{\varepsilon}}$, $\underline{\underline{\kappa}}$, $\underline{\underline{\vartheta}}$ — тензоры деформации. Для того, чтобы замкнуть систему уравнений (4), ее следует дополнить соотношениями упругости, выражающими связь между тензорами напряжений и тензорами деформации.

Свободное пространство между гиростатами заполнено телами–точками, имеющими точно такую же структуру, как роторы гиростатов (см. формулы (1)). Тела–точки в пространстве между гиростатами являются элементарными частицами сплошной среды, которую мы условно назовем «тепловым эфиром». Таким образом материальный континуум, представленный на рис. 2, — это двухкомпонентная среда. Однако далее мы не ставим перед собой цели исследования взаимного влияния материальных сред, составляющих двухкомпонентный континуум. В качестве исследуемого объекта будет рассматриваться среда, состоящая из гиростатов. Взаимодействие между несущими телами гиростатов и их роторами определяет напряжения в среде и характеризуется тензорами силовых и моментных напряжений $\underline{\underline{\tau}}$, $\underline{\underline{\mu}}$, $\underline{\underline{M}}$. «Тепловой эфир», находящийся в пространстве между гиростатами, являются внешним фактором по отношению к изучаемой нами среде и воздействие теплового эфира на гиростаты мы будем рассматривать внешний момент в уравнении динамики роторов. Рассмотрим частный случай линейной теории среды, состоящей из однороторных гиростатов, приняв два важных предположения.

Предположение 1. Вектор $\underline{L}$ — массовая плотность внешних воздействий на роторы гиростатов — представляет собой сумму момента $\underline{L}_h$, характеризующего внешние воздействия различного происхождения, и момента линейного вязкого трения: $\underline{L}_f = -\beta(B\underline{v}+J\underline{\omega})$, где β — постоянная величина. Момент $\underline{L}_f$ характеризует воздействие «теплового эфира». Структура этого момента выбрана в соответствие с результатами решения модельных задач, обсуждение которых выходит за рамки данной работы. Поясним физический смысл этого момента. Напомним, что однороторный гиростат является приближенной моделью квази–твердого тела (см. рис. 1). Представим себе, что роторы квази–твердых тел взаимодействуют с телами-точками «теплового эфира», причем это взаимодействие описывается упругими моментами, точно такими же, как моменты взаимодействия тел-точек «теплового эфира» между собой и как моменты взаимодействия роторов квази–твердых тел между собой. «Тепловой эфир» имеет бесконечную протяженность. Поэтому он уносит энергию колеблющихся роторов.

Предположение 2. Тензор моментных напряжений $\underline{\underline{M}}$, возникающий в результате взаимодействия роторов, считается шаровым тензором: $\underline{\underline{M}} = T\underline{\underline{E}}$.

С учетом сделанных предположений, уравнение движения роторов (третье уравнение системы (4)) принимает вид

$$\nabla T - \rho\beta\,(B\underline{v} + J\underline{\omega}) + \rho\underline{L}_h = \rho\frac{d}{dt}\big(B\underline{v} + J\underline{\omega}\big). \tag{5}$$

Простейшая физически линейная теория получается путем задания плотности внутренней энергии в форме:

$$\rho U = \underline{\underline{\tau}}_0 \cdot\cdot \underline{\underline{\varepsilon}} + T_*\vartheta + \frac{1}{2}\underline{\underline{\varepsilon}} \cdot\cdot\ {}^4\underline{\underline{C}} \cdot\cdot \underline{\underline{\varepsilon}} + \Upsilon\,\varepsilon\,(\vartheta - \vartheta_*) + \frac{1}{2}K(\vartheta - \vartheta_*)^2, \quad \varepsilon = \operatorname{tr}\underline{\underline{\varepsilon}}, \quad \vartheta = \operatorname{tr}\underline{\underline{\vartheta}}. \tag{6}$$

Здесь $\underline{\underline{\tau}}$ и T_* — начальные напряжения, ${}^4\underline{\underline{C}}$, Υ, K — постоянные величины, характеризующие жесткость рассматриваемой среды. Согласно (6), соотношения упругости имеют вид:

$$\underline{\underline{\tau}}^T = \underline{\underline{\tau}}_0^T + {}^4\underline{\underline{C}}_1 \cdot\cdot \underline{\underline{\varepsilon}} + \Upsilon\,(\vartheta - \vartheta_*)\,\underline{\underline{E}}, \qquad \underline{\underline{\mu}} = 0, \qquad T = T_* + \Upsilon \operatorname{tr}\underline{\underline{\varepsilon}} + K(\vartheta - \vartheta_*). \tag{7}$$

Итак, простейшая линейная теория материальной среды, состоящей из однороторных гиростатов, описывается уравнениями (4), (5), (7).

4. Температура, энтропия и модель внутреннего трения

Выше построена математическая модель упругого континуума однороторных гиростатов. Предположим, что эта модель описывает поведение классической среды, которая помимо упругих свойств обладает еще и свойствами вязкости и теплопроводности. Исходя из этого предположения дадим термодинамическую интерпретацию переменных, описывающих движение и взаимодействие роторов, и проведем идентификацию параметров модели с известными термодинамическими константами. Рассмотрим уравнение баланса энергии

$$\rho\frac{dU}{dt} = \underline{\underline{\tau}}^T \cdot\cdot \frac{d\underline{\underline{\varepsilon}}}{dt} + \underline{\underline{\mu}}^T \cdot\cdot \frac{d\underline{\underline{\kappa}}}{dt} + T\,\frac{d\vartheta}{dt}. \tag{8}$$

Представим себе, что (8) — это уравнение баланса энергии для классической моментной среды. Тогда последнее слагаемое в правой части уравнения (8) имеет смысл термодинамического слагаемого. Величина T приобретает смысл температуры, а величина ϑ — объемной плотности энтропии.

Очевидно, что температура и энтропия, определяемые формулой (8), не совпадают по размерности с абсолютной температурой и энтропией классической термодинамики. Эта проблема решается путем введения нормировочного коэффициента:

$$T = aT_a, \qquad \vartheta = \frac{1}{a}\,\vartheta_a.$$

Здесь a — нормировочный коэффициент, T_a — абсолютная температура, измеряемая термометром, ϑ_a — объемная плотность абсолютной энтропии. Введя в рассмотрение аналогичные соотношения для остальных переменных и соответствующим образом отнормировав параметры:

$$\underline{\theta} = \frac{1}{a}\,\underline{\theta}_a, \quad \underline{\omega} = \frac{1}{a}\,\underline{\omega}_a, \quad \underline{L}_h = a\underline{L}_h^a, \quad \underline{L}_f = a\underline{L}_f^a, \quad B_a = \frac{B}{a}, \quad J_a = \frac{J}{a^2}, \quad \Upsilon_a = \frac{\Upsilon}{a}, \quad K_a = \frac{K}{a^2}$$

можно исключить из уравнений динамики среды нормировочный коэффициент a.

Заметим, что в случае $B_a = 0$ уравнение динамики среды (первое уравнение системы (4)) совпадает с классическим. Вычислим дивергенцию уравнения (5) и преобразуем полученное уравнение с учетом (4). В результате придем к уравнению, которое совпадает с классическим уравнением теплопроводности с точностью до слагаемых, содержащих вторые производные по времени:

$$\Delta T_a - \frac{\rho\beta J_a}{K_a}\frac{dT_a}{dt} - \frac{\rho J_a}{K_a}\frac{d^2T_a}{dt^2} = \beta\rho\left(B_a - \frac{\Upsilon_a J_a}{K_a}\right)\frac{d\varepsilon}{dt} + \rho\left(B_a - \frac{\Upsilon_a J_a}{K_a}\right)\frac{d^2\varepsilon}{dt^2} - \rho\nabla\cdot\underline{L}_h^a. \tag{9}$$

Сравнив определяющие уравнения (7) и уравнение теплопроводности (9) с классическими, приходим к выводу, что в случае $B_a = 0$ эти уравнения совпадают, если:

$$\frac{\Upsilon_a^2}{K_a} = K_{ad} - K_{iz}, \qquad \frac{\Upsilon_a}{K_a} = -\alpha K_{iz}, \qquad \frac{\beta J_a}{K_a} = \frac{c_v}{\lambda}, \qquad \frac{\beta\rho\Upsilon_a J_a}{K_a} = -\frac{\alpha K_{iz}T_a^*}{\lambda}, \qquad \nabla\cdot\underline{L}_h^a = \frac{q}{\lambda}, \tag{10}$$

где K_{ad} и K_{iz} — адиабатический и изотермический модули объемного сжатия, α — объемный коэффициент теплового расширения, c_v — удельная теплоемкость при постоянном объеме, λ — коэффициент теплопроводности, q — скорость подвода тепла. Коэффициент при второй производной по времени от температуры в уравнении теплопроводности (9) связан со скоростью распространения тепловых колебаний $c_r = \sqrt{K_a/(\rho J_a)}$. Для идентификации этого параметра необходимо провести сравнение с фононной теорией. Обсуждение этого вопроса выходит за рамки данной работы.

Хорошо известно, что диссипация энергии, обусловленная теплопроводностью, происходит только в том случае, когда процесс не изотермический и не адиабатический. Диссипация, обусловленная вязкостью, имеет место всегда, в том числе и при адиабатическом процессе. Основываясь на на этом факте и имея целью рассмотреть диссипативный процесс, связанный исключительно с вязкостью, предположим что значение объемной плотности энтропии постоянно:

$$\tilde{\vartheta}_a = \text{const} \qquad \Rightarrow \qquad \tilde{T}_a = \Upsilon_a\,\varepsilon. \tag{11}$$

Выше при сравнении уравнений, описывающих динамику континуума однороторных гиростатов, с классическими уравнениями термоупругости, параметр B_a считался равным нулю. Откажемся от этого ограничения и предположим, что наличие слагаемых, содержащих параметр B_a, связано с механизмом внутреннего трения. Чтобы обосновать данную гипотезу, рассмотрим уравнение теплопроводности (9). Преобразуем это уравнение с учетом условия адиабатичности (11). В результате получим:

$$\Upsilon_a \, \Delta\varepsilon - \rho\beta B_a \, \frac{d\varepsilon}{dt} - \rho B_a \, \frac{d^2\varepsilon}{dt^2} = -\rho\nabla \cdot \underline{L}_h^a. \tag{12}$$

Нетрудно видеть, что уравнение (12) содержит диссипативное слагаемое, никак не связанное с теплопроводностью.

Для выяснения физического смысла коэффициентов в уравнении (12), отвлечемся от обсуждения предлагаемой модели и рассмотрим движение вязкой жидкости, давление в которой подчиняется закону Стокса. Состояние жидкости при отсутствии внешних объемных нагрузок описывается уравнениями:

$$\nabla p = \rho \frac{d\underline{v}}{dt}, \qquad p = \eta_v \frac{d\varepsilon}{dt} \qquad \Rightarrow \qquad \eta_v \nabla\varepsilon = \rho\underline{v}, \tag{13}$$

где η_v — объемная (акустическая) вязкость. Вычислив дивергенцию третьего уравнения (13), получим уравнение самодиффузии, которое можно обобщить, добавив в него источниковый член $\rho\Psi$:

$$\eta_v \Delta\varepsilon - \rho\frac{d\varepsilon}{dt} = -\rho\Psi. \tag{14}$$

Сравнив уравнение (12) с уравнением самодиффузии (14), приходим к выводу, что эти уравнения совпадают с точностью до инерционного слагаемого, при условии, что

$$\frac{\Upsilon_a}{\beta B_a} = \eta_v, \qquad \frac{1}{\beta B_a}\nabla \cdot \underline{L}_h^a = \Psi. \tag{15}$$

Согласно уравнениям (10), (15), параметр B_a отрицателен при конечных значениях объемной вязкости η_v и обращается в ноль при $\eta_v \to \infty$. Как показывает анализ коэффициентов уравнения (9), теплопроводность характеризует способность вещества отдавать энергию в «тепловой эфир», а объемная вязкость характеризует способность вещества подкачивать энергию из «теплового эфира». Будет ли эта способность реализована — зависит от других свойств вещества и внешних обстоятельств. Объемная вязкость газов очень мала, поэтому газы способны аккумулировать энергию «теплового эфира», так что, несмотря на диссипацию энергии вследствие теплопроводности, частицы газа пребывают в состоянии интенсивного движения. Объемная вязкость жидкостей (даже тех, которые считаются не вязкими) значительно превосходит объемную вязкость газов. Объемная вязкость твердых тел настолько велика, что ее можно считать стремящейся к бесконечности, а параметр B_a — пренебрежимо малым. Таким образом, для твердых тел допустима постановка задачи термоупругости, для жидкостей и газов важным является учет слагаемых, наличие которых обусловлено конечными значениями объемной вязкости.

Литература

[1] *Жилин П.А.* Теоретическая механика. Фундаментальные законы механики. Учеб. пособие. СПб.: Изд-во СПбГПУ, 2003. 340 с.

[2] *Жилин П.А.* Актуальные проблемы механики. Т. 1. СПб., 2006. 306 с.

[3] *Zhilin P.A.* Advanced problems in mechanics. V. 2. St. Petersburg, 2006. 271 c.

[4] *Жилин П.А.* Теоретическая механика. Учеб. пособие. СПб.: Изд-во СПбГТУ, 2001. 146 с.