Исходные понятия и фундаментальные законы рациональной механики*

Аннотация

Доклад содержит обсуждение современных трактовок основных понятий механики. Эти трактовки по форме, а иногда и по существу, отличаются от приводимых в учебниках механики. Хотя вводить какие бы то ни было модификации в устоявшиеся каноны крайне нежелательно и даже вредно, тем не менее в любой развивающейся науке наступает момент, когда модификации необходимы. Важно только, чтобы эти модификации не вступали в противоречие с уже доказанными положениями и не отрицали ничего из достигнутого ранее. В частности, эйлерова механика включает в себя все достижения ньютоновой механики и добавляет к ней важные новые возможности, расширяющие сферу приложения механики.

1 Введение

Основой классической механики, лежащей вне логических структур, является убеждение в возможности объективного описания окружающего нас мира. Главной особенностью трехтысячелетнего развития механики является ее эволюционный характер, при котором все основные структуры механики формировались и углублялись многими поколениями ученых. Когда тому или иному утверждению механики приписываются имена ученых, то это, как правило, не имена единоличных авторов, а дань великим заслугам этих ученых. Поэтому современные формулировки многих принципов значительно отличаются от первоначальных, но еще значительнее отличаются современные формы их применения. Заметить эти изменения удается только на больших интервалах времени. Революция в физике, произошедшая в начале XX века, не изменила эволюционного характера развития механики, но резко обострила внимание к ее логическим основам. Вместе с тем начал стремительно расти разрыв между новейшей физикой и классической механикой. Последняя не приняла многих концепций новейшей физики из-за их логической незавершенности. С другой стороны, к

*Жилин П.А. Исходные понятия и фундаментальные законы рациональной механики // Труды XXII летней школы "Анализ и синтез нелинейных механических колебательных систем", Санкт-Петербург, 1995. С. 10–36.

концу XIX века уже отчетливо проявилось, что классической механике чего-то недостает. Никакое логическое совершенство, которое к тому же недостижимо, не могло затушевать того, что существовал целый ряд фактов, которые классическая механика не могла не только объяснить, но даже и полноценно описать. Главными здесь были явления электромагнетизма, которые не вписывались без очевидных натяжек в структуры механики. Другим фактом являлось "печальное поведение" (выражение А.Ю.Ишлинского) Меркурия. Были, разумеется, и другие факты. Сказанное, однако, не привело ни к кризису механики, ни к ее застою. Напротив, с конца XIX века начало развиваться некое расширение классической механики, связанное с включением в сферу действия механики не только трансляционных (обычных) движений, но и так называемых спинорных движений. Без последних, по воззрениям Дж.Максвелла, описание электромагнитного поля невозможно. Новейшая физика пошла по другому пути и трактует магнитное поле как чисто релятивистский эффект, что неудивительно, ибо в новейшей физике и электрическое и магнитное поля вводятся через понятие силы. Другой важной особенностью, не учитываемой классической механикой, является отсутствие в ней понятия излучения, с помощью которого описывается взаимодействие электромагнитного поля с веществом. Описанные и некоторые другие особенности классической механики были почему-то объявлены органическими пороками классической механики и новейшая физика заявила о "решительном отказе от воззрений классической механики при описании явлений микромира". Здесь не место вдаваться в дискуссии. Замечу только, что истинные возможности механики намного больше тех, о которых говорят физики. Цель данного краткого сообщения как раз и состоит в том, чтобы дать набросок взглядов современной рациональной механики. Огромный вклад в формирование этих взглядов внес Леонард Эйлер, который впервые указал на принципиальную неполноту ньютоновской механики. В заключение этого пункта отмечу, что, несмотря на обилие аксиом, изложенное ниже ни в коем случае нельзя рассматривать как попытку аксиоматического построения механики. Я вполне убежден, что так называемая шестая проблема Гильберта принципиально не допускает решения.

2 Пространство, время, движения

2.1 Тела отсчета. Время. Системы отсчета

Наиболее глубинными представлениями в механике являются представления о пространстве и времени. Долгое время эти представления опирались на чисто интуитивное восприятие этих понятий. В частности, общеизвестны ньютоновские определения абсолютного пространства и времени [1]. Основным в них является постулат об объективном характере пространства и времени. Однако использовать ньютоновские определения в рациональных построениях невозможно, ибо в однородном, лишенном всяких меток, пространстве невозможно обнаружить движение, равно как невозможно дать рациональное истолкование равномерному ходу времени. Все это подробно объясняется самим Ньютоном. По этой причине в рациональной механике вводятся некие рукотворные конструкции, называемые телами отсчета. Для этого в рассмотрение вводится репер с вершиной, обозначаемой меткой O, и тремя некомпланарными "векторами" $\mathbf{e}_k$, то есть тремя стрелками, сделанными, например, из дерева. Этот репер никак не привязан к неподвижному абсолютному пространству, ибо у нас нет возможности сделать это. "Векторы" $\mathbf{e}_k$ нельзя назвать настоящими векторами, ибо невозможно определить их направления в абсолютном (неподвижном) пространстве. Более того, невозможно сказать, остаются ли эти направления фиксированными относительно абсолютного пространства или они как-то меняются. Зато существование "векторов" $\mathbf{e}_k$ позволяет ввести в рассмотрение истинные векторы, направление которых относительно "векторов" $\mathbf{e}_k$ определяется однозначно. Итак, ввели репер $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. Возьмем дополнительно три одномерных множества $-\infty \leq x^k \leq \infty$, $(k = 1, 2, 3)$, где числа x^k безразмерны, и введем вектор положения

$$\mathbf{r} = x^k\, \mathbf{e}_k \equiv x^1\, \mathbf{e}_1 + x^k\, \mathbf{e}_2 + x^k\, \mathbf{e}_3\,, \qquad -\infty \leq x^k \leq \infty\,. \tag{1}$$

Будем считать, что вектор $\mathbf{r}$, отвечающий неким фиксированным значениям чисел x^k, определяет точку, фиксированную относительно репера репер $\{O, \mathbf{e}_k\}$. Определим скалярное произведение "векторов" $\mathbf{e}_k$

$$g_{mn} = \mathbf{e}_m \cdot \mathbf{e}_n \equiv |\mathbf{e}_m|\,|\mathbf{e}_n| \cos{(\mathbf{e}_m, \mathbf{e}_n)}, \tag{2}$$

где числа g_{mn} определены, если мы умеем измерять длины и углы, то есть имеем соответствующие инструменты, и образуют симметричную положительно определенную матрицу. В общем случае, числа g_{mn} определяют масштабы длин и углы в теле отсчета. Если числа g_{mn} заданы, то можно определить расстояние между точками A и B по формуле

$$|\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B|^2 = g_{mn}\,(x^m_A - x^m_B)\,(x^n_A - x^n_B)\;. \tag{3}$$

Числа x^k_A называются координатами точки A. Вершине репера отвечают координаты $x^k_A = 0$.

Определение 2.1: репер $\{O, \mathbf{e}_k\}$ с присоединенным к тему множеством точек (1) называется телом отсчета.

Сам репер $\{O, \mathbf{e}_k\}$ называется отсчетным, а числа x^k_A называются отсчетными координатами. Ни отсчетный репер, ни отсчетные координаты никогда не меняются, ибо именно они и порождают тело отсчета. Конечно, в теле отсчета можно вводить сколько угодно других систем координат, но об этом будет сказано позднее. Здесь важно подчеркнуть, что тензоры любого ранга лишены всякого смысла вне тела отсчета, и никакие операции между тензорами, заданными в разных телах отсчета, невозможны. Легко понять, что тело отсчета есть трехмерное евклидово пространство. Невозможно обнаружить движение тела отсчета относительно воображаемого (или истинно существующего) абсолютного пространства, но движение разных тел отсчета друг относительно друга обнаружить можно. Легко обнаружить и движение какого-либо тела относительно тела отсчета. Говоря о движении, мы подразумеваем, что вектор положения материальной точки в данном теле отсчета определяется как функция независимой переменной t, называемой временем. Для измерения времени используется прибор, называемый часами. Понятие времени — одно из наиболее трудных в науках о Природе. И.Ньютон писал [2], с.45: "Таким образом, повсюду, где в дальнейшем встречается слово "время" ... под ним нужно понимать не время в его формальном значении, а только ту ***отличную от времени*** величину, посредством равномерного роста или течения которой выражается и измеряется время".

Принять это высказывание можно только на глубоко интуитивном уровне, но никак ни на уровне логического мышления. Поэтому к концу XIX века в механике утвердилась точка зрения, зафиксированная Л.Больцманом: “Взгляд на хронометр дает нам значение той независимой переменной, которую мы назвали временем” [3], с.8. Конечно, неудовлетворенность подобным определением времени оставалась. Например, в прошлом существовала традиция завершать диссертации списком нерешенных проблем. В 1900 г. П.Боль среди таковых проблем указал следующую: “Желательно было бы ввести время в механику более удовлетворительным образом, чем это делается теперь” [4], с.198. Аналогичное требование прозвучало и в знаменитом докладе Д.Гильберта на II Международном конгрессе по математике в Париже (1900 г.) при формулировке им 6-ой проблемы. Трудности, возникающие при определении времени, да и многих других понятий механики, наиболее полно были проанализированы в многих работах А.Пуанкаре — см., например, [5]. Удивительно, что эти исследования до их пор либо вообще игнорируются, либо очевидным образом искажаются. Если говорить о времени, то согласно А.Пуанкаре, главная проблема в том, что отсутствует гарантия действительного равенства двух равных интервалов времени, т.е. это проблема ньютоновского равномерного течения времени. Одно из главных интуитивных представлений о свойствах времени заключается в принятии объективного характера понятий прошлого и будущего. Многие убеждены в необратимости течения времени, т.е. в том, что прошлое и будущее никогда не меняются местами. В этом и состоит принцип причинности, принимаемый явно или неявно в механике. Правда, в новейшей физике понятия прошлого и будущего уже относительны и зависят от выбора системы отсчета. Поэтому принцип причинности в новейшей физике не работает. Не вдаваясь в дискуссии по этому вопросу, отмечу только, что в данной работе я следую классическим традициям.

Определение 2.2: Тело отсчета, снабженное часами, называется системой отсчета.

Можно ввести сколько угодно систем отсчета и пока что все они равноправны. Пусть некая материальная точка движется в выбранной системе отсчета, т.е. ее вектор положения $\mathbf{r}_A$ задан как функция времени $\mathbf{r}_A(t)$. Последняя полностью определяет движение частицы относительно тела отсчета. Однако такое описание не носит объективного характера, ибо мы не в состоянии понять, что именно движется: частица, тело или и то и другое вместе. Причем степень нашего незнания произвольно велика: любая функция $\mathbf{r}_A(t)$ может трактоваться как движение любой частицы относительно какого-либо тела отсчета. Понятно, что подобное описание движения никого не интересует. Не имеют объективного характера скорость $\dot{\mathbf{r}}_A(t)$ ускорение $\ddot{\mathbf{r}}_A(t)$ частицы, поскольку, помимо неопределенности в истолковании вектора $\mathbf{r}_A(t)$, здесь добавляется неопределенность в выборе времени, ибо время, введенное выше, определено с точностью до преобразования $t \to \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ — любое монотонно возрастающее отображение. Из сказанного следует, что введенные выше системы отсчета — это совсем не те понятия, на которых базируется (по существу) классическая механика. Нужны какие-то дополнительные постулаты, носящие не логический, а физический (интуитивный) характер. В качестве такого постулата в классической физике используется принцип инерции Галилея.

2.2 Принцип инерции Галилея. Инерциальные системы отсчета. Абсолютное пространство-время

Фундаментальным принципом классической физики, лежащим в основе буквально всех ее понятий, является принцип инерции Галилея (**GPI**). Отказ от этого принципа разрушает все здание классической физики.

Аксиома A1 (**GPI**): всякая изолированная (одинокая во всем мире) материальная точка движется в абсолютном пространстве прямолинейно и равномерно.

Понятно, что **GPI** не является аксиомой в традиционном смысле, ибо использует не определенные заранее понятия: абсолютное пространство, прямолинейное и равномерное движение. Фактически **GPI** дает только идею введения этих понятий, причем **GPI** принципиально не может быть подтвержден или опровергнут экспериментально, что и придает ему непреходящую ценность. Прежде всего, **GPI** дает нам некое эталонное движение. А именно, движение изолированной частицы **называется** прямолинейным и равномерным (в воображаемом абсолютном пространстве невозможно дать определение прямой линии). В теле отсчета понятие прямой линии уже определено, Поэтому их всех мыслимых тел отсчета можно отобрать кандидатов на роль абсолютного пространства.

Определение 2.3: тело отсчета называется инерциальным, если траектория любой изолированной частицы есть прямая линия в этом теле отсчета.

Инерциальных тел отсчета бесконечно много. Они движутся друг относительно друга и различаются масштабами расстояний (матрицами g_{mn}). Важно, что при отборе инерциальных тел отсчета не используется понятие времени.

Определение 2.4: множество инерциальных тел отсчета называется абсолютным пространством.

Определение 2.5: часы называются оттарированными в соответствии с **GPI**, если за одинаковые по этим часам интервалы времени изолированная частица пролетает одинаковые расстояния в инерциальном теле отсчета.

Легко убедиться, что время, измеряемое по различным часам, оттарированным по Галилею, определено с точностью до линейного преобразования: $t \to kt + t_0$, где k определяет масштаб измерения времени, а t_0 — начало отсчета.

Определение 2.6: инерциальное тело отсчета, снабженное часами, оттарированными по Галилею, называется инерциальной системой отсчета.

Определение 2.7: множество инерциальных систем отсчета называется абсолютным пространством-временем классической физики.

Из сказанного выше очевидно, что в классической физике пространство-время образует единое четырехмерное пространство, т.е. в нем пространственно-временные отношения не являются независимыми, как это утверждается в новейшей физике.

Замечание. Аксиоматическое введение времени детально обсуждается в работе С.Зарембы [7]. Более детальное изложение содержания этого и следующего пунктов можно найти в работе [8].

2.3 Системы отсчета и системы координат. Принцип объективности

Все точки тела отсчета идентифицированы отсчетными координатами. При желании можно изменить систему идентификации точек тела отсчета.

Определение 2.8: система идентификации точек тела отсчета называется системой координат.

Системой координат в каждой точке отсчета ставится во взаимно однозначное соответствие тройка чисел y^k

$$y^k = y^k(x^1, x^2, x^3, t) \equiv y^k(y, t) \qquad \Longrightarrow \qquad x' = x'(y', t)\,. \tag{4}$$

Здесь используется подвижная система координат. Системы координат можно заменять

$$y^{k'} = y^{k'}(y, t) \qquad \Longrightarrow \qquad y^m = y^m(y', t)\,. \tag{5}$$

где как бы забыто о существовании формул (4). Законы преобразования координат тензоров определяются именно по отношению к заменам (5), но ни в коем случае не по отношению к заменам систем отсчета. Поскольку выбор системы координат совершенно произволен, то выдвигается специальное требование.

Аксиома А2: Принцип объективности: все физические величины и законы объективны и не зависят от выбора системы координат.

Обратим внимание, что многие физические величины (скорости, кинетическая энергия и т.д.) зависят от выбора системы отсчета. Недопустимо поэтому смешение понятий систем отсчета и систем координат. Замены систем отсчета подробно обсуждаются [8], где также вводятся инвариантные дифференциальные операторы.

2.4 Трансляционные и спинорные движения. Спин-векторы и аксиальные векторы. Ориентация системы отсчета. Описание спинорных движений

Существуют два принципиально различных вида движения: трансляционные и спинорные. Первые определяются заданием векторов положений и описывают перемещения (трансляции) тел в системе отсчета. Спинорные движения определяются заданием функций времени, значениями которых являются собственно ортогональные тензоры размерности три. Сопутствующие спинорным движениям характеристики (векторы поворота, угловые скорости и т.д.) описываются с помощью понятия аксиального вектора, прообразом которого являются объекты, называемые ниже спин-векторами. Именно спин-векторы являются прямыми носителями физического содержания того или иного спинорного понятия. Чтобы определить спин-вектор необходимо в теле отсчета задать прямую, называемую осью спин-вектора, и в плоскости, отрогональной оси, задать круговую стрелку, охватывающую ось. Длина этой круговой стрелки называется модулем спин-вектора, а направление стрелки показывает направление поворота или вращения. Спин-векторы очень удобны для работы на интуитивном уровне, но на формальном уровне удобнее работать не с ними, а с так называемыми аксиальными векторами, сопоставляемыми по определенному правилу спин-векторам. Принятие этого правила называется ориентацией системы отсчета. Каждому спин-вектору $\mathbf{a}_\star$ сопоставляется “обычный” вектор $\mathbf{a}$:

1) $\mathbf{a}$: расположен на оси спин-вектора $\mathbf{a}_\star$,

2) модуль $\mathbf{a}$ равен модулю $\mathbf{a}_\star$,

3) $\mathbf{a}$ направлен так, чтобы при взгляде с его конца круговая стрелка спин-вектора показывала движение либо против хода часовой стрелки (правоориентированная система отсчета), либо по ходу часовой стрелки (левоориентированная система отсчета).

“Обычные” векторы, сопосталяемые по указанному правилу спин-векторам, называются аксиальными. Видим, что аксиальные векторы не зависят от выбора системы координат и не меняются при замене правой системы координат на левую и наоборот. Таким образом в ориентированной системе отсчета действуют два типа вектора (направленных отрезков): одни из них не реагируют на изменение ориентации системы отсчета и называются полярными, а другие при изменении ориентации умножаются на (-1) и называются аксиальными. Спинорные движения определяются заданием собственно отрогонального тензора $\mathbf{P}(t)$:

$$\mathbf{P}\cdot\mathbf{P}^\mathsf{T} = \mathbf{P}^\mathsf{T}\cdot\mathbf{P} = \mathbf{E}\,, \qquad \det\mathbf{P}(t) = +1. \tag{6}$$

Тензор $\mathbf{P}(t)$ ниже будет называться тензором поворота [9]. Согласно теореме Эйлера любой тензор поворота, отличный от $\mathbf{E}$, однозначно представим в виде

$$\mathbf{P}(t) = (1-\cos\theta)\,\mathbf{m}\otimes\mathbf{m} + \cos\theta\,\mathbf{E} + \sin\theta\,\mathbf{m}\times\mathbf{E}\,, \tag{7}$$

где единичный вектор $\mathbf{m} = \mathbf{m}(t)$, является неподвижным вектором тензора $\mathbf{P}(t)$, т.е. $\mathbf{P}(t)\cdot\mathbf{m}(t) = \mathbf{m}(t)$, а угол $\theta = \theta(t)$ называется углом поворота. Вектор $\boldsymbol{\Theta} = \theta(t)\mathbf{m}(t)$ называется вектором поворота. Справедливо представление

$$\mathbf{P}(t) = \exp\left[\boldsymbol{\Theta}\times\mathbf{E}\right], \qquad \mathbf{R} = \boldsymbol{\Theta}\times\mathbf{E}\,, \tag{8}$$

тензор $\mathbf{R} = -\mathbf{R}^\mathsf{T}$ называется логарифмическим тензором поворота. Представление (1) часто оказывается необходимым при исследовании, например, устойчивости.

Изменение тензора поворота во времени характеризуется тензором $\dot{\mathbf{P}}$, но удобнее работать не с $\dot{\mathbf{P}}$, а с тензорами спина: $\mathbf{S} = \dot{\mathbf{P}}\cdot\mathbf{P}^\mathsf{T}$ — левый тензор спина и $\mathbf{S}_r = \mathbf{P}^\mathsf{T}\cdot\dot{\mathbf{P}}$ — правый тензор спина. Оба тензора спина кососимметричны и имеют сопутствующие векторы: $\mathbf{S} = \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{E}$, $\mathbf{S}_r = \boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{E}$. Аксиальные векторы $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\Omega}$ называются левой (истинной) и правой угловыми скоростями соответственно. Удобно пользоваться левым и правым уравнениями Пуассона

$$\dot{\mathbf{P}} = \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{P}, \qquad \dot{\mathbf{P}} = \mathbf{P}\times\boldsymbol{\Omega}, \qquad \boldsymbol{\omega} = \mathbf{P}\cdot\boldsymbol{\Omega}\,. \tag{9}$$

В динамике твердого тела вектор $\boldsymbol{\omega}$ принято называть угловой скоростью в пространстве, а вектор $\boldsymbol{\Omega}$ — угловой скоростью в теле.

Подробнее о тензоре поворота и его представлениях можно ознакомится по работам [8,9].

3 Тела и их динамические структуры

3.1 Тела–точки и их размерность

В ньютоновской механике исходным объектом является материальная точка, которая наделяется единственным свойством — массой. Уже одно это обстоятельство не позволяет включить, например, электродинамику в рациональную (ньютоновскую) механику, т.к. материальную точку нельзя наделить зарядом. В эйлеровой механике ситуация резко меняется. В качестве исходного объекта в ней вводится тело–точка, которое реагирует не только на трансляционные, но и на спинорные движения. Относительно тела–точки считается, что оно существует и занимает нулевой объем в теле отсчета. Движение тела точки определено, если задан его вектор положения $\mathbf{R}(t)$ и тензор поворота $\mathbf{P}(t)$. Трансляционная и угловая скорости тела–точки находятся по формулам

$$\mathbf{v} = \mathbf{R}(t), \qquad \boldsymbol{\omega}(t) = -\frac{1}{2}\left(\dot{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{P}^T\right)_\times, \qquad \left((\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})_\times = \mathbf{a} \times \mathbf{b}\right). \tag{10}$$

Аксиома T1: кинетическая энергия тела–точки есть квадратичная форма его скоростей

$$K = m\left(\frac{1}{2}\mathbf{v} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\omega}\right), \tag{11}$$

где тензоры второго ранга $m\mathbf{A}$, $m\mathbf{B}$, $m\mathbf{C}$ называются тензорами инерции тела–точки, скалярный множитель m выделен просто для удобства. Тензоры инерции не зависят от скоростей, но зависят от тензора поворота.

Представление (11) значительно сложнее, чем может показаться на первый взгляд. Например, кажется, что его можно упростить следующим рассуждением. Рассмотрим чисто трансляционное движение тела–точки. Тогда (11) принимает вид $2K = m\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}_\star \cdot \mathbf{v}$. Положим здесь $\mathbf{v} = v\mathbf{n}$ и получим $2K = mv^2\mathbf{n} \cdot \mathbf{A}_\star \cdot \mathbf{n}$. Примем теперь во внимание, что тело отсчета изотропно, т.е. телу-точке безразлично, в каком направлении ему двигаться. Так будет только тогда, когда выполняется равенство $\mathbf{n}\cdot\mathbf{A}_\star\cdot\mathbf{n} = \mathbf{n}\cdot\mathbf{A}_\star\cdot\mathbf{n}$. Это равенство, в свою очередь, выполняется только для шарового тензора $\mathbf{A}_O = \alpha\mathbf{E}$, где множитель α можно положить равным единице, т.к. у нас уже выделен скалярный множитель m. К сожалению, это рассуждение неправильно и равенство $\mathbf{A}_O = \alpha\mathbf{E}$ можно постулировать, но нельзя доказать. Примем теперь во внимание, что тензоры инерции должны удовлетворять очевидным равенствам

$$(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}) = \mathbf{P}(t) \cdot (\mathbf{A}_0, \mathbf{B}_0, \mathbf{C}_0) \cdot \mathbf{P}^T(t), \tag{12}$$

где $\mathbf{A}_0$, $\mathbf{B}_0$, $\mathbf{C}_0$ — значения тензоров инерции в отсчетном положении, т.е. при тех значениях t_0, при которых $\mathbf{P}(t_0) = \mathbf{E}$. Формулы (12) следует понимать как три формулы для каждого из тензоров в отдельности. С учетом вышеприведенных рассуждений и (12) получаем, что тензор инерции $\mathbf{A}$ равен единичному, а представление (11) принимает вид

$$K = m\left(\frac{1}{2}\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\omega}\right), \tag{13}$$

где скалярный множитель m называется массой тела–точки.

Представление (13) обладает большой степенью общности. Но нельзя утверждать, что оно является максимально общим. В самом деле, допустим, например, что тело–точка это электрон. Тогда все наше рассуждение теряет силу, ибо электрон невозможно заставить совершать чисто трансляционные движения, у него $\boldsymbol{\omega}$всегда, видимо, отлична от нуля. Правда, здесь никто в настоящее время не может сказать ничего определенного. Необходимы дополнительные исследования. Вероятно, для тяжелых частиц представление (13) является приемлемым, но для легких частиц, например, для нейтрино, видимо, необходимо пользоваться полным выражением (11), где множитель m лучше уже не выделять. При использовании (11) массой тела–точки удобнее называть величину $1/3\,\mathbf{tr}(m\mathbf{A})$. К сожалению, здесь не время и не место обсуждать многочисленные нюансы, заключенные в представлении (11). В принципе, на выражение для кинетической энергии налагаются очень слабые требования: $\mathbf{A} = \mathbf{A}^{\mathsf{T}}$, $\mathbf{C} = \mathbf{C}^{\mathsf{T}}$ и (12). Все остальные требования уже не очевидны и должны приниматься с оговорками. Например, казалось бы естественным потребовать от (11) положительной определенности. Однако, возможно, что можно требовать выполнения только более слабого неравенства

$$\frac{1}{\Delta}\int\limits_{t}^{t+\Delta} K\,dt \geq 0, \qquad \forall\, \mathbf{v}, \boldsymbol{\omega}: \quad |\mathbf{v}| \neq 0,\ |\boldsymbol{\omega}| \neq 0, \tag{14}$$

где Δ — малый интервал времени порядка периода обращения электрона по орбите вокруг ядра.

Для целей данной работы нет необходимости в дальнейших обсуждениях (11), ибо нас интересуют только основные структуры.

Определение 3.1: число независимых параметров, определяющих кинетическую энергию тела–точки и не зависящий от движения тела–точки, называется размерностью тела–точки.

Размерность материальной точки равна единице $\mathbf{A} = \mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mathbf{C} = \mathbf{0}$, причем единственным параметром является масса. Размерность абсолютно твердого тела равна четырем: $\mathbf{A} = \mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mathbf{0}$, $\mathbf{C}$ — центральный тензор инерции; параметрами являются масса и три главных центральных момента инерции. Размерность частиц, необходимых для построения электродинамики, заведомо больше четырех. В общем случае, размерность частицы (11) равна 12, а тела–точки (13) — 10.

Определение 3.2: количеством движения $\mathbf{K}_1$ тела–точки называется линейная форма скоростей

$$\mathbf{K}_1 = \frac{\partial K}{\partial \mathbf{v}} = m\,\left(\mathbf{A}\cdot\mathbf{v} + \mathbf{B}\cdot\boldsymbol{\omega}\right). \tag{15}$$

Определение 3.3: кинетическим моментом $\mathbf{K}_2^Q$ тела–точки, вычисленным относительно опорной точки Q, зафиксированной в данном теле отсчета, называется линейная форма скоростей, вычисляемая по формуле

$$\mathbf{K}_2^Q = (\mathbf{R}(t) - \mathbf{R}_Q) \times \frac{\partial K}{\partial \mathbf{v}} + \frac{\partial K}{\partial \boldsymbol{\omega}} = m\,\left[(\mathbf{R}(t) - \mathbf{R}_Q) \times (\mathbf{A}\cdot\mathbf{v} + \mathbf{B}\cdot\boldsymbol{\omega}) + \mathbf{v}\cdot\mathbf{B} + \mathbf{C}\cdot\boldsymbol{\omega}\right]. \tag{16}$$

Первое слагаемое в данной формуле называется моментом количества движения тела–точки, а второе слагаемое, т.е. величина $m\,(\mathbf{v}\cdot\mathbf{B}+\mathbf{C}\cdot\boldsymbol{\omega})$, называется собственным кинетическим моментом или, короче, динамическим спином тела–точки.

В заключение[1] этого пункта приведем пример воображаемого тела–точки, кинетическая энергия которого задается выражением

$$K=\frac{1}{2}m\mathbf{V}\cdot\mathbf{V}+q\mathbf{V}\cdot\boldsymbol{\omega}+\frac{1}{2}J\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega}, \tag{17}$$

где m — масса тела–точки, J — момент инерции, q есть новый параметр, который не встречается в телах–точках, используемых в классической механике. Иными словами, параметр q определяет некое новое свойство частицы, которое условно будем называть зарядом. Этим примером я хочу подчеркнуть, что новые свойства частиц нельзя вводить голословно, но они должны описываться теми или иными параметрами в динамических структурах, которые определяют тело–точку. Например, если мы хотим ввести такие свойства частицы, как "шарм", "очарование", "заряд" и т.д., то это должно быть отмечено в динамических структурах частицы. Количество движения и кинетический момент тела–точки (17) определяются выражениями

$$\mathbf{K}_1=m\mathbf{V}+q\boldsymbol{\omega},\quad \mathbf{K}_2=\mathbf{R}\times(m\mathbf{V}+q\boldsymbol{\omega})+q\mathbf{V}+J\boldsymbol{\omega}. \tag{18}$$

Как видим, и эти структуры не встречаются в классической механике. Забежав немного вперед, рассмотрим движение этой частицы по инерции в пустоте. При этом количество движения и кинетический момент частицы должны сохранять постоянные значения

$$m\mathbf{V}+q\boldsymbol{\omega}=m\mathbf{V}_0+q\boldsymbol{\omega}_0\equiv\mathbf{a}=a\,\mathbf{e},\quad \mathbf{R}\times\mathbf{a}+q\mathbf{V}+J\boldsymbol{\omega}=q\mathbf{V}_0+J\boldsymbol{\omega}_0\equiv\mathbf{b}. \tag{19}$$

Здесь принято, что $\mathbf{R}(0)=\mathbf{0}$. Удобнее рассматривать последнее уравнение, продифференцировав его по времени и исключив из него трансляционную скорость. В результате получим уравнение

$$\left(J-\frac{q^2}{m}\right)\frac{d}{dt}\boldsymbol{\omega}+\frac{qa}{m}\mathbf{e}\times\boldsymbol{\omega}=\mathbf{0},\quad \mathbf{a}=a\mathbf{e},\quad |\mathbf{e}|=1. \tag{20}$$

Решение этого уравнения ищем в виде прецессирующего вектора

$$\boldsymbol{\omega}(t)=\mathbf{Q}(\varphi(t)\,\mathbf{e})\cdot\boldsymbol{\omega}_0,\quad \varphi(0)=0. \tag{21}$$

Подставляя это выражение в (21) и используя уравнение Пуассона, получаем

$$\frac{d\varphi}{dt}=\frac{qa}{q^2-mJ}\equiv\alpha\quad\Rightarrow\quad\varphi=\alpha t. \tag{22}$$

Интегрируя уравнения (18), нетрудно найти все искомые характеристики движения:

$$m\,\mathbf{R}(t)=(a-q\boldsymbol{\omega}_0\cdot\mathbf{e})t\,\mathbf{e}+q\alpha^{-1}\mathbf{e}\times\mathbf{Q}(\alpha t\mathbf{e})\cdot[\boldsymbol{\omega}_0-(\boldsymbol{\omega}_0\cdot\mathbf{e})\,\mathbf{e}]. \tag{23}$$

[1]Этот пример, наряду с другими иллюстрациями "немеханического" содержания, был исключен автором из основного текста доклада и, соответственно, из публикации.

Вектор $\mathbf{R}(t)$ показывает, что частица движется по спирали. Если начальные условия подобрать так, чтобы выполнялось равенство

$$a = q\boldsymbol{\omega}_0 \cdot \mathbf{e},$$

то движение частицы по инерции будет происходить по окружности, как это утверждали древние и, в частности, Пифагор. Для вектора скорости имеем выражение

$$m\,\mathbf{V}(t) = \mathbf{Q}(\alpha t\mathbf{e}) \cdot (a\,\mathbf{e} - q\,\boldsymbol{\omega}_0). \tag{24}$$

Видим, что трансляционная и угловая скорости частицы постоянны по модулю, но переменны по направлению, т.е. движение частицы по инерции остается равномерным. В этом примере следует обратить внимание, что в инерциальной системе отсчета движение изолированной частицы (тела–точки) по инерции не обязательно является прямолинейным. Разумеется, речь идет не о классической частице. Но ведь никто не доказал, что, например, электрон является классической частицей (материальной точкой). Этот пример показывает, что в классической механике таятся огромные, еще не изученные, возможности. Здесь возможны ситуации, которые с первого взгляда могут показаться неправдоподобными. Тем не менее, они не более неправдоподобны, чем те “чудеса”, которые происходят в микромире. Заметим, кстати, что чем глубже мы погружаемся в микромир, тем важнее становится роль спинорных движений. Последние в рассмотренном примере представлены не тензором поворота $\mathbf{Q}$, а вектором угловой скорости.

Кинетическая энергия, количество движения и кинетический момент исчерпывают список динамических структур тела–точки.

3.2 Тела и их динамические структуры

В механике любое тело рассматривается как совокупность неких первичных тел–точек. Например, в ньютоновской механике всякое тело рассматривается как совокупность материальных точек. Нет оснований отказываться от этой традиции. Однако здесь имеются проблемы, которые до сих пор не получили ясного разрешения. Все было бы очень просто, если бы была возможность ограничиться первичными телами–точками только одного типа, как это и делается в ньютоновской механике. На самом деле ситуация сложнее. Во–первых, современное состояние науки позволяет утверждать, что от действительно первичных тел–точек, если они вообще существуют, мы еще очень далеки. Во–вторых, первичные тела–точки, из которых современная механика составляет тела, существенно различны. В–третьих, и это главная проблема, первичные тела–точки в процессе взаимодействий могут не только менять свою структуру, но может меняться и их число. Например, $2n$ атомов водорода (первичные тела одного типа) при взаимодействии с n атомами кислорода (первичные тела–точки другого типа) образуют в результате n молекул воды (первичные тела–точки третьего типа). Таким образом, вместо $3n$ первичных тел–точек мы получили n первичных тел–точек. О том почему молекулу воды нельзя считать просто состоящей из трех тел–точек будет немного сказано при обсуждении понятия внутренней энергии. Могут возразить, что рассмотрение подобных трансформаций частиц выходит за рамки рациональной механики и составляет предмет химии. Так это и было до недавнего времени. Однако современные технологии таковы, что многие сложные физические, химические и механические явления уже нельзя изучать раздельно. Поэтому для их совместного рассмотрения необходимы такие формулировки фундаментальных законов, которые допускают существование сложных явлений, подобных указанным выше. Тем не менее, в данной работе мы будем придерживаться точки зрения, близкой к традиционной. Будем считать, что Вселенная рациональной механики есть множество тел-точек, структура которых определена выше. Выберем в системе отсчета простую замкнутую поверхность Ляпунова $\mathbb{S}_t$, которая может деформироваться и перемещаться относительно тела отсчета. Считается, что на $\mathbb{S}_t$ нет никаких тел-точек, хотя можно и отказаться от этого условия.

Определение 3.4: множество $\mathfrak{M}_{\mathcal{A}}$ тел-точек, находящихся внутри $\mathbb{S}_t$, называется телом $\mathcal{A}$, а множество $\mathfrak{M}^e_{\mathcal{A}}$ тел-точек, находящихся вне $\mathbb{S}_t$, называется окружением тела $\mathcal{A}$ и обозначается $\mathcal{A}^e$.

Объемом тела $\mathcal{A}$ называется объем, заключенный внутри $\mathbb{S}_t$, поэтому объем тела $\mathcal{A}$ не является физической (объективной) характеристикой тела $\mathcal{A}$.

Определение 3.5: тело $\mathcal{A}$ называется закрытым, если оно не обменивается телами–точками со своим окружением: в противном случае тело $\mathcal{A}$ называется открытым.

Аксиома T2: кинетическая энергия, количество движения и кинетический момент тела $\mathcal{A}$ аддитивны по телам-точкам, составляющим тело $\mathcal{A}$.

Пусть все характеристики i-го тела–точки снабжаются индексом i. Тогда в соответствии с аксиомой **T2** имеем

$$K(\mathcal{A}) = \sum_{i\in\mathfrak{M}_{\mathcal{A}}} m_i \left(\frac{1}{2}\,\mathbf{v}_i\cdot\mathbf{A}_i\cdot\mathbf{v}_i + \mathbf{v}_i\cdot\mathbf{B}_i\cdot\boldsymbol{\omega}_i + \frac{1}{2}\,\boldsymbol{\omega}_i\cdot\mathbf{C}_i\cdot\boldsymbol{\omega}_i\right) = \sum_i m_i K_i \tag{25}$$

где K_i называется массовой плотностью кинетической энергии. Количество движения определяется выражением

$$\mathbf{K}_1(\mathcal{A}) = \sum_i m_i \mathbf{K}_{1i}, \quad \mathbf{K}_{1i} = \frac{\partial K_i}{\partial \mathbf{v}_i} = \mathbf{A}_i\cdot\mathbf{v}_i + \mathbf{B}_i\cdot\boldsymbol{\omega}_i. \tag{26}$$

Для кинетического момента имеем аналогичное выражение

$$\mathbf{K}_2^Q(\mathcal{A}) = \sum_i m_i \mathbf{K}_{2i}^Q, \quad \mathbf{K}_{2i}^Q = (\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_{iQ})\times\frac{\partial K_i}{\partial \mathbf{v}_i} + \frac{\partial K_i}{\partial \boldsymbol{\omega}_i} =$$
$$(\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_{iQ})\times(\mathbf{A}_i\cdot\mathbf{v}_i + \mathbf{B}_i\cdot\boldsymbol{\omega}_i) + \mathbf{v}_i\cdot\mathbf{B}_i + \mathbf{C}_i\cdot\boldsymbol{\omega}_i. \tag{27}$$

В качестве простейшего примера вычислим динамические структуры абсолютно твердого тела, рассматриваемого в теоретической механике.

Определение 3.6: совокупность тел-точек называется абсолютно твердым телом $\mathcal{A}$, если выполняются следующие два условия: первое — для любых пар точек A_i и A_m, принадлежащих телу $\mathcal{A}$ и для любых моментов времени t_1 и t_2 справедливы равенства

$$|\mathbf{R}_i(t_1) - \mathbf{R}_m(t_1)| = |\mathbf{R}_i(t_2) - \mathbf{R}_m(t_2)|; \tag{28}$$

второе — тензоры поворота всех тел-точек одинаковы

$$\mathbf{P}_i(t) = \mathbf{P}_m(t) = \mathbf{P}(t), \tag{29}$$

причем $\mathbf{P}(t)$ называется тензором поворота тела $\mathcal{A}$.

Из (28) и требования непрерывности движения вытекает основная теорема кинематики абсолютно твердого тела

$$\mathbf{R}_i(t) = \mathbf{R}_X(t) + \mathbf{P}(t)\cdot(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_X), \qquad \mathbf{r}_i = \mathbf{R}_i(0), \quad \mathbf{r}_X = \mathbf{R}_X(0), \quad \mathbf{P}(0) = \mathbf{E}, \tag{30}$$

где $\mathbf{R}_X(t)$ — вектор положения произвольно выбираемой точки X, называемой полюсом, зафиксированным в теле $\mathcal{A}$. Принимая для тел-точек модель материальной точки

$$\mathbf{A} = \mathbf{E}, \qquad \mathbf{B} = \mathbf{0}, \qquad \mathbf{C} = \mathbf{0}, \qquad \Longrightarrow \qquad K_i = \frac{1}{2}\, m_i \dot{\mathbf{R}}_i(t)\cdot\dot{\mathbf{R}}_i(t)$$

получаем кинетическую энергию, количество движения и кинетический момент тела $\mathcal{A}$ в виде

$$K(\mathcal{A}) = \frac{1}{2}\, m\,\dot{\mathbf{R}}_X\cdot\dot{\mathbf{R}}_X + \dot{\mathbf{R}}_X\cdot\mathbf{B}_X\cdot\boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2}\,\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{C}_X\cdot\boldsymbol{\omega}, \qquad \mathbf{K}_1(\mathcal{A}) = m\,\dot{\mathbf{R}}_X + \mathbf{B}_X\cdot\boldsymbol{\omega},$$

$$\mathbf{K}_2^Q(\mathcal{A}) = (\mathbf{R}(t) - \mathbf{R}_Q)\times\mathbf{K}_1(\mathcal{A}) + \dot{\mathbf{R}}_X\cdot\mathbf{B}_X + \mathbf{C}_X\cdot\boldsymbol{\omega} \tag{31}$$

где $\dot{\mathbf{R}}_X$ — скорость полюса, $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость, отвечающая повороту $\mathbf{P}(t)$, $\mathbf{B}_X$ и $\mathbf{C}_X$ — тензоры инерции тела $\mathcal{A}$, определяемые по формулам

$$\mathbf{B}_X = m\,(\mathbf{R}_X - \mathbf{R}_C)\times\mathbf{E} = \mathbf{P}(t)\cdot[m\,(\mathbf{r}_X - \mathbf{r}_C)\times\mathbf{E}]\cdot\mathbf{P}^T(t),$$

$$\mathbf{C}_X = \mathbf{P}(t)\cdot\left\{\sum_i m_i\left[(\mathbf{r}_X - \mathbf{r}_C)^2\,\mathbf{E} - (\mathbf{r}_X - \mathbf{r}_C)\otimes(\mathbf{r}_X - \mathbf{r}_C)\right]\right\}\cdot\mathbf{P}^T(t). \tag{32}$$

В (31), (32) через m обозначена масса тела $\mathbf{A}$, через $\mathbf{R}_X(t) = \mathbf{P}(t)\cdot\mathbf{r}_X$, $\mathbf{R}_C(t) = \mathbf{P}(t)\cdot\mathbf{r}_C$ — векторы положения полюса и центра масс тела $\mathbf{A}$

$$m = \sum_i m_i\,, \qquad \mathbf{R}_C(t) = \frac{1}{m}\sum_i m_i\,\mathbf{R}_i(t) = \mathbf{P}(t)\cdot\left(\frac{1}{m}\sum_i m_i\,\mathbf{r}_i\right).$$

Для сплошных сред все суммы заменяются соответствующими интегралами. Если полюс X выбирается в центре масс тела $\mathcal{A}$, то $\mathbf{B} = \mathbf{0}$, а тензор $\mathbf{C}$ называется центральным тензором инерции. В последние 30–40 лет сложилось мнение, что механику сплошных сред нельзя построить на основе "молекулярных" представлений. Это мнение обосновывается различными аргументами. В частности, К.Трусделл и Р.Тупин [11] считают это невозможным, поскольку на микроуровне действуют законы квантовой, а не классической механики. Может быть, это и в самом деле так. Но автор полагает, что возможности классической механики далеко не исчерпаны. Если для тел-точек рассматривать форму общего вида (11), то поведение этих тел-точек совсем не похоже на то, к которому мы привыкли. Не исключено, что использование тел-точек общего вида восстановит дееспособность классической механики и на микроуровне. Что касается перехода к сплошной среде, то здесь необходимо использовать так называемый нестандартный анализ, т.е. вернуться к языку, которым пользовался Л.Эйлер.

4 Воздействия. Силы и моменты. Основные аксиомы

Центральной идеей в механике является представление о том, что в инерциальных системах отсчета закрытые тела меняют характер своего движения только в результате влияния других тел. Особенно отчетливо эта идея представлена у Л.Эйлера [12]. Для реализации этой идеи в механике вводятся специальные структуры, называемые воздействиями, и являющиеся первичными понятиями. Иногда думают, что первичные понятия не требуют определения. Это заблуждение. На самом деле первичные понятия вводятся определением их свойств. Введение воздействия опирается на аксиому, которая является неким дополнением к принципу инерции Галилея, продолжая его на тела общего вида.

Аксиома F0: в инерциальной системе отсчета изолированное закрытое тело $\mathcal{A}$ движется так, что его количество движения и кинетический момент сохраняются неизменными.

Обычно эту аксиому предпочитают доказывать как теорему, но при этом введение воздействий становится расплывчатым и ведет к неясностям в трактовке сил и моментов.

Аксиома F1: в инерциальной системе отсчета причина изменения количества движения закрытого тела $\mathcal{A}$ обусловлена исключительно наличием других тел, выражается посредством полярного вектора и называется силой $\mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e)$, действующей на тело $\mathcal{A}$ со стороны его окружения $\mathcal{A}^e$.

Аксиома F2: в инерциальной системе отсчета причина изменения кинетического момента закрытого тела $\mathcal{A}$, вычисленного относительно опорной точки Q, обусловлена исключительно наличием других тел, выражается посредством аксиального вектора и называется моментом $\mathbf{M}^{Q}(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e)$, действующим на тело $\mathcal{A}$ со стороны его окружения $\mathcal{A}^e$.

При этом момент $\mathbf{M}^{Q}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, действующий со стороны тела $\mathcal{B}$ на тело $\mathcal{A}$, вычисляется по правилу

$$\mathbf{M}^{Q}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = (\mathbf{R}_{P} - \mathbf{R}_{Q}) \times \mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) + \mathbf{L}^{P}(\mathcal{A}, \mathcal{B}), \tag{33}$$

где $\mathbf{R}_{Q}$ определяет положение опорной точки Q; вектор $\mathbf{R}_{P}$ — определяет произвольно выбираемую точку $\mathcal{B}$, называемую точкой приведения; вектор $\mathbf{L}^{P}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ называется собственно моментом — он зависит от выбора точки приведения P, но не зависит от выбора опорной точки Q. Полный момент $\mathbf{M}^{Q}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ по определению не зависит от выбора точки приведения. Силы и моменты сложны для восприятия начинающим. Трудность в том, что силы и моменты выражают совершенно конкретные физические идеи, являющиеся первичными понятиями и не поддающиеся математической формализации, но вполне доступные нам на интуитивном уровне. Ключом к пониманию сил и моментов являются следующие утверждения:

а) сила $\mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ — это реакция тела $\mathcal{B}$ на изменение положения тела $\mathcal{A}$;

б) момент $\mathbf{L}^{P}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ — это реакция тела $\mathcal{B}$ на повороты тела $\mathcal{A}$ вокруг точки приведения P.

Для того, чтобы интуитивно ощутить наличие силы $\mathbf{F}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ необходимо проделать следующую мысленную процедуру: 1) удалить из Вселенной все тела за исключением тел $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, 2) мысленно "заморозить" тело $\mathcal{A}$ и превратить его в абсолютно твердое, 3) мысленно придавать всем точкам $\mathcal{A}$ всевозможные бесконечно малые смещения $\xi\mathbf{e}$, где $\mathbf{e}$, произвольный единичный вектор. Если тело $\mathcal{B}$ как-то препятствует описанным смещениям тела $\mathcal{A}$, то сила $\mathbf{F}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ отлична от нуля. Если существует такое направление $\mathbf{e}_\star$, что тело $\mathcal{B}$ не препятствует смещению тела $\mathcal{A}$ в этом направлении, то проекция $\mathbf{F}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ на $\mathbf{e}_\star$ равна нулю. Для того, чтобы ощутить наличие собственно момента $\mathbf{L}^{\mathrm{P}}(\mathcal{A},\mathcal{B})$, необходимо: 1) и 2) как для силы; 3) закрепить точки приведения в теле отсчета и относительно тела $\mathcal{A}$, т.е. тело $\mathcal{A}$ и точка P должны составлять абсолютно твердое тело с неподвижной точкой P; 4) мысленно поворачивать тело $\mathcal{A}$ вокруг P на всевозможные бесконечно малые векторы поворота $\varphi\mathbf{e}$, где $|\mathbf{e}| = 1$. Если тело $\mathcal{B}$ как-то препятствует описанным поворотам тела $\mathcal{A}$, то $\mathbf{L}^{\mathrm{P}}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ отличен от нулевого вектора. Если существует такая ось, проходящая через P и натянутая на $\mathbf{e}_{\star\star}$, что тело $\mathcal{B}$ не препятствует повороту тела $\mathcal{A}$ вокруг этой оси, то проекция $\mathbf{L}^{\mathrm{P}}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ на $\mathbf{e}_{\star\star}$ равна нулю.

Из аксиомы F2 следует, что при изменении точки приведения собственно момент меняется так, чтобы полный момент $\mathbf{M}^{\mathrm{Q}}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ остался неизменным. Пусть P и S две разные точки приведения. Тогда имеем

$$\mathbf{L}^{\mathrm{S}}(\mathcal{A},\mathcal{B}) = (\mathbf{R}_{\mathrm{S}} - \mathbf{R}_{\mathrm{P}}) \times \mathbf{F}(\mathcal{A},\mathcal{B}) + \mathbf{L}^{\mathrm{P}}(\mathcal{A},\mathcal{B}). \tag{34}$$

Определение 4.1: пара векторов $\left\{\mathbf{F}(\mathcal{A},\mathcal{B});\mathbf{M}^{\mathrm{Q}}(\mathcal{A},\mathcal{B})\right\}$ называется воздействием тела $\mathcal{B}$ на тело $\mathcal{A}$.

Определение 4.2: воздействие тела на тело $\mathcal{A}$ называется чисто силовым (или просто силовым), если существует такая точка приведения $\mathbf{R}_{\mathrm{P}}(t)$, что при любых движениях тела $\mathcal{A}$ воздействие тела $\mathcal{B}$ на тело $\mathcal{A}$ определяется заданием пары векторов

$$\{\mathbf{F}(\mathcal{A},\mathcal{B}); (\mathbf{R}_{\mathrm{P}}(t) - \mathbf{R}_{\mathrm{Q}}) \times \mathbf{F}(\mathcal{A},\mathcal{B})\}, \qquad \left(\mathbf{L}^{\mathrm{P}}(\mathcal{A},\mathcal{B}) = \mathbf{0}\right), \tag{35}$$

причем такая точка P называется центром силового воздействия.

Во многих книгах по механике центр силового воздействия называют точкой приложения силы $\mathbf{F}(\mathcal{A},\mathcal{B})$. Строго говоря, это неправильно, ибо векторы $\mathbf{F}(\mathcal{A},\mathcal{B})$, $\mathbf{M}^{\mathrm{Q}}(\mathcal{A},\mathcal{B})$, $\mathbf{L}^{\mathrm{P}}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ — суть свободные векторы и ни к каким точкам тела не прилагаются, а центр силового воздействия может находиться вне тела $\mathcal{A}$. Отмеченная неточность не ток безобидна, как кажется на первый взгляд: говоря о точках приложения, мы внушаем ученику принципиально неверное на интуитивном уровне представление о силе, что помешает ему, если он захочет изучать нетривиальные случаи. Сказанное дает интуитивно ясное представление о природе понятий сил и моментов. К сожалению, этого нельзя просто выучить, только настойчивая практика применения этих понятий ведет к успеху.

Определение 4.3: воздействие тела $\mathcal{B}$ на тело $\mathcal{A}$ называется чисто моментным, если $\mathbf{F}(\mathcal{A},\mathcal{B}) = \mathbf{0}$.

Для первичных понятий невозможно дать определения. В таких случаях даются не определения самих понятий, а перечисляются свойства, органически присущие этим понятиям. Важнейшим свойством сил и моментов, подтвержденным всем ходом развития механики, является их аддитивность как по телам, составляющим тело $\mathcal{B}$, так и по телам, составляющим тело $\mathcal{A}$.

Аксиома F3: Сила $\mathbf{F}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ и момент $\mathbf{M}^{\mathrm{Q}}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ аддитивны по отделенным телам $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$, составляющим тело $\mathcal{B}$: $\mathcal{B}=\mathcal{C}\vee\mathcal{D}$

$$\mathbf{F}(\mathcal{A},\mathcal{C}\vee\mathcal{D})=\mathbf{F}(\mathcal{A},\mathcal{C})+\mathbf{F}(\mathcal{A},\mathcal{D}),\quad \mathcal{C}\wedge\mathcal{D}=\varnothing; \tag{36}$$

$$\mathbf{M}^{\mathrm{Q}}(\mathcal{A},\mathcal{C}\vee\mathcal{D})=\mathbf{M}^{\mathrm{Q}}(\mathcal{A},\mathcal{C})+\mathbf{M}^{\mathrm{Q}}(\mathcal{A},\mathcal{D}),\quad \mathcal{C}\wedge\mathcal{D}=\varnothing. \tag{37}$$

Вычисление момента $\mathbf{M}^{\mathrm{Q}}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ подразумевает выбор опорной точки и точки приведения. Опорная точка должна быть одна и та же в обеих частях (37). Выбор точки приведения осуществляется произвольно и для каждого из моментов $\mathbf{M}^{\mathrm{Q}}(\mathcal{A},\mathcal{C}\vee\mathcal{D})$, $\mathbf{M}^{\mathrm{Q}}(\mathcal{A},\mathcal{C})$, $\mathbf{M}^{\mathrm{Q}}(\mathcal{A},\mathcal{D})$ может производиться независимо.

Аксиома F4: сила $\mathbf{F}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ и момент $\mathbf{M}^{\mathrm{Q}}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ аддитивны по отделенным телам $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$, составляющим тело $\mathcal{A}$: $\mathcal{A}=\mathcal{C}\vee\mathcal{D}$

$$\mathbf{F}(\mathcal{C}\vee\mathcal{D},\mathcal{B})=\mathbf{F}(\mathcal{C},\mathcal{B})+\mathbf{F}(\mathcal{D},\mathcal{B}),\quad \mathcal{C}\wedge\mathcal{D}=\varnothing; \tag{38}$$

$$\mathbf{M}^{\mathrm{Q}}(\mathcal{C}\vee\mathcal{D},\mathcal{B})=\mathbf{M}^{\mathrm{Q}}(\mathcal{C},\mathcal{B})+\mathbf{M}^{\mathrm{Q}}(\mathcal{D},\mathcal{B}),\quad \mathcal{C}\wedge\mathcal{D}=\varnothing. \tag{39}$$

Приведенными выше аксиомами исчерпываются все постулаты, относящиеся к воздействиям в общем случае. Введенные аксиомы не определяют конкретного вида сил и моментов, они только фиксирует их основные свойства.

Примечания.

1 В литературе часто встречается термин “сила инерции”. Последняя, согласно сказанному выше, может называться силой только весьма условно, ибо “силы” инерции не удовлетворяют главному требованию — они не порождены другими телами, да и вообще не существуют в инерциальной системе отсчета.

2. Аксиомы аддитивности в книгах по механике часто подменяются так называемым “принципом независимости сил”. Следует иметь в виду, что аддитивность воздействий всеобща, а независимость воздействий, как правило, не имеет места.

5 Полная и внутренняя энергия. Мощность внешних воздействий

Энергия — одна из важнейших и наименее разработанных структур в рациональной механике. Даже понятие кинетической энергии, впервые введенное в неотчетливой форме Г.В.Лейбницем, далеко не сразу утвердилось в механике. Позднее понятие энергии было расширено включением в нее потенциалов внутренних и внешних сил. Однако это расширение носило формальный характер, а уравнение баланса энергии являлось следствием законов Ньютона, т.е. не было самостоятельной структурой. В механике сплошных сред дело обстояло иначе. В 1839г. Дж.Грин впервые ввел понятие внутренней энергии, которое прочно утвердилось в механике сплошных сред. Наиболее полному анализу понятие энергии подверглось в работах Г.Гельмгольца [13] и А.Пуанкаре [5]. Однако итог этого анализа малоутешителен из-за отсутствия ясной физической идеи. Нет ясного понимания концепции энергии и в настоящее время, хотя уже многие факты указывают на центральную роль энергии (не сводящейся к кинетической энергии) при исследовании многих проблем, особенно на микроуровне. Цель данного пункта не в прояснении концепции энергии, а в подчеркивании роли энергии, как самостоятельной структуры механики.

Кинетическая энергия тела $\mathcal{A}$ есть скалярная мера движения тела относительно выбранного тела отсчета. Сама по себе она не носит объективного характера и в этом смысле мало что определяет. Ясно, что кинетическая энергия далеко не полностью характеризует энергетическое состояние тела. Уже само существование тел в виде нераспадающихся объектов указывает на присущее им "нечто", что может выделяться или поглощаться при распаде тел или их деформации. Это "нечто" можно назвать внутренней энергией, а полную энергию E тела $\mathcal{A}$ представить в виде суммы

$$E(\mathcal{A}) = K(\mathcal{A}) + U(\mathcal{A}). \tag{40}$$

Функция $K(\mathcal{A})$ полностью определена. Внутренняя энергия $U(\mathcal{A})$ есть новая характеристика тела $\mathcal{A}$ и требует определения. Здесь-то и возникают проблемы, причем весьма запутанные и трудные. Простейшая из них состоит в следующем. С одной стороны, внутренняя энергия не должна зависеть от скоростей, так как скорости включены в кинетическую энергию, а также по целому ряду других более важных соображений. С другой стороны, внутренняя энергия просто обязана зависеть от каких-то скоростей. Например, внутренняя энергия зависит от температуры, а последняя (как принято считать), характеризует меру хаотических микродвижений тел-точек, составляющих тело $\mathcal{A}$. Не вдаваясь в дальнейшие обсуждения, сформулируем несколько аксиом относительно энергии, которые показывают направление существующих исследований.

Аксиома E1: внутренняя энергия тела $\mathcal{A}$ зависит только от конфигурации тела $\mathcal{A}$, т.е. только от векторов положения $\mathbf{R}_i$ и тензоров поворота $\mathbf{P}_i$ тел-точек $\mathcal{A}_i$, составляющих тело $\mathcal{A}$

$$U(\mathcal{A}) = U\left(\mathbf{R}_1, \mathbf{P}_1; \mathbf{R}_2, \mathbf{P}_2; \ldots; \mathbf{R}_N, \mathbf{P}_N\right). \tag{41}$$

Аксиома E2: внутренняя энергия тела $\mathcal{A}$ аддитивна по парам тел-точек, составляющих тело $\mathcal{A}$

$$U(\mathcal{A}) = U\left(\bigvee_{i=1}^{N} \mathcal{A}_i\right) = \frac{1}{2}\sum_{i,k}^{N} \varphi_{i,k}\left(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_k\right), \qquad \varphi_{i,i}\left(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_i\right) = 0. \tag{42}$$

Эта аксиома часто ставится под сомнение, например, для ионных взаимодействий. Однако на самом деле в физике никогда не анализировались потенциалы вида (41). Не доказано, но по всей видимости аксиома (42) необходима для согласования с аксиомами аддитивности воздействий.

Аксиома E3: внутренняя энергия тела $\mathcal{A}$ является индифферентным скаляром, т.е. она не зависит от выбора системы отсчета.

Аксиома E3: внутренняя энергия тела $\mathcal{A}$ не изменится, если на движение тела $\mathcal{A}$ наложить дополнительное движение тела $\mathcal{A}$, как жесткого целого.

Последние две аксиомы эквивалентны. Следствием аксиом E1–E3 являются утверждения:

а) внутренняя энергия тела $\mathcal{A}$, являющегося системой материальных точек, по необходимости имеет вид

$$U(\mathcal{A}) = \frac{1}{2}\sum_{i,k}^{N} \varphi_{i,k}\left(|\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_k|\right); \tag{43}$$

б) внутренняя энергия тела $\mathcal{A}$, состоящего из тел-точек общего вида, по необходимости имеет вид

$$U(\mathcal{A}) = \frac{1}{2}\sum_{i,k}^{N} \varphi_{i,k}\left(\mathbf{P}_i^T \cdot (\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_k)\,;\mathbf{P}_i^T \cdot \mathbf{P}_k\right). \tag{44}$$

Ионные взаимодействия должны описываться внутренней энергией типа (44), который никогда не привлекался для этой цели. В качестве примера возможной функции $\Psi_{i,k}$ в (43) приведем такую

$$\Psi(r) = \Psi_0 e^{-r_0/r}\left[\left(\frac{r_1}{r}\right)^m - \left(\frac{r_1}{r}\right)^n\right], \qquad r \equiv |\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_k|. \tag{45}$$

где Ψ_0, r_0, r_1, m, n — постоянные, различные, вообще говоря, для разных пар частиц, если последние не однотипны.

Постоянные $0 < r_0 \ll r_1$ положительны и обе весьма малы. Если $r_0 = 0$, то (45) переходит в потенциал Леннарда-Джонса. Постоянная r_0 имеет порядок радиуса орбиты электрона в атоме. Поэтому при $r_0 \gg r_1$ (45) вновь совпадает с потенциалом типа Леннарда-Джонса. На первый взгляд потенциал типа (45) кажется странным, т.к. он допускает "слипание" тел-точек. Но именно это обстоятельство в целом ряде случаев сильно помогает. Принципы выбора конкретного вида потенциала довольно сложны для краткого описания, т.к. они связаны с вопросами существования устойчивых состояний тел и далеки от окончательных решений. Поэтому здесь я ограничусь приведенными выше намеками.

В заключении этого пункта примем

Определение 5.1: мощностью внешних воздействий на тело $\mathcal{A}$, состоящего из тел-точек $\mathcal{A}_i$, называется форма

$$N(\mathcal{A}) = \sum_{i\in\mathfrak{M}_{\mathcal{A}}} \varphi_{i,k}\left[\mathbf{F}(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}^e)\cdot\dot{\mathbf{R}}_i + \mathbf{L}(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}^e)\cdot\boldsymbol{\omega}_i\right]. \tag{46}$$

Обратим внимание, что здесь включены силы и моменты, действующие на тело–точку со стороны окружения всего тела $\mathcal{A}$, а не со стороны $\mathcal{A}_i^e$, т.е. окружение i-го тела–точки. Кроме того, под $\mathbf{L}(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}^e)$ понимается собственно момент, когда в качестве точки приведения выбран вектор положения $\mathbf{R}_i$ тела–точки $\mathcal{A}_i$, причем, напомним, $\mathbf{L}(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}^e)$ не зависит от выбора опорной точки Q.

6 Фундаментальные законы механики

Под фундаментальными законами механики понимают уравнения баланса количества движения, кинетического момента и энергии. В механике сплошных сред к ним добавляют неравенство производства энтропии, т.е. второй закон термодинамики, который ниже не обсуждается. Следует подчеркнуть, что фундаментальные законы вовсе не являются законами Природы типа закона Всемирного тяготения. Фундаментальные законы — суть метод изучения Природы. Они могут оказаться неудобными, но они никогда не могут быть неправильными. Именно поэтому я уверен, что они действуют на всех уровнях от атомной физики до космологии. Встречающиеся при этом проблемы суть следствия неправильного или непоследовательного применения фундаментальных законов.

6.1 Первый фундаментальный закон или уравнение баланса количества движения

Скорость изменения количества движения тела $\mathcal{A}$ равна силе $\mathbf{F}(\mathcal{A},\mathcal{A}^e)$ плюс скорость подвода количества движения $\mathbf{k}_1(\mathcal{A})$ в тело $\mathcal{A}$

$$\dot{\mathbf{K}}_1(\mathcal{A}) = \mathbf{F}(\mathcal{A}\,,\mathcal{A}^e) + \mathbf{k}_1(\mathcal{A})\,. \tag{47}$$

Для закрытых тел величина $\mathbf{k}_1(\mathcal{A})$, как правило, равна нулю. Для материальной точки уравнение (47) есть второй закон Ньютона. Для закрытых тел уравнение (47) называют первым законом динамики Эйлера, открытым им в 1750 году. Из (47) и принятых аксиом для сил немедленно следует третий закон Ньютона $\mathbf{F}(\mathcal{A}\,,\mathcal{B}) = -\mathbf{F}(\mathcal{B}\,,\mathcal{A})$. Уравнение И.В.Мещерского есть просто запись уравнения (47).

Замечание: в физике весьма популярно мнение, что силой называется то, что стоит в правой части уравнения (47). Это заблуждение является источником многих недоразумений. Например, многие физики полагают, что третий закон Ньютона не выполняется в микромире. Однако в эйлеровской механике третий закон Ньютона уже не аксиома, а доказанная теорема, и она не может нарушаться. Противоречие возникает из-за того, что в микромире часто нельзя игнорировать скорость подвода количества движения в тело. Поэтому правую часть уравнения (47) нельзя называть силой.

У начинающих часто возникает затруднение с тем, как следует вычислять скорость подвода количества движения в тело. К сожалению, в общем случае этот вопрос не разрешен на формальном уровне, хотя на интуитивном уровне он вполне очевиден.

6.2 Второй фундаментальный закон или уравнение баланса кинетического момента

Скорость изменения кинетического момента тела $\mathcal{A}$, вычисленного относительно опорной точки Q, равна моменту $\mathbf{M}^{\mathrm{Q}}(\mathcal{A}\,,\mathcal{A}^e)$ плюс скорость подвода кинетического момента $\mathbf{k}_2^{\mathrm{Q}}(\mathcal{A})$ в тело $\mathcal{A}$

$$\dot{\mathbf{K}}_2^{\mathrm{Q}}(\mathcal{A}) = \mathbf{M}^{\mathrm{Q}}(\mathcal{A}\,,\mathcal{A}^e) + \mathbf{k}_2^{\mathrm{Q}}(\mathcal{A})\,. \tag{48}$$

Этот закон для закрытых тел $\left(\mathbf{k}_2^Q(\mathcal{A}) = \mathbf{0}\right)$ впервые был открыт Л.Эйлером в 1776 году и носит название второго закона динамики Эйлера. В менее отчетливой форме Л. Эйлер использовал этот закон еще в 1758 году при формулировке уравнений динамики твердого тела. Применительно к системе материальных точек он позволяет доказать, что внутренние силы в такой системе по необходимости являются центральными. Поэтому в ньютоновской механике никаких сил, кроме центральных, не существует.

6.3 Третий фундаментальный закон или уравнение баланса энергии

Скорость изменения полной энергии тела $\mathcal{A}$ равна мощности внешних воздействий плюс скорость подвода энергии "немеханического" происхождения, т.е. энергии, подводимой к телу не через мощность внешних воздействий

$$\dot{E}(\mathcal{A}) = \dot{K}(\mathcal{A}) + \dot{U}(\mathcal{A}) = N(\mathcal{A}) + k_3(\mathcal{A})\,. \tag{49}$$

Определение: закрытое тело называется замкнутым, если оно обменивается энергией со своим окружением не иначе, как через мощность внешних сил; для замкнутого тела $k_3(\mathcal{A}) = 0$.

В классической механике, как правило, рассматриваются закрытые тела. Исключение составляют задачи для реактивного движения и задачи типа падающей цепочки. Однако существует много задач, где рассмотрение открытых тел оказывается весьма важным, но соответствующий анализ еще не проведен. К ним относятся задачи механики неупругих сплошных сред, а также те проблемы физики, где необходим учет излучения, например, проблемы атомной физики.

7 Заключение

Выше сформулированы основные понятия эйлеровой механики и показаны ее отличительные черты. Понятно, что существует необозримый океан задач, где царствует ньютоновская механике. В этих случаях эйлеровская механике едва ли что-либо сможет добавить. Однако ограниченность ньютоновской механики привела к тому, что механика отказалась от изучения электричества и магнетизма и целого ряда других проблем. Хочется верить, что эйлеровская механика позволит расширить сферу действия механики на задачи, исследуемые в новейшей физике.

Список литературы

[1] Ньютон И. Математические начала натуральной философии. Собр. трудов А.Н.Крылова, т. VII, М.-Л. ИАН СССР, 1936.

[2] Ньютон И. Метод флюксий и бесконечных рядов с приложением его к геометрии кривых. – В кн. Ньютон И. Математические работы. М.-Л.: ОНТИ, 1937, с.25-166.

[3] Boltzmann L. Vorlesungen über die Prinzipe der Mechanik Teil I. Leipzig; 1897, 241s.

[4] Боль П. О некоторых дифференциальных уравнениях общего характера, применимых в механике. – Собр. тр. (Под ред. Л.Э.Рейзиня.) Рига: Зинатне,1974, с.73-198.

[5] Пуанкаре А. О науке. М.: Наука, 1983, 560с.

[6] Пуанкаре А. Измерение времени. Избр. труды А. Пуанкаре, т.III, с.419–428. М.: Наука, 1974. 771с.

[7] Zaremba S. Rėflexions sur les fondements de la mecanique rationnelle. – Enseignement Math., 1940, t.38, p.59-69

[8] Жилин П.А. Принцип относительности Галилея и уравнения Максвелла. Тр. СПбГТУ, N448, С.-Пб.: 1994, с.3-38.

[9] Жилин П.А. Тензор поворота в описании кинематике твердого тела. Тр. СПбГТУ, N443, С.-Пб.: 1992, с.100-121.

[10] Zhilin P.A. A New Approach to the Analysis of Free Rotations of Rigid Bodies.//ZAMM Z. angew. Math. Mech. **76** (1996), **4**. pp.187-204.

[11] Truesdell C., Toupin R. The Classical Field Theories, Encyclopedia of Phycics. Springer - Verl, 1960 vol s/1

[12] Эйлер Л. Основы динамики точки. М.-Л.: ГИТТЛ, 1938, 500с.

[13] Гельмгольц Г. О сохранении силы. М.-Л.: ГИТТЛ, 1934, 143с.