

УДК 621.771.073.001.5

Инж. ГАРКАВИИ М. А., канд. физ.-мат. наук ЖИЛИН П. А., канд. техн. наук
РУДЕЛЬСОН В. М.

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПЛОСКОЙ ТЕРМОУПРУГОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ РАБОЧИХ ВАЛКОВ ЛИСТОВЫХ СТАНОВ

Главные процессы во вращающихся валках прокатных станов исследовались в работах [1-6]. Анализ которых показал, что в результате периодического теплового воздействия на поверхности, в валке возникает поле температур, являющееся суперпозицией двух полей осесимметричного, охватывающего весь валок, и осесимметричного, имеющего место в тонком поверхностном слое, толщина которого меньше радиуса валка.

Решения плоской термоупругой задачи для вращающегося валка [2, 5] показали, что аналогично можно представить и поле термоупругих напряжений. В результате экспериментальных исследований [6] установили, что условия охлаждения могут оказывать существенное влияние на прочность валков.

В статье приведен асимптотический анализ решения задачи термоупругости для тонкого поверхностного слоя, в результате чего получаются достаточно простые выражения для температуры и термоупругих напряжений. Анализируется также влияние условий охлаждения на напряженное состояние валков.

Задача термоупругости решается в квазистатической постановке. Предполагается, что валок вышел на установившийся (квазистационарный) режим, при этом осесимметричное ядро температурного поля характеризуется постоянной температурой, и только в поверхностном слое происходят высокочастотные тепловые процессы, повторяющиеся при каждом обороте. Такой модели соответствует осесимметричное поле термоупругих напряжений в поверхностном слое, так как осесимметричное ядро температурного поля не создает напряженного состояния.

Для квазистационарного температурного поля в валке ставится задача Неймана. Предполагается, что тепловой поток вращается вокруг валка с постоянной угловой скоростью. Задача сводится к интегрированию уравнения теплопроводности:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} = -a \frac{\partial T}{\partial \tau}, \quad (1)$$

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq r \leq b, \quad \tau > 0.$$

при граничных условиях и условиях периодичности

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=b} = \frac{1}{\lambda} q(\varphi, \tau), \quad T|_{\varphi=0} = T|_{\varphi=2\pi}, \quad q\left(\varphi, \frac{2\pi}{\omega} i\right) = q(\varphi, 0);$$

$$T|_{r=0} < \infty, \quad \left. \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right|_{\varphi=0} = \left. \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right|_{\varphi=2\pi}, \quad T\left(\varphi, \frac{2\pi}{\omega} i\right) = T(\varphi, 0),$$

где $T = T(r, \varphi, \tau)$ — температура валка; $q(\varphi, \tau)$ — тепловой поток на границе; r, φ — текущие координаты точки в полярных координатах; τ — время; a, λ — коэффициенты теплопроводности и теплопроводности; ω — угловая скорость вращения; b — радиус валка; i — произвольное целое число.

К уравнению теплопроводности и граничным условиям необходимо присоединить условие разрешимости задачи Неймана:

$$\int_0^{2\pi} q(\varphi, \tau) d\varphi = 0.$$

Физический смысл которого состоит в равенстве нулю постоянной составляющей теплового потока, пронизывающего боковую поверхность валка. Иными словами, в течение одного оборота выполняется тепловой баланс: количество тепла, полученное валком от притока в очаге деформации полностью отводится при охлаждении.

Пусть известно количество тепла Q , поступившее в валок в очаге деформации на дуге, соответствующей центральному углу δ . Зададим вращающийся тепловой поток в виде функции Гаусса (почти все тепловыделение происходит в очаге деформации):

$$q(\varphi, \tau) = q_0 e^{-\frac{\pi(\varphi - \omega\tau)^2}{\delta^2}}, \quad Q = \int_0^{2\pi} q(\varphi, \tau) d\varphi.$$

Проведем разложение в ряде Фурье на интервале $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, получим:

$$q(\varphi, \tau) = \frac{q_0 \delta}{2\pi} + \frac{q_0 \delta}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{\pi^2 n^2 \delta^2}{4\tau}} \cos n(\varphi - \omega\tau); \quad n=1, 2, 3, \dots$$

где q_0 — средняя плотность теплового потока на дуге захвата.

Если на всей остальной поверхности валка происходит равномерная теплоотдача с плотностью теплового потока q_1 , то из условия разрешимости получаем

$$q_0 \delta = q_1 (2\pi - \delta) \text{ или, так как } \frac{\delta}{2\pi} \ll 1, \quad q_0 \delta = q_1 2\pi.$$

Граничное условие уравнения (1) при $r=b$ для этого случая примет вид

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=b} = \frac{1}{\lambda} \frac{q_0 \delta}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{\pi^2 n^2 \delta^2}{4\tau}} \cos n(\varphi - \omega\tau); \quad (2)$$

Пусть Δ — толщина поверхностного слоя, причем выполняется неравенство $\frac{\Delta}{b} \ll 1$. Переходя в уравнении (1) и в граничном условии (2) к новой переменной ξ по формуле $\tau = b - \Delta\xi$, $0 \leq \xi \leq 1$, получаем после некоторых преобразований с точностью до членов порядка $\frac{\Delta}{b}$ уравнение теплопроводности и граничные условия для поверхностного слоя

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2} = \frac{\Delta^2}{a} \frac{\partial T}{\partial \tau}, \quad 0 \leq \xi \leq 1, \quad \tau > 0, \quad (3)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} = -\frac{\Delta}{\lambda} \frac{q_0 \delta}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2 \delta^2}{4\pi}} \cos n(\varphi - \omega\tau),$$

$$T|_{\xi=1} = 0.$$

Температура $T = T(\xi, \varphi, \tau)$ ищется в виде разложения:

$$T(\xi, \varphi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} [v_n(\xi) \cos n(\varphi - \omega\tau) + g_n(\xi) \sin n(\varphi - \omega\tau)], \quad (4)$$

где g_n, v_n — некоторые функции от ξ .

Подстановка выражения в уравнение теплопроводности для слоя (3) дает систему двух уравнений

$$\frac{d^2 v_n}{d\xi^2} - 2k^2 g_n = 0, \quad \frac{d^2 g_n}{d\xi^2} + 2k^2 v_n = 0, \quad (5)$$

$$\text{где } 2k^2 = \frac{\Delta^2}{a} n \omega.$$

Исключая из этих уравнений сначала v_n , а затем g_n , находим

$$\frac{d^4 v_n}{d\xi^4} + 4k^4 v_n = 0, \quad \frac{d^4 g_n}{d\xi^4} + 4k^4 g_n = 0. \quad (6)$$

Полученные уравнения имеют такой же вид, как и уравнения изгиба тонкой плиты, покоящейся на упругом винклеровском основании. Достаточно решить одно из этих уравнений, например, для v_n , а затем из первого уравнения (5) определить g_n .

Уравнения (6) решаются при следующих граничных условиях:

$$v_n'(0) = v_n(0) = 0, \quad v_n''(0) = 0, \quad g_n'(0) = k^2 v_n;$$

$$v_n(1) = g_n(1) = v_n'(1) = g_n'(1) = 0;$$

$$\text{где } B_n = \frac{\Delta}{\lambda} \frac{q_0 \delta}{\pi} e^{-\frac{n^2 \delta^2}{4\pi}}.$$

Граничные условия, содержащие вторую и третью производные, получаются из уравнений (5) и их производных при граничных

значениях переменной ξ . Рассмотрим первое уравнение (6). Его интегралом является функция

$$v_n(\xi) = e^{-k\xi} (C_1 \sin k\xi + C_2 \cos k\xi) + e^{k\xi} (C_3 \sin k\xi + C_4 \cos k\xi).$$

Если предположить, что для вала существует такое значение $\Delta_1 > \Delta$, что в области $x = \xi \Delta_1$, $0 \leq x \leq \Delta_1$ справедливо асимптотическое уравнение (3), то исходя из затухающего характера температуры при удалении от границы $\xi = 0$, необходимо положить постоянные $C_3 = C_4 = 0$.

Находим из граничных условий при $\xi = 0$ значения постоянных C_1 и C_2 :

$$v_n(\xi) = \frac{B_n}{2k} e^{-k\xi} (\sin k\xi - \cos k\xi). \quad (7)$$

Используя первое уравнение (5), находим

$$g_n(\xi) = \frac{B_n}{2} e^{-k\xi} (\cos k\xi + \sin k\xi). \quad (8)$$

Переходя в выражениях (7) и (8) к переменной $x = \xi \Delta$, представим разложение (4) в виде

$$T(x, \varphi, \tau) = \frac{q_0 \delta}{\sqrt{2\pi\lambda}} \sqrt{\frac{a}{\omega}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-\left(\frac{n^2 \delta^2}{4\pi} + \sqrt{\frac{n\omega}{2a}} x\right)} \times \\ \times \left[\cos \left(\sqrt{\frac{n\omega}{2a}} x + n(\varphi - \omega\tau) \right) - \sin \left(\sqrt{\frac{n\omega}{2a}} x + n(\varphi - \omega\tau) \right) \right]. \quad (9)$$

Окончательное выражение (9) не зависит от Δ .

На основании полученного выражения определим границу осесимметричного ядра температурного поля x_0 . Очевидно, что первая гармоника разложения затухает при возрастании x медленнее, чем другие. Если допустимо в точности в 5%, то поскольку сумма $\cos z + \sin z \leq \sqrt{2}$, можно сказать, что значение x_0 определяется из неравенства

$$e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2a}} x_0} \sqrt{2} < 0,05.$$

Отсюда следует формула для x_0 :

$$x_0 \geq 4,7 \sqrt{\frac{a}{\omega}}. \quad (10)$$

Рассмотрим следующий характерный пример вала толстолистового стана $b = 560$ мм, $\omega = 3,14$ 1/с, $a = 12,5$ мм²/с.

По формуле (10) получаем $x_0 \geq 9,4$ мм, а область, в которой справедливо асимптотическое уравнение теплопроводности, ограничена значением $\Delta_1 \approx 50$ мм.

Определим термоупругие напряжения. Проведем асимптотический анализ термоупругой задачи для крутовой области в случае плоского деформированного состояния.

В общем случае решение системы уравнений термоупругости в перемещениях можно представить в виде суммы частного решения неоднородного уравнения для термоупругого потенциала и соответствующей краевой задачи. Уравнение для термоупругого потенциала имеет вид [7]:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \chi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \varphi^2} = mT, \quad 0 \leq r \leq b, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad (11)$$

$$m = \frac{1 - \nu}{1 + \nu} \alpha,$$

где ν — коэффициент Пуассона;

α — коэффициент линейного расширения.

Компоненты напряжения, отвечающие частному решению уравнения (11), определяются выражениями

$$\begin{cases} \sigma_r = 2G \left(\frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} - mT \right), \\ \sigma_\varphi = -2GmT, \\ \sigma_z = -2GmT, \\ \sigma_\varphi = 2G \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \varphi^2} - mT \right), \\ \tau_{r\varphi} = 2G \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial \varphi} \right), \end{cases} \quad (12)$$

где

G — модуль сдвига;

$\sigma_r, \sigma_\varphi, \sigma_z, \tau_{r\varphi}$ — компоненты напряжения радиального, продольного, окружного и касательного соответственно.

Граничные условия соответствующей краевой задачи получаем по формулам (12). Так, при $r=b$ должно выполняться $\sigma_r(b) = \tau_{r\varphi}(b) = 0$, следовательно, необходимо после вычисления $\sigma_r, \tau_{r\varphi}(b)$ по выражениям (12), в краевой задаче задать

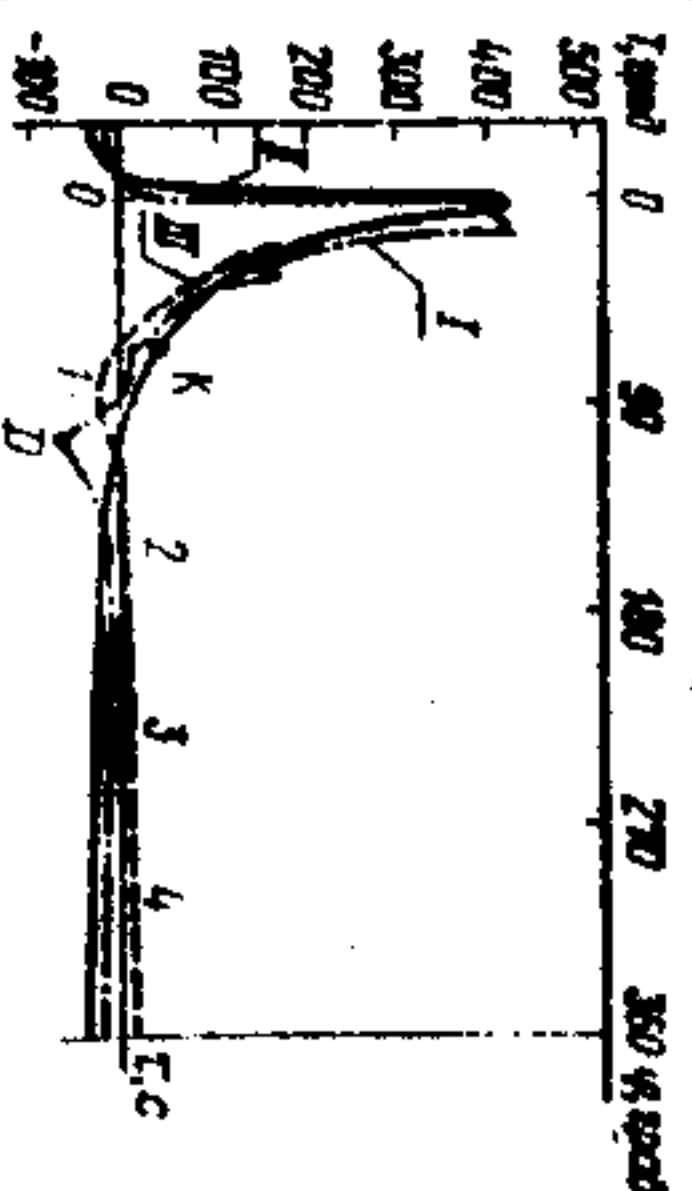
$$\sigma_r(b) = -2G \left[\left(\frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} - mT \right) \right]_{r=b}, \quad \tau_{r\varphi} = -2G \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial \varphi} \right) \right]_{r=b}.$$

Асимптотический анализ уравнения для термоупругого потенциала и компонент напряжения дает

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} = \Delta^2 mT, \quad \sigma_r = \tau_{r\varphi} = 0, \quad \sigma_\varphi = \sigma_z = -2GmT. \quad (13)$$

Таким образом, выражения (9, 13) просто описывают температурное поле и поле термоупругих напряжений прокатного вала. На рисунке показано полученное экспериментально в работе [6] распределение температуры по поверхности вала толстолистового стана горячей прокатки с учетом выделения осесимметричной

составляющей температурного поля (кривая 1) и то же распределение температуры, определенное расчетом (кривая 2). При расчете было принято, что температура в очаге деформации равна температуре по кривой 1. Для определения мгновенного распределения температур по поверхности вала в разложении (9) приня-



Неосесимметричная температура на поверхности вала:

$$T = \frac{q_0 \delta}{1 + 2 \pi \lambda} \sqrt{\frac{a}{\omega}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \times \times e^{-\frac{n^2 \delta^2}{4\pi}} (\cos n\varphi - \sin n\varphi). \quad (14)$$

Коэффициент при сумме в формуле (14) имеет размерность температуры, обозначив его через A_0 , запишем уравнение (14) в виде $T = A_0 \tilde{T}(\delta, \varphi)$, где $\tilde{T}$ — безразмерный коэффициент. Параметр δ выбирался в пределах $\delta = 0,03 - 0,04$. Расчетное распределение температур оказалось достаточно близко к экспериментальному, что подтверждает правильность исходных теплофизических положений и полученной математической модели.

Для выяснения влияния конструктивных особенностей системы охлаждения валков на их стойкость, расчетным путем определено распределение термических напряжений в поверхностном слое материала валков. Анализ экспериментальной кривой показывает, что при подводе струйного охлаждения к поверхности вала в точке D (кривая 1) рисунка, в месте падения струи воды на поверхности вала наблюдается снижение температуры на 40°C по сравнению с осесимметричной составляющей температурного поля. Используя формулу (13), и полагая $G = 0,8 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$, $\nu = 0,3$, $\alpha = 12 \cdot 10^{-6} \text{ 1/град}$, получим, что на участке поверхности действую растягивающие напряжения $\sigma_\varphi = \sigma_z = 1400 \text{ кг/см}^2$.

Показанная на рисунке кривая III получена расчетным путем при условии, что место подвода охлаждающей воды сдвинуто в сторону очага деформации и находится в точке K кривой II. При этом величина растягивающих напряжений снизилась до 200 кг/см^2 . Эффект, связанный с неравномерным охлаждением, учитывался теоретически путем суперпозиции температурных распределений, обусловленных тепловыми потоками от проката к валку и от вала к охладителю. Полученное снижение растягивающих напряжений должно благоприятно отразиться на стойкости вала, вследствие снижения амплитуды циклических напряжений на его поверхности. Отсюда следует, что подвод охлаждающей воды желательно выполнять таким образом, чтобы струи воды

попали на поверхность вала в месте, расположенном к выходу металла из очага деформации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Неандов Г. П. К теории теплообмена прокатных валков и расплавленного металла. Журнал технической физики, т. VII, вып. 10, 1937, с. 1114—1125.
2. Денисов Ю. В., Комиссарова М. Л. Известия вузов. Черная металлургия. № 8, 1976, с. 125—133.
3. Подухин П. И., Никольцев В. А., Подухин В. П. и др. Контактное взаимодействие металла и инструмента при прокатке. М., «Металлургия», 1974, 199 с.
4. Третьяков А. В., Габбер Э. А., Шичков А. Н. и др. Совершенствование теплового процесса листовой прокатки. М., «Металлургия», 1973, с. 300.
5. Сери Samuel. Iron and Steel Eng., 1963, v. 40, p. 165.
6. Stevens P. G., Jeens K. P., Harper P. Increasing work-roll life by improved roll-cooling practice. Journal of the Iron and Steel Institute, January, 1971, № 1, p. 13.
7. Goodier J. N. On the Integration of the Thermo-Elastic Equations. Phil. Mag., S. 7, v. 23, No 157, May 1937.