[4] Кузютин В.Ф. Погрешность кубатурной формулы общего вида на некоторых классах периодических функций.–В кн.: Методы и модели управления и контроля.-Рига,1978,вып.II, с.79–83.

[5] Кузютин В.Ф., Кузютина Е.Б. Точные оценки ошибки квадратурной формулы с равными коэффициентами и равноотстоящей сеткой узлов в классе периодических функций $\widetilde{W}_2^{(m)}(1,[0;1$ В кн.: Методы и прибора автоматического контроля.–Рига, 1975,вып.I3,с.9I–94.

[6] Кузютин В.Ф. Погрешность кубатурной формулы с равными коэффициентами и равноотстоящей сеткой узлов на некотор классах функций.–Изв.АН КазССР, серия физ-мат.,1980,№ 3 с.73–75.

[7] Абрамовиц М.,Стриган И. Справочник по специальным функц ям.–М.,1972.

[8] Янке Е.,Эмде Ф. Таблицы функций с формулами и кривыми.– М.,1948.

[9] Hautot A. A new method for the evaluation of slowly convergent series. J.M.Phys.,15,№ 10,1974,с.1722–1727.

[10] Glasser M. The evalution of lattice sums. J.M.Phys.,т.14,№ 3,1973,с.409–413.

УДК 517.93

Д.П.Голоскоков,П.А.Жилин (Ленинград)

УРАВНЕНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ КРУГОВОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ КРУЧЕНИИ

Рассматривается задача упругой устойчивости при кручении тонкой изотропной круговой цилиндрической оболочки. По нелинейной теории определяется равновесная конфигурация. Выводятся уравнения, исследование которых позволяет судить об устойчивости этой конфигурации. Для оболочек "средней" длины выводятся оценки снизу и сверху для критических нагрузок.

I. Введение. Задача устойчивости при кручении круговой цилиндрической оболочки не является новой [I]. И тем не менее, до настоящего времени нет удовлетворительного решения этой задачи. Эксперименты не подтверждают как линейную, так и нелинейную теорию. Отклонение от линейной теории составля на примерно 35% [I]. Видимо, хорошего согласования экспери-мента с расчетом можно достичь и в рамках линейной теории. При этом последняя должна быть пересмотрена с учетом ряда факторов. Основные из них – граничные условия, моментность и нелинейность исходного состояния. Именно этому в работе и уделено основное внимание.

2. Основные уравнения. Исходное состояние.

Нелинейные уравнения в недеформированной метрике могут быть записаны в виде

$$\nabla \cdot T_\varkappa = 0, \qquad \nabla \cdot M_\varkappa + (\nabla R^T \cdot T_\varkappa)_\times = 0. \tag{1}$$

Здесь $R = R(x,\varphi)$ – радиус-вектор деформированной срединной поверхности, индекс "$\times$" внизу означает векторный инвариант тензора [3]. Тензоры $T_\varkappa$, $M_\varkappa$ усилий и моментов Пиолы-Кирхгофа связаны с деформациями через энергию деформации $\Psi = \Psi(A^\times, K^\times)$ с помощью формул Коши-Грина.

$$T_\varkappa = \frac{\partial \Psi}{\partial A^\times} \cdot P^T, \qquad M_\varkappa = \frac{\partial \Psi}{\partial K^\times} \cdot P^T. \tag{2}$$

Здесь $A^\times$, $K^\times$ – меры деформации, аналоги градиента деформации в теории упругости, P – ортогональный тензор поворота.

$$A^\times = \nabla R \cdot P, \qquad K^\times = -\frac{1}{2} r^\alpha (P^T \cdot \partial_\alpha P)_\times,$$
$$\nabla = \sum_{\alpha=1}^{2} r^\alpha \partial_\alpha = r^\alpha \partial_\alpha, \quad \partial_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \partial_2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi}. \tag{3}$$

Через r^α $(\alpha = 1,2)$ обозначены векторы взаимного базиса на срединной поверхности. Простейший вид энергии деформации в нелинейной теории определяется формулой

$$\Psi = \mathcal{E} \cdot\cdot C_1 \cdot\cdot \mathcal{E} + \Phi \cdot\cdot C_3 \cdot\cdot \Phi + \gamma \cdot \Gamma \cdot \gamma. \tag{4}$$

Тензоры деформации $\mathcal{E}$, Φ, γ связаны с мерами деформации формулами [2]

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}(A^\times \cdot A^{\times T} - a), \quad \Phi = K^\times \cdot a \cdot A^{\times T} - k \cdot \mathcal{E} - k \cdot a, \tag{5}$$
$$\gamma = A^\times \cdot n, \qquad a = r^\alpha r_\alpha,$$

где k – тензор изгиба-кручения, C_1, C_3 – тензоры упругости четвертого ранга, Γ – тензор сдвига.

Равновесную конфигурацию определим следующим образом:

$$R(x,\varphi)=\lambda x E_1 + R\mathcal{N}(x,\varphi),$$

$$P(x,\varphi)=e_1e_1+\cos\frac{x\theta}{\ell}(\mathbb{1}-e_1e_1)-\sin\frac{x\theta}{\ell}e_1\times\mathbb{1},$$

$$\mathcal{N}(x,\varphi)=\cos\frac{x\theta}{\ell}n(\varphi)+\sin\frac{x\theta}{\ell}e_2(\varphi), \tag{6}$$

$$E_2(x,\varphi)=-\sin\frac{x\theta}{\ell}n(\varphi)+\cos\frac{x\theta}{\ell}e_2(\varphi),$$

$$E_1=e_1,\ \lambda=const,\ \theta=const.$$

Здесь r – радиус срединной поверхности, ℓ – длина цилиндра, R – радиус срединной поверхности после деформации, $\mathbb{1}$ – единичный тензор. Векторы E_1, E_2, $\mathcal{N}$ образуют ортонормированный базис на деформированной срединной поверхности. Граничные условия, которым удовлетворяет найденная конфигурация с точностью до эффектов $O(\mu^2)$ ($\mu=\frac{r\theta}{\ell}$ – относительный угол закручивания) соответствуют защемлению и опиранию примерно в одинаковой степени. Величина μ, наблюдаемая в экспериментах, мала, так что $\mu^2 \ll 1$. Рассматривая задачу чистого кручения, следует положить $\lambda=1$, а тогда $R\approx r$.

3. Наложение малой деформации на конечную.

Уравнения нейтрального равновесия в недеформированной метрике имеют вид

$$\nabla\cdot t_\pi=0,\quad \nabla\cdot m_\pi+(\nabla R^T\cdot t_\pi+\nabla u_1^T\cdot T_\pi)_\times=0. \tag{7}$$

Здесь t_π, m_π, u_1 – первые вариации тензоров T_π, M_π и вектора смещения соответственно. Принятие гипотез Кирхгофа – Лява позволяет свести систему (7) к трем уравнениям относительно вариаций перемещений u, v, w – компонент вектора u_1. Используя операторную запись, эту систему можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} L_{11}u+L_{12}v+L_{13}w&=0,\\ L_{21}u+L_{22}v+L_{23}w&=0,\\ L_{31}u+L_{32}v+L_{33}w&=0. \end{aligned} \tag{8}$$

Граничные условия для вариаций и их производных – однородные. Систему (8) удобно свести к одному уравнению относительно новой неизвестной функции $F(x,\varphi)$. При этом функции u, v и w явно выражаются через функцию F.

$$\begin{aligned} u&=(L_{13}L_{22}-L_{12}L_{23})F,\\ v&=(L_{23}L_{11}-L_{13}L_{21})F,\\ w&=(L_{12}^2-L_{11}L_{22})F. \end{aligned} \tag{9}$$

Для функции F может быть получено следующее уравнение, при выводе которого отброшены величины порядка μ^2, h^2 по сравнению с единицей ($h_*^2 = h^2/12 r^2$, h – толщина оболочки)

$$h_*^2 \left[\Delta^4 F + \underline{\frac{2}{r^4} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \left(\Delta^2 F + 2\frac{\partial^2}{\partial x^2} \Delta F\right)}\right] + \frac{1-\nu^2}{r^4} \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} =$$

$$= \mu \frac{1-\nu}{r^3} \frac{\partial^2}{\partial x \partial \varphi} \left[\Delta^2 F + \frac{1}{r^2} \Delta F + \underline{\frac{4(1+\nu)}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}}\right]. \qquad (10)$$

Уравнению (10) удовлетворяет, очевидно, любая из функций u, v или w. Отбрасывая в этом уравнении подчеркнутые слагаемые, приходим к общеизвестному уравнению [1]. В полной версии уравнение (10) ранее, видимо, не встречалось.

Будем искать решение уравнения (10) в виде ряда Фурье

$$F(x,\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(F_n^{(1)}(x) \cos n\varphi + F_n^{(2)}(x) \sin n\varphi\right). \qquad (11)$$

Система двух обыкновенных дифференциальных уравнений относительно неизвестных функций $F_n^{(1)}$, $F_n^{(2)}$ сводится к одному обыкновенному дифференциальному уравнению шестнадцатого порядка. Устойчивость тонких оболочек теряется с образованием волн по всей длине оболочки, если цилиндр не слишком длинен. Будем искать такие проникающие решения, которые описывают волнообразование, охватывающее цилиндр по всей длине. Этому требованию отвечают функции вида

$$f(\xi) = Ce^{i\beta\xi}, \quad i = \sqrt{-1}, \quad C, \beta = const. \qquad (12)$$

Характеристическое уравнение при этом имеет два вещественных корня при $n \geqslant 2$. Решение задачи, соответствующее двум различным корням характеристического уравнения, может быть получено аналитически при некоторых упрощающих предположениях [.]. Это решение дает завышение критической нагрузки на 35 – .%. Более точное решение, полученное с помощью ЭВМ, снижает нагрузку на 3 – 5%. Таким образом, это решение следует рассматривать как оценку критической нагрузки сверху. Оценка критической нагрузки снизу соответствует кратному корню характеристического уравнения. Истинная критическая нагрузка лежит между нижней и верхней оценками. Для не слишком длинных оболочек, удовлетворяющих условию $h_*^2 n^4 \ll 1$, получена формула, дающая оценку снизу для критических напряжений при $n \geq 2$

$$\tau = \frac{1}{3\sqrt{6}} \frac{(n^2-2)^{3/4}\, n^{3/2}}{n^2-1} \frac{E}{(1-\nu^2)^{3/4}} \left(\frac{h}{r}\right)^{3/2}. \qquad (13)$$

При напряжениях ниже определяемых формулой (13) вообще невозможно волнообразование, охватывающее весь цилиндр. При $n=2$ из (13) получается формула, практически совпадающая с формулой Шверина [1]. Для очень длинных оболочек волнообразование носит локальный характер и решение задачи не может быть получено описанным выше способом. При изучении общей ситуации, вероятно, необходимо использовать все корни характеристического уравнения. Только после этого можно сделать окончательные суждения о приемлемости или неудовлетворительности линейной теории.

Библиография

[1] Григолюк Э.И.,Кабанов В.В. Устойчивость оболочек.-М., 1978,с.155-165.

[2] Жилин П.А. Теория упругих простых оболочек.-Алма-Ата, 1981,с.153.

[3] Лагалли М. Векторное исчисление.-М.,1936.

УДК 517.925

Л.С.Сперанская (Ленинград)

НЕОБХОДИМЫЕ ЧАСТОТНЫЕ УСЛОВИЯ АБСОЛЮТНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ В КРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ ПАРЫ ЧИСТО МНИМЫХ И ОДНОГО НУЛЕВОГО КОРНЯ

В настоящей работе теоремы статьи [1] распространяются на случай, когда матрица линейной части системы имеет одно нулевое и два чисто мнимых собственных значения.

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = Ax + b\varphi(\sigma),$$
$$\sigma = c^* x,$$

где A – постоянная, $n\times n$ – матрица, b и c – постоянные n -векторы, $*$ – знак транспортирования, $\varphi(\sigma)$ – непрерывная скалярная функция, удовлетворяющая условиям

$$0 < \frac{\varphi(\sigma)}{\sigma} \leq \mu, \qquad \varphi(0)=0.$$