МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 · 1980

УДК 539.3

СПЕКТРЫ И ФОРМЫ КОЛЕБАНИЙ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА, ПОЛУЧЕННЫЕ НА ОСНОВЕ ТРЕХМЕРНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ И ТЕОРИИ ПЛАСТИН

П. А. ЖИЛИН, Т. П. ИЛЬИЧЕВА

(Ленинград)

В настоящее время признано, что в динамических задачах теории пластин и оболочек учет деформации поперечного сдвига и инерции вращения является обязательным. Проведены обширные исследования по сравнению результатов, получающихся по теории пластин и пространственной теории упругости. Представление об этих исследованиях можно получить на основе обзоров [1, 2]. Там же обсуждаются исходные предположения, положенные в основу теории пластин и оболочек.

Все известные теории пластин можно разделить на две категории: к первой относятся теории, в которых взаимодействие между прилегающими частями пластины осуществляется посредством усилий и моментов (теория «простых» пластин [3, 4]); ко второй категории относятся так называемые мультиполярные теории (здесь они не будут обсуждаться).

В [4] показано, что основные уравнения теории простых пластин и оболочек можно получить без использования каких бы то ни было гипотез относительно распределения перемещений и напряжений в теле пластины. Причем эти уравнения совпадают с известными уравнениями Миндлина [5]. Однако определение перемещений и поворотов в [4, 5] существенно различаются. В [4] приводятся следующие формулы для перемещений и поворотов (здесь выпишем их для случая однородных пластин):

$$2h\mathbf{U}=\int_{-h}^{h}\mathbf{U}^*\,dz,\qquad \frac{2}{3}h^3\boldsymbol{\varphi}=\mathbf{n}\times\int_{-h}^{h}\mathbf{U}^*z\,dz$$

где $\mathbf{U}, \boldsymbol{\varphi}$ – векторы смещения и поворота частиц пластины, $\mathbf{U}^*$ – вектор смещения точек трехмерной среды, $2h$ – толщина пластины, $\mathbf{n}$ – нормаль к срединной плоскости. Данные формулы получены из требования равенства количеств движения и кинетического момента у трехмерного тела и пластины. Их левые части обращаются в нуль на некоторых движениях трехмерного тела; такие движения, очевидно, не могут быть описаны с позиций теории пластин.

1. Частоты и формы собственных колебаний параллелепипеда. Как правило, пространственные уравнения теории упругости не допускают точных решений. Однако существуют некоторые типы граничных условий, когда для простейших областей такие решения можно построить. В частности, допускает точное решение следующая задача на собственные значения: найти в области $-a<x<a$, $-b<y<b$, $-h<z<h$ решения уравнений Ламе [6]:

$$\nabla(\nabla\cdot\mathbf{U})+(1-2\nu)\nabla\cdot\nabla\mathbf{U}+(1-2\nu)\gamma\mathbf{U}=0,\qquad \gamma=\rho\omega^2/G \tag{1.1}$$

где ∇ — оператор Гамильтона, $\mathbf{U}$ — вектор смещения, G — модуль сдвига, ν — коэффициент Пуассона, γ — собственные числа, ω — частоты собственных колебаний, ρ — плотность материала.

Решения уравнений (1.1) должны удовлетворять граничным условиям «скользящей заделки»

$$u_2=w=\sigma_x=0 \text{ при } x=\pm a, \qquad u_1=w=\sigma_y=0 \text{ при } y=\pm b$$
$$\sigma_z=\tau_{zx}=\tau_{zy}=0, \qquad \text{при } z=\pm h \tag{1.2}$$

где u_1, u_2, w — компоненты вектора смещения; σ_x, σ_y, σ_z, τ_{xy}, τ_{xz}, τ_{yz} — компоненты тензора напряжений.

Решение задачи (1.1), (1.2) удобно выразить через потенциалы

$$\mathbf{U}=\nabla\varphi+\nabla\times\boldsymbol{\psi}, \qquad \nabla\cdot\boldsymbol{\psi}=0, \qquad \boldsymbol{\psi}=\psi_1\mathbf{i}_1+\psi_2\mathbf{i}_2+\psi_3\mathbf{n}$$

причем потенциалы φ и $\boldsymbol{\psi}$ являются решениями уравнений

$$2(1-\nu)\nabla\cdot\nabla\varphi+(1-2\nu)\gamma\varphi=0, \qquad \nabla\cdot\nabla\boldsymbol{\psi}+\gamma\boldsymbol{\psi}=0 \tag{1.3}$$

Построение решения задачи (1.1), (1.2) с принципиальной точки зрения является несложной проблемой, однако оно является довольно громоздким, чем, вероятно, и объясняется ее отсутствие в литературе. С другой стороны, оно представляет несомненный интерес как эталонное решение, служащее для проверки различного рода приближенных теорий, в частности теории пластин. С этой точки зрения нет необходимости искать все решения задачи (1.1), (1.2), а достаточно найти такое подмножество решений, которое содержало бы все характерные особенности распределения перемещений по толщине параллелепипеда. В частности, можно ограничиться построением решений, обладающих свойствами симметрии относительно плоскостей $x=0$, $y=0$. А именно будем считать, что перемещение w по нормали к плоскости xy — четная функция x и y, перемещение u_1 нечетно по x и четно по y, перемещение u_2 (вдоль оси y) четно по x и нечетно по y.

Как известно, системы функций 1, $\cos\lambda_n x$, $\sin\lambda_n x$ и 1, $\cos\mu_m y$, $\sin\mu_m y$ полны в интервалах $[-a, a]$, $[-b, b]$, если

$$\lambda_n=(2n-1)\pi/2a, \qquad \mu_m=(2m-1)\pi/2b \qquad (n, m=1, 2, \ldots)$$

Поэтому решение задачи (1.1), (1.2) можно искать в виде разложений по этим функциям. Например, перемещение w можно записать в виде

$$w(x,y,z)=w_0(z)+\sum_{n=1}^{\infty}(w_n^{(1)}\cos\lambda_n x+w_n^{(2)}\cos\mu_n y)+$$
$$+\sum_{n,m=1}^{\infty}w^{nm}\cos\lambda_n x\cos\mu_m y \tag{1.4}$$

Ряды (1.4) сходятся равномерно. Тогда из краевых условий (1.2) получаем, что $w_0=w_n^{(1)}=w_n^{(2)}=0$. Аналогично можно представить тангенциальные перемещения

$$u_1=\sum_{n,m=1}^{\infty}u_1^{nm}(z)\sin\lambda_n x\cos\mu_m y, \qquad u_2=\sum_{n,m=1}^{\infty}u_2^{nm}(z)\cos\lambda_n x\sin\mu_m y \tag{1.5}$$

Подставляя эти разложения в (1.1), получаем, что w^{nm}, u_1^{nm}, u_2^{nm} должны удовлетворять системе трех обыкновенных уравнений. Причем коэффициенты при различных n и m не связаны между собой, т. е. для каждой пары n, m получили задачу на собственные значения. Оператор последней является симметричным и положительным и, следовательно, имеет счетное множество решений.

В [1, 2] эти решения принято называть модами. Таким образом, каждая мода является двухпараметрическим набором решений. Основной задачей п. 1 является построение всех мод колебаний параллелепипеда, обладающих указанными свойствами симметрии. В дальнейшем параметры (индексы n и m) будем для краткости опускать. Решение будем представлять через потенциалы, которые, очевидно, достаточно выбрать в виде

$$\begin{gathered}\varphi=\Phi(z)\cos\lambda x\cos\mu y,\qquad \psi_1=\Psi_1(z)\cos\lambda x\sin\mu y\\ \psi_2=\Psi_2(z)\sin\lambda x\cos\mu y,\qquad \psi_3=\Psi_3(z)\sin\lambda x\sin\mu y\end{gathered}\tag{1.6}$$

Подставляя (1.6) в (1.3), получаем следующую систему уравнений для определения $\Phi(z)$ и $\Psi_k(z)$:

$$\begin{gathered}\Phi^{\cdot\cdot}+d_1^2\Phi=0,\qquad \Psi_k^{\cdot\cdot}+d_2^2\Psi_k=0,\qquad \Psi_3^{\cdot}-\lambda\Psi_1-\mu\Psi_2=0\quad (k=1,2,3)\\ d_1^2={}^1/_2(1-2\nu)\gamma/(1-\nu)-\alpha^2,\qquad d_2^2=\gamma-\alpha^2\\ \alpha^2=\lambda^2+\mu^2,\qquad f^{\cdot}=df/dz\end{gathered}\tag{1.7}$$

При $z=\pm h$ функции Φ, Ψ_k должны удовлетворять краевым условиям (1.2):

$$\begin{gathered}(\gamma-2\alpha^2)\Phi+2\mu\Psi_1^{\cdot}-2\lambda\Psi_2^{\cdot}=0\\ 2\mu\Phi^{\cdot}+(\gamma-2\mu^2)\Psi_1+2\lambda\mu\Psi_2=0\\ -2\lambda\Phi^{\cdot}+2\lambda\mu\Psi_1+(\gamma-2\lambda^2)\Psi_2=0\end{gathered}\tag{1.8}$$

Решения задачи (1.7), (1.8) распадаются на два класса. К первому относятся так называемые антиплоские или изгибные колебания, причем потенциалы удовлетворяют соотношениям

$$\Phi(z)=-\Phi(-z),\ \Psi_3(z)=-\Psi_3(-z),\ \Psi_1(z)=\Psi_1(-z),\ \Psi_2(z)=\Psi_2(-z)\tag{1.9}$$

Ко второму классу относятся плоские или продольно-сдвиговые колебания, а потенциалы имеют свойство

$$\Phi(z)=\Phi(-z),\ \Psi_3(z)=\Psi_3(-z),\ \Psi_1(z)=-\Psi_1(-z),\ \Psi_2(z)=-\Psi_2(-z)\tag{1.10}$$

В случае антиплоских колебаний легко получаются следующие два уравнения для определения собственных чисел γ:

$$(\gamma-2\alpha^2)^2\sin d_1h\cos d_2h+4\alpha^2d_1d_2\sin d_2h\cos d_1h=0,\qquad \cos d_2h=0\tag{1.11}$$

Для плоских колебаний уравнения имеют вид

$$(\gamma-2\alpha^2)^2\cos d_1h\sin d_2h+4\alpha^2d_1d_2\sin d_1h\cos d_2h=0,\ \sin d_2h=0\tag{1.12}$$

Первые уравнения в (1.11) и (1.12) носят названия уравнения Лэмба. Исследованию корней этих уравнений посвящена обширная литература. Однако в данной работе они будут рассматриваться с иной точки зрения, а именно: обычно ищут корни уравнений (1.11), (1.12), считая γ заданными, α^2 неизвестными. Здесь ситуация обратная: известно α^2, неизвестно γ. Можно доказать, используя, в частности, П-теорему [6], что γ имеет вид

$$\gamma=\alpha^2 q(p)=\alpha^2\left[q_{-1}p^{-1}+\sum_{s=0}^{\infty} q_s p^s\right],\quad p=\alpha^2 h^2 \tag{1.13}$$

Доказательство этого утверждения несложно, хотя и громоздко, поэтому оно опущено. Из (1.13) следует, что $p\gamma$ является аналитической функцией p во всей плоскости (комплексного) переменного p. Это обстоятельство и дает способ нахождения корней уравнения (1.11), (1.12). Любое из них может быть записано в виде $F(p, pq)=0$, где F – аналитическая функция переменных p и pq. Последнее утверждение может показаться странным, поскольку в (1.11) и (1.12) входят величины d_1 и d_2, являющиеся квадратными корнями, однако на самом деле в функцию $F(p, pq)$ входят только квадраты d_1^2 и d_2^2, но не сами d_1 и d_2. В этом нетрудно убедиться путем разложения функций $\cos d_2h=\cos[(q-1)p]^{1/2}$ и т. д. в ряды по p и сокращая на несущественные множители (в них будут входить квадратные корни).

Поскольку $F(p, pq)$ – аналитическая функция обеих переменных, а pq – в свою очередь аналитическая функция p, то уравнение $F(p, pq)=0$ можно дифференцировать по p любое число раз. Дифференцируя n раз уравнение $F(p, pq)=0$ и устремляя в получившихся уравнениях переменную p к нулю, получаем $n+1$ уравнение для определения чисел q_{-1}, q_s

$$F(0, q_{-1})=0,\quad (\partial F/\partial p)_{p=0}+(\partial F/\partial(pq))_{p=0}q_0=0, \ldots (s=0, 1, \ldots, n) \tag{1.14}$$

Последние уравнения также являются трансцендентными, однако они не содержат никаких параметров и, по крайней мере в рассматриваемых случаях, допускают явные решения. Используя сказанное выше, можно получить все спектры и соответствующие формы колебаний. Ниже будут приведены только окончательные результаты и классификация типов собственных колебаний, причем будем выписывать их в порядке возрастания собственных чисел γ (при фиксированном α^2).

1. *Изгибные колебания.* Собственные числа и частоты будут равны

$$\gamma=\frac{2\alpha^4h^2}{3(1-\nu)}+\alpha^2 o(\alpha^4h^4),\quad \frac{\rho\omega^2}{E}=\frac{\alpha^4h^2}{3(1-\nu^2)}+\alpha^2 o(\alpha^4h^4) \tag{1.15}$$

Собственные формы имеют вид (C – нормировочный множитель)

$$u_1=C\lambda\left[-\frac{(\gamma-2\alpha^2)\cos d_2h}{2d_1\cos d_1h}\sin d_1z+d_2\sin d_2z\right]\sin\lambda x\cos\mu y$$

$$u_2=C\mu\left[-\frac{(\gamma-2\alpha^2)\cos d_2h}{2d_1\cos d_1h}\sin d_1z+d_2\sin d_2z\right]\cos\lambda x\sin\mu y \tag{1.16}$$

$$w=C\left[\frac{(\gamma-2\alpha^2)\cos d_2h}{2\cos d_1h}\cos d_1z+\alpha^2\cos d_2z\right]\cos\lambda x\cos\mu y$$

2. *Сдвиговые плоские колебания.* Собственные частоты и формы в этом случае определяются выражениями

$$\gamma=\alpha^2,\quad \rho\omega^2=G\alpha^2 \tag{1.17}$$

$$u_1=(C/\lambda)\sin\lambda x\cos\mu y,\quad u_2=-(C/\mu)\cos\lambda x\sin\mu y,\quad w=0 \tag{1.18}$$

3. *Плоские колебания растяжения – сжатия*

$$\gamma=\frac{2\alpha^2}{1-\nu}+\alpha^2 o(\alpha^2h^2),\quad \frac{\rho\omega^2}{E}=\frac{\alpha^2}{1-\nu^2}+\alpha^2 o(\alpha^2h^2) \tag{1.19}$$

$$u_1=C\nu\lambda\left[-\frac{(\gamma-2\alpha^2)\sin d_2h}{2d_1d_2\sin d_1h}\cos d_1z+\cos d_2z\right]\sin\lambda x\cos\mu y$$

$$u_2=C\nu\mu\left[-\frac{(\gamma-2\alpha^2)\sin d_2h}{2d_1d_2\sin d_1h}\cos d_1z+\cos d_2z\right]\cos\lambda x\sin\mu y \tag{1.20}$$

$$w=-\frac{C_\nu}{d_2}\left[\frac{(\gamma-2\alpha^2)\sin d_2h}{2\sin d_1h}\sin d_1z+\alpha^2\sin d_2z\right]\cos\lambda x\cos\mu y$$

На первый взгляд, может показаться странным наличие в формулах (1.20) множителя ν. Однако здесь необходимо заметить, что в силу (1.19) коэффициент d_1 будет пропорционален ν и, следовательно, только третье соотношение в (1.20) останется пропорциональным ν.

4. Сдвиговые антиплоские колебания

$$\gamma=\frac{(2s-1)^2\pi^2}{4h^2}+\alpha^2,\qquad \frac{\rho\omega^2}{G}=\frac{(2s-1)^2\pi^2}{4h^2}+\alpha^2\quad(s=1,2,\ldots)\qquad(1.21)$$

$$\lambda d_2u_1=C\sin\lambda x\cos\mu y\sin d_2z,\ \mu d_2u_2=-C\cos\lambda x\sin\mu y\sin d_2z,\ w=0\quad(1.22)$$

5. Изгибные колебания. Собственные числа и частоты находятся из следующих формул:

$$\gamma=\frac{(2s-1)^2\pi^2}{4h^2}+\alpha^2K_s,\qquad \frac{\rho\omega^2}{G}=\frac{(2s-1)^2\pi^2}{4h^2}+\alpha^2K_s\quad(s=1,2,\ldots)$$

$$K_s=1+\frac{16\nu_0}{(2s-1)\pi}\operatorname{ctg}(d_1h)+o(\alpha^2h^2),\qquad \nu_0=\sqrt{\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}}\qquad(1.23)$$

Собственные формы определяются соотношениями (1.16) с учетом (1.23).

6. Сдвиговые плоские колебания

$$\gamma=\frac{s^2\pi^2}{h^2}+\alpha^2,\qquad \frac{\rho\omega^2}{G}=\frac{s^2\pi^2}{h^2}+\alpha^2\quad(s=1,2,\ldots)\qquad(1.24)$$

$$u_1=(C/\lambda)\sin\lambda x\cos\mu y\cos d_2z,\ u_2=-(C/\mu)\cos\lambda x\sin\mu y\cos d_2z,\ w=0\qquad(1.25)$$

Эти и последующие частоты и формы колебаний уже не могут быть получены по двумерной теории.

7. Плоские колебания растяжения — сжатия

$$\nu_0^2\gamma=\frac{(2s-1)^2\pi^2}{4h^2}+\alpha^2K_s,\qquad \frac{\rho\omega^2}{G}\nu_0^2=\frac{(2s-1)^2\pi^2}{4h^2}+\alpha^2K_s$$

$$K_s=1+\frac{16\nu_0^3}{(2s-1)\pi}\operatorname{ctg}d_2h+o(\alpha^2h^2)\quad(s=1,2,\ldots)\qquad(1.26)$$

$$u_1=C\lambda\left[\frac{(\gamma-2\alpha^2)\sin d_2h}{2d_1d_2\sin d_1h}\cos d_1z-\cos d_2z\right]\sin\lambda x\cos\mu y$$

$$u_2=C\mu\left[\frac{(\gamma-2\alpha^2)\sin d_2h}{2d_1d_2\sin d_1h}\cos d_1z-\cos d_2z\right]\cos\lambda x\sin\mu y\qquad(1.27)$$

$$w=\frac{C}{d_2}\left[\frac{(\gamma-2\alpha^2)\sin d_2h}{2\sin d_1h}\sin d_1z+\alpha^2\sin d_2z\right]\cos\lambda x\cos\mu y$$

8. Плоские колебания растяжения — сжатия. Формулы для собственных чисел и частот имеют вид

$$\gamma=\frac{s^2\pi^2}{h^2}+\alpha^2K_s,\qquad \frac{\rho\omega^2}{G}=\frac{s^2\pi^2}{h^2}+\alpha^2K_s\qquad(1.28)$$

$$K_s=1-\frac{8\nu_0}{s\pi}\operatorname{tg} d_1h+o(\alpha^2h^2) \quad (s=1,2,\ldots)$$

Формы колебаний в этом случае определяются выражениями (1.27), где γ соответствует (1.28).

9. Изгибные колебания. Собственные числа и частоты равны

$$\nu_0^2\gamma=\frac{s^2\pi^2}{h^2}+\alpha^2K_s, \qquad \frac{\rho\omega^2}{G}\nu_0^2=\frac{s^2\pi^2}{h^2}+\alpha^2K_s \tag{1.29}$$

$$K_s=1-\frac{8\nu_0^3}{s\pi}\operatorname{tg} d_2h+o(\alpha^2h^2) \quad (s=1,2,\ldots)$$

Формы собственных колебаний определяются соотношениями (1.16) с учетом формул (1.29).

Следует отметить, что расположение последних четырех спектров в порядке возрастания условно, поскольку выражения для собственных чисел зависят от коэффициента ν и параметра s.

2. Частоты и формы собственных колебаний пластины. Будем искать частоты и формы собственных колебаний пластины, заключенной в области $-a\leqslant x\leqslant a$, $-b\leqslant y\leqslant b$, $-h\leqslant z\leqslant h$, следуя линейной двумерной теории оболочек, изложенной в [3, 4].

Уравнения форм собственных колебаний пластины имеют следующий вид:

$$\begin{gathered}(1+\nu)\nabla(\nabla\cdot\mathbf{U})+(1-\nu)\nabla\cdot\nabla\mathbf{U}+(1-\nu)\gamma\mathbf{U}=0\\ (\pi^2/12)\nabla\cdot\nabla\mathbf{W}+(\pi^2/12)\nabla\times\boldsymbol{\varphi}+\gamma\mathbf{W}=0\\ -4(1+\nu)h^2\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{\varphi})+8h^2\nabla\cdot\nabla\boldsymbol{\varphi}-\pi^2(1-\nu)(\mathbf{n}\times\nabla w+\boldsymbol{\varphi})+\\ +4h^2(1-\nu)\gamma\boldsymbol{\varphi}=0,\ \gamma=\rho\omega^2/G\\ \mathbf{U}=u_1\mathbf{i}_1+u_2\mathbf{i}_2,\ \mathbf{W}=w\mathbf{n},\ \boldsymbol{\varphi}=\varphi_1\mathbf{i}_1+\varphi_2\mathbf{i}_2\end{gathered} \tag{2.1}$$

где $\nabla=\mathbf{i}_k\partial_k$ ($k=1, 2$) — двумерный оператор Гамильтона, ρ — плотность материала, ν — коэффициент Пуассона, G — модуль сдвига, ω — частоты собственных колебаний, u_i ($i=1, 2$), w — компоненты вектора перемещения, φ_i ($i=1, 2$) — компоненты вектора поворота.

Граничные условия имеют вид скользящей заделки

$$\begin{gathered}u_2=w=\varphi_1=T_{11}=M_{12}=0 \text{ при } x=\pm a,\\ u_1=w=\varphi_2=T_{22}=M_{21}=0 \text{ при } y=\pm b\end{gathered} \tag{2.2}$$

где T_{ik}, M_{ik} ($i=1, 2$; $k=1, 2, 3$) — компоненты тензоров усилий и моментов.

При построении решений задачи (2.1), (2.2), как и в п. 1, ограничимся рассмотрением лишь решений, обладающих свойством симметрии относительно плоскостей $x=0$, $y=0$. Будем считать, что перемещение w (по нормали к плоскости xy) — четная функция x, y, перемещение u_1 (вдоль оси x), поворот φ_2 (вокруг оси y) нечетны по x и четны по y, перемещение u_2 (вдоль оси y) и поворот φ_1 (вокруг оси x) четны по x и нечетны по y. Ищем решение в виде разложения по системам функций

$$1,\ \cos\lambda_nx,\ \sin\lambda_nx \text{ и } 1,\ \cos\mu_my,\ \sin\mu_my \tag{2.3}$$

$$\lambda_n=(2n-1)\pi/2a,\ \mu_m=(2m-1)\pi/2b \quad (n, m=1, 2, \ldots)$$

Тогда с учетом краевых условий (2.2) получим

$$u_1=\sum_{n,m=1}^{\infty} u_1^{nm}\sin\lambda_n x\cos\mu_m y,\qquad u_2=\sum_{n,m=1}^{\infty} u_2^{nm}\cos\lambda_n x\sin\mu_m y,$$

$$w=\sum_{n,m=1}^{\infty} w^{nm}\cos\lambda_n x\cos\mu_m y \tag{2.4}$$

$$\varphi_1=\sum_{n,m=1}^{\infty} \varphi_1^{nm}\cos\lambda_n x\sin\mu_m y,\qquad \varphi_2=\sum_{n,m=1}^{\infty} \varphi_2^{nm}\sin\lambda_n x\cos\mu_m y$$

Подставляя эти разложения в уравнения (2.1), приходим к выводу, что u_1^{nm}, u_2^{nm}, φ_1^{nm}, φ_2^{nm}, w^{nm} должны удовлетворять однородной системе пяти линейных уравнений. Причем определитель этой системы Δ распадается на произведения двух определителей Δ_1 и Δ_2. И условие существования нетривиального решения будет иметь вид

$$\Delta=\begin{vmatrix}(1-\nu)(\gamma-\alpha^2)-(1+\nu)\lambda^2 & -(1+\nu)\lambda\mu\\ -(1+\nu)\lambda\mu & (1-\nu)(\gamma-\alpha^2)-(1+\nu)\mu^2\end{vmatrix}\times$$

$$\times\begin{vmatrix}\gamma-\dfrac{\alpha^2\pi^2}{12} & -\dfrac{\mu\pi^2}{12} & \dfrac{\lambda\pi^2}{12}\\ -(1-\nu)\dfrac{\mu\pi^2}{4h^2} & (1-\nu)\left(\gamma-\dfrac{\pi^2}{4h^2}\right)+(1+\nu)\lambda^2-2\alpha^2 & (1+\nu)\lambda\mu\\ (1-\nu)\dfrac{\lambda\pi^2}{4h^2} & (1+\nu)\lambda\mu & (1-\nu)\left(\gamma-\dfrac{\pi^2}{4h^2}\right)+(1+\nu)\mu^2-2\alpha^2\end{vmatrix}=0 \tag{2.5}$$

где $\alpha^2=\lambda^2+\mu^2$ и для краткости опущены индексы n, m.

Приравняя нулю каждый из определителей (2.5), получим два частотных уравнения, одно из которых имеет два корня, а второе — три. Причем каждый из корней (2.5) будет зависеть от двух параметров n и m, т. е. будем иметь пять спектров собственных частот прямоугольной пластины. Далее нетрудно построить формы собственных колебаний, отвечающие этим спектрам. Приведем лишь окончательные результаты. Будем, как и в п. 1, выписывать решения в порядке возрастания частот (при фиксированных n и m):

$$\gamma=\frac{2\alpha^4h^2}{3(1-\nu)}+\alpha^2o(\alpha^4h^4),\qquad \frac{\rho\omega^2}{E}=\frac{\alpha^4h^2}{3(1-\nu^2)}+\alpha^2o(\alpha^4h^4) \tag{2.6}$$

$$u_1=u_2=0,\qquad w=C\cos\lambda x\cos\mu y$$

$$\varphi_1=-C\mu\cos\lambda x\sin\mu y,\quad \varphi_2=C\lambda\sin\lambda x\cos\mu y \tag{2.7}$$

$$\gamma=\alpha^2,\qquad \rho\omega^2=G\alpha^2,\qquad u_1=(C/\lambda)\sin\lambda x\cos\mu y$$

$$u_2=-(C/\mu)\cos\lambda x\sin\mu y,\qquad w=\varphi_1=\varphi_2=0$$

$$\gamma=\frac{2\alpha^2}{1-\nu},\qquad \rho\omega^2=\frac{E\alpha^2}{1-\nu^2},\qquad u_1=C\lambda\sin\lambda x\cos\mu y \tag{2.8}$$

$$u_2=C\mu\cos\lambda x\sin\mu y,\qquad w=\varphi_1=\varphi_2=0$$

$$\gamma=\alpha^2\left(\frac{\pi^2}{4\alpha^2h^2}+1\right),\qquad \rho\omega^2=G\alpha^2\left(\frac{\pi^2}{4\alpha^2h^2}+1\right) \tag{2.9}$$

$$u_1=u_2=w=0,\qquad \varphi_1=(C/\mu)\cos\lambda x\sin\mu y,\qquad \varphi_2=(C/\lambda)\sin\lambda x\cos\mu y$$

$$\gamma = \alpha^2 \left[\frac{\pi^2}{4\alpha^2 h^2} + \frac{2}{1-\nu} + \frac{\pi^2}{12} + o(\alpha^2 h^2) \right]$$

$$\rho\omega^2 = G\alpha^2 \left[\frac{\pi^2}{4\alpha^2 h^2} + \frac{2}{1-\nu} + \frac{\pi^2}{12} + o(\alpha^2 h^2) \right] \qquad (2.10)$$

$$u_1 = u_2 = 0, \quad w = -C\frac{\alpha^2 h^2}{3}\cos\lambda x\cos\mu y, \quad \varphi_1 = -C\mu\cos\lambda x\sin\mu y, \quad \varphi_2 = C\lambda\sin\lambda x\cos\mu y$$

Спектры (2.7)—(2.9) получены точно, а спектры (2.6), (2.10), несмотря на то, что являются решениями квадратного уравнения, получены в предположении, что толщина пластины $2h$ мала. Это сделано для удобства сравнения с трехмерной теорией: т. е. имеем один спектр, имеющий порядок h^2, два спектра порядка h^0 и два спектра порядка h^{-2}. Для того чтобы произвести классификацию полученных форм, сравним их с формами колебаний прямоугольного параллелепипеда.

3. Сравнение результатов, полученных по двумерной и трехмерной теориям. Анализируя результаты, полученные в п. 1, 2, видим, что выражения для собственных частот пластины асимптотически совпадают с первыми пятью спектрами собственных частот прямоугольного параллелепипеда (четвертый и пятый берутся при $s=1$). Остальные спектры двумерной теорией уловить невозможно. Кроме того, необходимо провести сравнение по формам колебаний. Для этого необходимо учесть, что параметры двумерной и трехмерной теорий, как показано в [3, 4], связаны соотношениями

$$2h(\mathbf{U}+\mathbf{W}) = \int_{-h}^{h} \mathbf{U}^* \, dz, \qquad \frac{2}{3}h^3\varphi = \mathbf{n}\times\int_{-h}^{h} \mathbf{U}^* z\, dz \qquad (3.1)$$

где звездочкой отмечены величины, относящиеся к трехмерной теории.

Используя результаты п. 1 и учитывая (3.1), получим следующие соотношения для первых пяти спектров и форм колебаний:

$$\rho\omega^2 = E\alpha^2\left[\frac{\alpha^2 h^2}{3(1-\nu^2)} + o(\alpha^2 h^2)\right], \qquad \gamma = \frac{\rho\omega^2}{G}$$

$$u_1 = u_2 = 0, \qquad w = C\frac{\gamma}{2}\cos\lambda x\cos\mu y \qquad (3.2)$$

$$\varphi_1 = -C\frac{\mu\gamma}{2}\cos\lambda x\sin\mu y, \qquad \varphi_2 = C\frac{\lambda\gamma}{2}\sin\lambda x\cos\mu y$$

Собственные формы в (3.2) с точностью до постоянного множителя соответствуют формам (2.6), полученным по двумерной теории

$$\rho\omega^2 = G\alpha^2, \; u_1 = (C/\lambda)\sin\lambda x\cos\mu y$$

$$u_2 = -(C/\mu)\cos\lambda x\sin\mu y, \; w = \varphi_1 = \varphi_2 = 0 \qquad (3.3)$$

Формулы (3.3) полностью совпадают с результатами двумерной теории (2.7)

$$\rho\omega^2 = E\alpha^2\left[\frac{1}{1-\nu^2} + o(\alpha^2 h^2)\right], \qquad u_1 = C\lambda\sin\lambda x\cos\mu y$$

$$u_2 = C\mu\cos\lambda x\sin\mu y, \; w = \varphi_1 = \varphi_2 = 0 \qquad (3.4)$$

Эти соотношения совпадают с зависимостями (2.8)

$$\rho\omega^2 = G\alpha^2\left[\frac{\pi^2}{4\alpha^2 h^2} + 1\right], \qquad u_1 = u_2 = w = 0$$

$$\varphi_1=C\frac{24}{\mu\pi^3}\cos\lambda x\sin\mu y,\qquad \varphi_2=C\frac{24}{\lambda\pi^3}\sin\lambda x\cos\mu y \tag{3.5}$$

Формы колебаний (3.5) с точностью до постоянного множителя совпадают с формами (2.9) двумерной теории

$$\begin{gathered}\rho\omega^2=G\alpha^2\left[\frac{\pi^2}{4\alpha^2h^2}+K_1\right],\qquad u_1=u_2=0\\ w=-C\frac{2\alpha^2}{\pi}\cos\lambda x\cos\mu y,\qquad \varphi_1=-C\frac{6\mu}{\pi h^2}\cos\lambda x\sin\mu y.\end{gathered} \tag{3.6}$$

$$\varphi_2=C\frac{6\lambda}{\pi h^2}\sin\lambda x\cos\mu y$$

Соотношения (3.6) с точностью до множителя $6/\pi h^2$ совпадают с (2.10). Таким образом, спектры частот и формы собственных колебаний, полученные по двумерной теории, совпали с первыми пятью спектрами и собственными формами трехмерной теории.

Следовательно, формы (2.6), (2.10) описывают изгибные колебания, (2.8) — плоские колебания растяжения — сжатия, (2.7) — сдвиговые плоские колебания, (2.9) — сдвиговые антиплоские колебания.

Сравнивая результаты, полученные по двумерной и трехмерной теориям, видим, что их спектры качественно различаются: трехмерная теория дает счетное множество спектров, а двумерная — только пять. Объяснить это можно следующим образом. Предположим, что требуется построить двумерную теорию, позволяющую найти все собственные частоты, которые ниже заданной частоты ω_*.

Рассмотрим возрастающую последовательность ω_i ($i=1, 2, \ldots$), где ω_i — низшая частота i-го спектра. Частота ω_* разбивает эту последовательность на две части. Найдем ближайшую к ω_* частоту ω_n, удовлетворяющую условию $\omega_n\geqslant\omega_*$. Число ω_* назовем низшей гранью игнорируемых частот. Будем строить модель, которая улавливает все частоты, лежащие ниже ω_n, т. е. эта модель должна дать $(n-1)$ спектр.

Число спектров, даваемых двумерной теорией, равно числу внутренних степеней свободы [7] модели двумерной среды. Следовательно, если необходимо уловить $(n-1)$ спектр, то число внутренних степеней свободы должно быть не меньше чем $(n-1)$, поскольку число степеней свободы связано с физическим смыслом задачи и не может быть выбрано произвольно. Например, трудно построить физически осмысленную двумерную теорию с одной внутренней степенью свободы.

Рассмотренная в данной работе двумерная теория с учетом поперечного сдвига является моделью с пятью степенями свободы, поэтому с ее помощью можно построить только пять спектров и найти все собственные частоты, лежащие ниже ω_6 — первой частоты шестого спектра трехмерной теории. Частотная область, соответствующая этой теории, значительно расширена (приблизительно в четыре раза) по сравнению с теорией пластин без учета сдвига. Здесь появляются два спектра, имеющие порядок $o(h^{-2})$. Спектры, имеющие такой порядок по h, обычной теорией пластин не улавливаются. Однако асимптотическая точность данной теории такая же, как и у теории без учета сдвига, поскольку остальные спектры, имеющие такой же порядок $o(h^{-2})$, с ее помощью получены быть не могут.

Дальнейшее увеличение числа степеней свободы в двумерной теории будет приводить к получению новых, более высоких спектров, однако имеющих тот же порядок по h, как и отбрасываемые. А потому принципиально невозможно построить двумерную теорию, имеющую более высокую асимптотическую точность, чем $o(h^2)$ по сравнению с единицей.

Поступила 21 VIII 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Айнола Л., Нигул У.* Волновые процессы деформации упругих плит и оболочек. Изв. АН ЭстССР. Сер. физ.-матем. и техн. наук, 1965, № 1.

2. *Григолюк Э. И., Селезов И. Т.* Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек. Итоги науки и техники. Механика твердых деформированных тел, т. 5. М., ВИНИТИ, 1973.
3. *Zhilin P. A.* Mechanics of deformable surfaces. Internat. J. Solids and Structure, 1976, vol. 12, No. 9–10, p. 635–648.
4. *Жилин П. А.* Новый подход к построению линейной теории тонких упругих оболочек. В сб.: Расчет пространственных конструкций, вып. 19. М., Стройиздат, 1978.
5. *Mindlin R. D.* Waves and vibrations in isotropic, elastic plates. In: Structural mechanics. London — New York, Pergamon Press, 1960.
6. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды, т. 1. М., «Наука», 1976.
7. *Седов Л. И.* Модели сплошных сред с внутренними степенями свободы. ПММ, 1968, т. 32, вып. 5.