П. А. ЖИЛИН, Г. А. КИЗИМА

ОБОЛОЧКИ НУЛЕВОЙ ГАУССОВОЙ КРИВИЗНЫ С МЕРИДИОНАЛЬНЫМИ РЕБРАМИ

Рассматриваются оболочки нулевой гауссовой кривизны с меридиональными ребрами. Ребра могут располагаться на произвольном расстоянии друг от друга и иметь различные геометрические характеристики. Вдоль меридиана высота ребра меняется по произвольному закону. Оболочка может быть замкнута или разомкнута по параллели. В качестве примера рассматриваются замкнутые цилиндрическая и коническая оболочки под произвольной поверхностной нагрузкой и нагрузкой, приложенной к ребрам

Рассмотрим оболочку нулевой гауссовой кривизны. В качестве безразмерных гауссовых координат на поверхности выберем: по меридиану $\xi=\frac{\alpha_1}{a}$, по параллели φ, где α_1 — длина по меридиану, a — некоторый характерный линейный размер оболочки, φ — угловая координата. Рассматриваем задачу в области D: $\xi_1\leqslant\xi\leqslant\xi_2$; $\alpha\leqslant\varphi\leqslant\beta$. Пусть $\varphi_k\,(k=1,\ 2,\dots,N)$ — координаты ребер. В этом случае область D можно разбить на N подобластей D_k:

$$\xi_1\leqslant\xi\leqslant\xi_2;\quad \varphi_k\leqslant\varphi\leqslant\varphi_{k+1};\quad (k=0,1,2,\dots,N),$$

где $\varphi_0=\alpha$, $\varphi_{N+1}=\beta$. Если оболочка замкнута, то область D определяется так:

$$\xi_1\leqslant\xi\leqslant\xi_2;\quad 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi,$$

а подобласть D_k:

$$\left.\begin{aligned}&\xi_1\leqslant\xi\leqslant\xi_2;\quad \varphi_k\leqslant\varphi\leqslant\varphi_{k+1};\\ &\varphi_1=0;\quad \varphi_{N+1}=2\pi;\quad (k=1,2,\dots,N).\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

В области D_k уравнения ребристых оболочек, полученные в работе П. А. Жилина «К анализу краевых задач ребристых оболочек» (см. настоящий сборник), совпадают с уравнениями для гладких оболочек. Поэтому целесообразно рассматривать задачу в области D_k, причем ребра учитываются краевыми условиями. Вполне понятно, что, если мы рассматриваем коническую или цилиндрическую пластину, то удовлетворить всем краевым условиям на контуре невозможно, по крайней мере, при использовании метода Фурье. Поскольку нам необходимо выполнить по восемь условий склейки на каждом ребре, то мы неизбежно теряем часть условий на поперечных краях. В частности, известная теория обобщенного краевого эффекта [1] построена с точностью до простых краевых эффектов на поперечных краях оболочки.

В монографии [2, стр. 238] говорится, что при расчетах цилиндрических пластин допустимо ограничиться лишь весьма частными краевыми условиями на поперечных краях оболочки. Поэтому для цилиндрических и конических пластин можно использовать известные разложения по ортогональным функциям вдоль меридиана. Для замкнутых оболочек дело обстоит несколько сложнее, ибо пренебрегать краевыми условиями на поперечных краях оболочки мы, чаще всего, не вправе. Поэтому для замкнутых оболочек целесообразно использовать следующий прием.

Общее решение задачи, следуя [3], представим в виде:

$$\left.\begin{aligned} U &= U_0 + U_p; \\ V &= V_0 + V_p; \\ W &= W_0 + W_p, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

где U_0, V_0, W_0 являются решением соответствующей замкнутой гладкой оболочки при заданных краевых условиях на поперечных краях, а U_p, V_p, W_p удовлетворяют однородным условиям на поперечных краях. В дальнейшем мы полагаем, что U_0, V_0, W_0 уже найдены и задача состоит в определении U_p, V_p, W_p.

Вряд ли мы допустим ошибку, если предположим, что U_p, V_p, W_p — быстро меняющиеся функции вдоль параллели. Действительно, коэффициенты в уравнениях равновесия ребристых оболочек терпят разрывы на некоторых линиях, отсюда можно заключить, что и решения этих уравнений должны быстро меняться в окрестности линий разрыва. Этот вывод подтверждается в работе М. И. Вишика и Л. А. Люстерника [4].

Если допустить правомочность вышесказанного, то для определения U_p, V_p, W_p в области D_k естественнее всего воспользоваться теорией обобщенного краевого эффекта.

Роль краевых условий на асимптотических линиях играют условия склейки, полученные П. А. Жилиным и обобщенные на случай, когда к ребрам приложена нагрузка.

Вывод уравнений обобщенного краевого эффекта для оболочек нулевой гауссовой кривизны

Для того чтобы выделить малый параметр в уравнениях равновесия, записанных в усилиях и моментах, введем величины, имеющие одинаковый порядок:

$$\left.\begin{aligned} &\bar{\varepsilon}_i = a\varepsilon_i; && \bar{T}_i = \frac{a}{B}T_i; \\ &\bar{\varkappa}_i = a^2\varkappa_i; && \bar{M}_i = \frac{a^2}{D}M_i; \\ &\bar{\omega} = a\omega; && \bar{S} = \frac{a}{B}S; \\ &\bar{\tau} = a^2\tau; && \\ &\bar{R}_i = \frac{1}{a}R_i; && \bar{H} = \frac{a^2}{D}H. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Коэффициенты Ляме $\bar{A}_i = \frac{1}{a}A_i$.

В этих обозначениях соотношения упругости имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} \overline{T}_i = \overline{\varepsilon}_i + \nu\overline{\varepsilon}_{i+1}; \qquad \overline{S} = \frac{1}{2}(1-\nu)\overline{\omega}; \\ \overline{M}_i = \overline{\varkappa}_i + \nu\overline{\varkappa}_{i+1}; \qquad \overline{H} = (1-\nu)\overline{\tau}; \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

где $B = Eh/1-\nu^2; \qquad D = Eh^3/12(1-\nu^2).$

В дальнейшем тильду опускаем. Для оболочек нулевой гауссовой кривизны условия Кодацци — Гаусса имеют вид:

$$\frac{\partial A_i}{\partial \alpha_2} = 0; \quad \frac{\partial}{\partial \alpha_1}\left(\frac{A_2}{R_2}\right) = 0; \quad \frac{\partial}{\partial \alpha_1}\left(\frac{1}{A_1}\cdot\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}\right) = 0;$$

$$A_1 = a; \quad R_2 = R; \quad 1/R_1 = 0 \qquad (i = 1,2).$$

Уравнения равновесия и неразрывности [2, стр. 34, 45] с учетом вышесказанного принимают вид:

$$\frac{\partial A_2 T_1}{\partial \xi} + \frac{\partial S}{\partial \varphi} + \frac{a^2 A_2}{B} q_1^* = 0; \tag{5}$$

$$\frac{\partial A_2 S}{\partial \xi} + \frac{\partial T_2}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_2}{\partial \xi} S + \frac{h_*^2}{R}\cdot\frac{\partial M_2}{\partial \varphi} + \frac{A_2 a^2}{B} q_2^* = 0; \tag{5а}$$

$$T_2 - \frac{h_*^2 R}{A_2}\left[\frac{\partial^2 A_2 M_1}{\partial \xi^2} - \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial A_2}{\partial \xi} M_2\right) + \frac{1}{A_2}\cdot\frac{\partial^2 M_2}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{A_2}\cdot\frac{\partial^2 A_2 H}{\partial \xi\,\partial \varphi}\right] - $$

$$- \frac{a^2}{B} q_3^* = 0; \tag{5б}$$

$$\frac{\partial A_2 \varkappa_2}{\partial \xi} - \frac{\partial \tau}{\partial \varphi} = 0; \tag{6}$$

$$\frac{\partial \varkappa_1}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_2 \tau}{\partial \xi} - \tau\frac{\partial A_2}{\partial \xi} - \frac{1}{R}\cdot\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial \varphi} = 0; \tag{6а}$$

$$\varkappa_1 + h_*^2\frac{R}{A_2}\left[\frac{\partial^2 A_2 \varepsilon_2}{\partial \xi^2} - \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial A_2}{\partial \xi}\varepsilon_1\right) + \frac{1}{A_2}\cdot\frac{\partial^2 \varepsilon_1}{\partial \varphi^2} - \frac{1}{A_2}\cdot\frac{\partial^2 A_2 \omega}{\partial \xi\,\partial \varphi}\right] = 0. \tag{6б}$$

В уравнениях (5)—(6б) на основании [1], [2] пренебрегли членами T_2 по сравнению с T_1, $\frac{H}{a}$ по сравнению с S, $\varkappa_1$ по сравнению с $\varkappa_2$ и $\frac{\omega}{a}$ по сравнению с τ. Здесь

$$\left.\begin{aligned} & \alpha_1 = \xi; \quad \alpha_2 = \varphi; \quad h_*^2 = \frac{D}{a^2 B} = \frac{h^2}{12a^2}; \\ & q_2^* = q_2; \\ & q_1^* = q_1 + \sum_{k=1}^{N}\frac{q_{1p}^k}{aA_2}\,\delta(\varphi-\varphi_k); \\ & q_3^* = q_3 + \sum_{k=1}^{N}\frac{q_{3p}^k}{aA_2}\,\delta(\varphi-\varphi_k), \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

где q_{1p}^k; q_{3p}^k — компоненты линейной нагрузки, приложенной к k-тому ребру;

q_1; q_2; q_3 — компоненты поверхностной нагрузки.

Введем для компонент нагрузки q_1^* и q_2^* потенциальную функцию Ω:

$$\left.\begin{aligned} q_1^* &= \frac{B}{a^2 A_2}\cdot\frac{\partial\Omega}{\partial\varphi}; \\ q_2^* &= \frac{B}{a^2 A_2^2}\cdot\frac{\partial A_2^2\Omega}{\partial\xi}. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Тогда уравнение (5) принимает вид:

$$\frac{\partial A_2 T_1}{\partial\xi} + \frac{\partial A_1 (S+\Omega)}{\partial\varphi} = 0.$$

Это уравнение удовлетворяется, если ввести функцию t_1 такую, что

$$T_1 = \frac{1}{A_2}\cdot\frac{\partial t_1}{\partial\varphi}; \quad S+\Omega = -\frac{1}{A_1}\cdot\frac{\partial t_1}{\partial\xi}. \tag{9}$$

Уравнение (5а) принимает вид:

$$\frac{1}{A_2}\cdot\frac{\partial A_2^2 (S+\Omega)}{\partial\xi} + \frac{\partial\left(T_2 + \frac{h_*^2}{R} M_2\right)}{\partial\varphi} = 0.$$

Этому уравнению можно удовлетворить, введя функцию t_2:

$$\left.\begin{aligned} \left(T_2 + \frac{h_*^2}{R} M_2\right) &= \frac{1}{A_2}\cdot\frac{\partial t_2}{\partial\xi}; \\ A_2^2 (S+\Omega) &= -\frac{\partial t_2}{\partial\varphi}. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Сравнивая между собой (9) и (10), легко видеть, что для их совместности достаточно ввести функцию t так, чтобы

$$t_1 = \frac{\partial t}{\partial\varphi}; \quad t_2 = A_2^2 \frac{\partial t}{\partial\xi}. \tag{11}$$

Аналогично уравнениям (6) и (6а) можно удовлетворить с помощью функции r, такой, что

$$\varkappa_2 = \frac{1}{A_2}\cdot\frac{\partial^2 r}{\partial\varphi^2}; \quad \tau = \frac{\partial^2 r}{\partial\xi\,\partial\varphi}. \tag{12}$$

Соотношения упругости имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{1-\nu^2} T_1; & M_2 &= \nu\varkappa_1; \\ \varepsilon_2 &= -\frac{\nu}{1-\nu^2} T_1; & S &= \frac{1}{2}(1-\nu)\,\omega; \\ M_1 &= \varkappa_1; & H &= (1-\nu)\,\tau. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Учитывая вышесказанное, получим:

$$
\left.
\begin{aligned}
&T_1=\frac{1}{A_2}\cdot\frac{\partial^2 t}{\partial\varphi^2}; && \varepsilon_1=\frac{1}{1-\nu^2}\cdot\frac{1}{A_2}\cdot\frac{\partial^2 t}{\partial\varphi^2};\\
&T_2=\frac{1}{A_2}\cdot\frac{\partial}{\partial\xi}A_2^2\frac{\partial t}{\partial\xi}-\frac{h_*^2}{A_2R}\cdot\frac{\partial^2 r}{\partial\varphi^2}; && \varepsilon_2=-\frac{\nu}{1-\nu^2}\cdot\frac{1}{A_2}\cdot\frac{\partial^2 t}{\partial\varphi^2};\\
&S=-\frac{\partial^2 t}{\partial\xi\,\partial\varphi}-\Omega; && \omega=-\frac{2}{1-\nu}\left(\frac{\partial^2 t}{\partial\xi\,\partial\varphi}+\Omega\right);\\
&M_1=\frac{\nu}{A_2}\cdot\frac{\partial^2 r}{\partial\varphi^2}; && \varkappa_2=\frac{1}{A_2}\cdot\frac{\partial^2 r}{\partial\varphi^2};\\
&M_2=\frac{1}{A_2}\cdot\frac{\partial^2 r}{\partial\varphi^2}; && \varkappa_1=\frac{1}{A_2}\cdot\frac{\partial}{\partial\xi}A_2^2\frac{\partial r}{\partial\xi}+\frac{1}{1-\nu^2}\cdot\frac{1}{A_2R}\cdot\frac{\partial^2 t}{\partial\varphi^2};\\
&H=(1-\nu)\frac{\partial^2 r}{\partial\xi\,\partial\varphi}; && \tau=\frac{\partial^2 r}{\partial\xi\,\partial\varphi}.
\end{aligned}
\right\}
\qquad (14)
$$

Подставляя (14) в (5б) и (6б), получим уравнения обобщенного краевого эффекта:

$$
\left.
\begin{aligned}
&L(t)-h_*^2M(r)=\frac{a^2Rq_3^*}{A_2B};\\
&L(r)-\frac{1}{1-\nu^2}M(t)=f,
\end{aligned}
\right\}
\qquad (15)
$$

где

$$
L(\ )=\frac{1}{A_2^2}\cdot\frac{\partial}{\partial\xi}A_2^2\frac{\partial}{\partial\xi}(\ ); \qquad (16)
$$

$$
M(\ )=\frac{R}{A_2^4}\cdot\frac{\partial^4}{\partial\varphi^4}(\ )+\left[\frac{R}{A_2^4}\left(\frac{\partial A_2}{\partial\xi}\right)^2+\frac{1}{RA_2^2}\right]\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}(\ ); \qquad (17)
$$

$$
f=\frac{2R}{A_2^2(1-\nu)}\cdot\frac{\partial^2 A_2\Omega}{\partial\xi\,\partial\varphi}. \qquad (18)
$$

В уравнении (17) можно сделать упрощение в соответствии с теорией невыродившегося краевого эффекта [1], считая, что при каждом дифференцировании по φ все величины существенно увеличиваются, поэтому оставляем лишь старшую производную по φ. В уравнениях (15) удобно сделать замену искомых функций

$$
\left.
\begin{aligned}
&q=A_2t;\\
&P=A_2r,
\end{aligned}
\right\}
\qquad (19)
$$

после чего (15) примут вид:

$$
\left.
\begin{aligned}
&L(q)-h_*^2M(P)=0;\\
&L(P)+\frac{1}{1-\nu^2}M(q)=0,
\end{aligned}
\right\}
\qquad (20)
$$

где

$$L(\quad)=\frac{A_2^4}{R}\cdot\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}(\quad);\quad M(\quad)=\frac{\partial^4}{\partial\varphi^4}(\quad).$$

Далее

$$L(q)=h_*^2M(P);\qquad LL(P)+\frac{h_*^2}{1-\nu^2}MM(P)=0. \tag{21}$$

$$P=\sum_m P_m(\varphi)\,\psi_m(\xi); \tag{22}$$

$$LL(\psi_m)-\varkappa_m^4\psi_m=0, \tag{23}$$

где $\psi_m(\xi)$ — собственные функции уравнения; при соответствующих краевых условиях [1, гл. 16], а $\varkappa_m$ — собственные числа. Для P_m имеем уравнение

$$MM(P_m)+\lambda_m^8P_m=0, \tag{24}$$

где

$$\lambda_m^8=\frac{\varkappa_m^4(1-\nu^2)}{h_*^2}; \tag{25}$$

$$L(q)=h_*^2M(P)=h_*^2\sum_m M(P_m)\frac{1}{\varkappa_m^4}LL(\psi_m),$$

откуда

$$q=\sum_m\frac{1-\nu^2}{\lambda_m^8}M(P_m)\,L(\psi_m). \tag{26}$$

Из соотношений (14) легко получить выражения для перемещений:

$$\frac{\partial U}{\partial\xi}=\varepsilon_1=\frac{1}{1-\nu^2}\cdot\frac{1}{A_2^2}\cdot\frac{\partial^2q}{\partial\varphi^2},$$

отсюда

$$U=\sum_m U_m(\varphi)\,A_2^2\frac{d}{d\xi}\cdot\frac{\psi_m}{A_2}, \tag{27}$$

где

$$U_m=\frac{1}{\lambda_m^8}\cdot\frac{A_2}{R}\cdot\frac{d^6P_m}{d\varphi^6}.$$

$$\frac{\partial^2w}{\partial\xi^2}=-\varkappa_1=-\frac{1}{A_2}\cdot\frac{\partial}{\partial\xi}A_2^2\frac{\partial r}{\partial\xi}-\frac{1}{1-\nu^2}\cdot\frac{1}{RA_2}\cdot\frac{\partial^2t}{\partial\varphi^2}=-\frac{\partial^2P}{\partial\xi^2}-$$

$$-\frac{1}{1-\nu^2}\cdot\frac{1}{RA_2^2}\cdot\frac{\partial^2q}{\partial\varphi^2}=\sum_m W_m(\varphi)\,\psi_m(\xi), \tag{28}$$

где

$$W_m = -P_m - \frac{1}{\lambda_m^8} \cdot \frac{A_2^2}{R^2} \cdot \frac{d^6 P_m}{d\varphi^6}.$$

Для **определения** V используем выражение для сдвига

$$\omega = \frac{1}{A_2} \cdot \frac{\partial U}{\partial \varphi} + A_2 \frac{\partial}{\partial \xi} \cdot \frac{V}{A_2},$$

откуда

$$V = -\sum_m \left[\frac{2(1+\nu)}{\lambda_m^8} \cdot \frac{d^5 P_m}{d\varphi^5} \cdot \frac{A_2}{R} A_2 \frac{d}{d\xi} A_2 \frac{d\psi_m}{d\xi} + \frac{dU_m}{d\varphi} \psi_m. \right. \tag{29}$$

Условия склейки

Получены в работе П. А. Жилина (см. стр. 35—36) для случая, когда на ребра не действует нагрузка. Если к ребрам приложены нагрузки, то в условиях склейки появятся правые части, представляющие собой нагрузки на ребра. Условия склейки для этого случая примут вид (на $k+1$-ом ребре):

$$\left.\begin{aligned}
&U_p^k(\varphi_{k+1}) = U_p^{k+1}(\varphi_{k+1});\\
&V_p^k(\varphi_{k+1}) = V_p^{k+1}(\varphi_{k+1});\\
&W_p^k(\varphi_{k+1}) = W_p^{k+1}(\varphi_{k+1});\\
&\frac{\partial V_p^k(\varphi_{k+1})}{\partial \varphi} = \frac{\partial V_p^{k+1}(\varphi_{k+1})}{\partial \varphi};\\
&\frac{\partial W_p^k(\varphi_{k+1})}{\partial \varphi} = \frac{\partial W_p^{k+1}(\varphi_{k+1})}{\partial \varphi};\\
&\frac{\partial^2 W_p^k(\varphi_{k+1})}{\partial \varphi^2} = \frac{\partial^2 W_p^{k+1}(\varphi_{k+1})}{\partial \varphi^2};\\
&\frac{1-\nu}{2} \cdot \frac{1}{A_2} \left(\frac{\partial U_p^{k+1}(\varphi_{k+1})}{\partial \varphi} - \frac{\partial U_p^k(\varphi_{k+1})}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \cdot \frac{EF_{k+1}}{aB} \times\\
&\times \frac{\partial U_p^k(\varphi_{k+1})}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \xi} \cdot \frac{ES_{k+1}}{a^2 B} \cdot \frac{\partial^2 W_p^k(\varphi_{k+1})}{\partial \xi^2} = A_{k+1};\\
&A_2^3 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \cdot \frac{EJ_{k+1}}{aD} \cdot \frac{\partial^2 W_p^k(\varphi_{k+1})}{\partial \xi^2} - A_2^3 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \cdot \frac{ES_{k+1}}{aD} \cdot \frac{\partial U_p^k(\varphi_{k+1})}{\partial \xi} +\\
&+ \frac{\partial^3 W_p^{k+1}(\varphi_{k+1})}{\partial \varphi^3} - \frac{\partial^3 W_p^k(\varphi_{k+1})}{\partial \varphi^3} = E_{k+1},
\end{aligned}\right\} \tag{30}$$

где

$$A_{k+1} = -\frac{a q_{1p}^{k+1}}{B} - \frac{\partial}{\partial \xi} \cdot \frac{EF_{k+1}}{aB} \cdot \frac{\partial U_0(\varphi_{k+1})}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \xi} \cdot \frac{ES_{k+1}}{a^2 B} \cdot \frac{\partial^2 W_0(\varphi_{k+1})}{\partial \xi^2}; \tag{31}$$

$$E_{k+1} = \frac{a^2 q_{3p}^{k+1}}{D} - A_2^3 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \cdot \frac{EJ_{k+1}}{aD} \cdot \frac{\partial^2 W_0(\varphi_{k+1})}{\partial \xi^2} + A_2^3 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \cdot \frac{ES_{k+1}}{D} \cdot \frac{\partial U_0(\varphi_{k+1})}{\partial \xi}. \tag{32}$$

Подставляя (27), (28) и (29) в (30), получим условия склейки для функции P:

$$\left.\begin{aligned}
&1.\quad P_m^{k+1}(\varphi_{k+1}) - P_m^k(\varphi_{k+1}) = 0;\\
&2.\quad \frac{dP_m^{k+1}(\varphi_{k+1})}{d\varphi} - \frac{dP_m^k(\varphi_{k+1})}{d\varphi} = -\frac{1}{\lambda_m^8}\cdot\frac{A_2^2}{R^2}\left[\frac{d^7P_m^{k+1}(\varphi_{k+1})}{d\varphi^7} - \right.\\
&\qquad\left. - \frac{d^7P_m^k(\varphi_{k+1})}{d\varphi^7}\right];\\
&3.\quad \frac{d^2P_m^{k+1}(\varphi_{k+1})}{d\varphi^2} - \frac{d^2P_m^k(\varphi_{k+1})}{d\varphi^2} = 0;\\
&4.\quad \frac{d^3P_m^{k+1}(\varphi_{k+1})}{d\varphi^3} - \frac{d^3P_m^k(\varphi_{k+1})}{d\varphi^3} = \frac{A_2^2}{R^2}\left[\frac{dP_m^{k+1}(\varphi_{k+1})}{d\varphi} - \right.\\
&\left. - \frac{dP_m^k(\varphi_{k+1})}{d\varphi}\right] - E_{k+1,m} - \sum_n\left[P_n^{k+1}(\varphi_{k+1}) + \frac{1}{\lambda_n^8}\cdot\frac{A_2^2}{R^2}\cdot\frac{d^6P_n^{k+1}(\varphi_{k+1})}{d\varphi^6}\right]\times\\
&\qquad \times K^1_{n,k+1,m} - \sum_n \frac{1}{\lambda_n^8}\cdot\frac{A_2}{R}\cdot\frac{d^6P_n^{k+1}(\varphi_{k+1})}{d\varphi^6}K^2_{n,k+1,m};\\
&5.\quad \frac{d^4P_m^{k+1}(\varphi_{k+1})}{d\varphi^4} - \frac{d^4P_m^k(\varphi_{k+1})}{d\varphi^4} = 0;\\
&6.\quad \frac{1}{\lambda_m^8}\left(\frac{d^5P_m^{k+1}(\varphi_{k+1})}{d\varphi^5} - \frac{d^5P_m^k(\varphi_{k+1})}{d\varphi^5}\right) = -\frac{1}{2(1+\nu)}\times\\
&\qquad \times\sum_n\frac{1}{\lambda_n^8}\left(\frac{d^7P_n^{k+1}}{d\varphi^7} - \frac{d^7P_n^k}{d\varphi^7}\right)H_{n,m};\\
&7.\quad \frac{d^6P_m^{k+1}(\varphi_{k+1})}{d\varphi^6} - \frac{d^6P_m^k(\varphi_{k+1})}{d\varphi^6} = 0;\\
&8.\quad \frac{1}{\lambda_m^8}\left(\frac{d^7P_m^{k+1}(\varphi_{k+1})}{d\varphi^7} - \frac{d^7P_m^k(\varphi_{k+1})}{d\varphi^7}\right) = -\frac{2}{1-\nu}\sum_n\frac{1}{\lambda_n^8}\times\\
&\quad\times\frac{d^6P_n^{k+1}(\varphi_{k+1})}{d\varphi^6}G^1_{n,k+1,m} - \frac{2}{1-\nu}\cdot\frac{R}{A_2}\sum_n\left[P_n^{k+1}(\varphi_{k+1}) + \frac{1}{\lambda_n^8}\times\right.\\
&\qquad\left.\times\frac{A_2^2}{R^2}\cdot\frac{d^6P_n^{k+1}(\varphi_{k+1})}{d\varphi^6}\right]G^2_{n,k+1,m} - \frac{2}{1-\nu}\cdot\frac{R}{A_2}G^3_{k+1,m},
\end{aligned}\right\}\quad(33)$$

где

$$\left.\begin{aligned}
&K^1_{m,k+1} = A_2^3\frac{d^2}{d\xi^2}\cdot\frac{FJ_{k+1}}{aD}\cdot\frac{d^2\psi_m}{d\xi^2} = \sum_n K^1_{m,k+1,n}\psi_n;\\
&K^2_{m,k+1} = A_2^3\frac{d^2}{d\xi^2}\cdot\frac{ES_{k+1}A_2}{D}\cdot\frac{d^2\psi_m}{d\xi^2} = \sum_n K^2_{m,k+1,n}\psi_n;\\
&G^1_{m,k+1} = A_2\int\frac{1}{A_2}\cdot\frac{d}{d\xi}\cdot\frac{EF_{k+1}}{aB}\cdot\frac{d}{d\xi}A_2^2\frac{d}{d\xi}\cdot\frac{\psi_m}{A_2}d\xi = \sum_n G^1_{m,k+1,n}\psi_n;\\
&G^2_{m,k+1} = A_2\int\frac{1}{A_2}\cdot\frac{d}{d\xi}\cdot\frac{ES_{k+1}}{a^2B}\cdot\frac{d^2\psi_m}{d\xi^2}d\xi = \sum_n G^2_{m,k+1,n}\psi_n;\\
&G^3_{k+1} = A_2\int\frac{A_{k+1}}{A_2}d\xi = \sum_n G^3_{k+1,n}\psi_n;\\
&H_m = \int\left(\frac{1}{A_2}\int\frac{\psi_m}{A_2}d\xi\right)d\xi = \sum_n H_{m,n}\psi_n.
\end{aligned}\right\}\quad(34)$$

Уравнения (21) с краевыми условиями (30) полностью определяют краевую задачу. Используя разложения по собственным функциям, сводим задачу к решению обыкновенного уравнения (24) с краевыми условиями (33). В общем случае определение произвольных постоянных интегрирования аналитическим путем трудно достижимо, поэтому целесообразно использовать электронно-вычислительные машины. Для некоторых частных случаев можно получить аналитические решения.

Интегрирование уравнений для цилиндрической и конической оболочек с меридиональными ребрами

Обратимся к рассмотрению замкнутых цилиндрической и конической оболочек для случая, когда все ребра имеют одинаковые геометрические характеристики и расположены на одинаковом расстоянии друг от друга. Допустим, нагрузка такова, что задачу можно считать циклически симметричной и ребра таковы, что выполняются условия:

$$F = F^* A_2; \quad S = S^* A_2^2; \quad J = J^* A_2^3,$$

где

$$J^* = \text{const}; \quad S^* = \text{const}; \quad F^* = \text{const}.$$

Вышенаписанное условие означает, что для цилиндрической оболочки ребра имеют постоянную высоту, а для конической оболочки высота ребра меняется по линейному закону. Решение уравнения (24) в области D_k запишем в виде

$$P_m^k(\theta) = \sum_{n=1}^{8} C_{mn}^k Y_{mn}(\theta), \qquad (35)$$

где

$$\theta = \varphi - \varphi_k.$$

В рассматриваемом случае $\varphi_k = \frac{2\pi}{N}(k-1)$, поэтому θ всегда меняется в пределах $\left[0, \frac{2\pi}{N}\right]$. Фундаментальные функции Y_{mn} построены с таким расчетом, чтобы они имели единичную матрицу:

$$Y_{mn}^{(i-1)}(\theta) = \frac{d^{i-1} Y_{mn}(\theta)}{d\theta^{i-1}} = \delta_n^i = \begin{cases} 1 & i = n \\ 0 & i \neq n \end{cases} \quad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, 8 \\ n = 1, 2, \ldots, 8 \end{pmatrix} \qquad (36)$$

Для этого достаточно построить их следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} Y_{m1} &= \frac{1}{2}(\operatorname{ch} a\theta \cos b\theta + \operatorname{ch} b\theta \cos a\theta); \\ Y_{m8} &= -\frac{1}{\lambda_m^8} Y_{m1}^{(1)}, \quad Y_{mj}^{(1)} = Y_{mj-1}, \quad j = 2, \ldots, 8; \\ a &= \lambda_m \cos\frac{\pi}{8}, \quad b = \lambda_m \sin\frac{\pi}{8}. \end{aligned}\right\} \qquad (37)$$

Легко убедиться, что решение уравнения (35) удовлетворяет уравнению (24). Из условий циклической симметрии имеем $P_m^k(\theta) = P_m^{k+1}(\theta)$, т. е.

$$C_{mn}^k = C_{mn}^{k+1} = C_{mn}.$$

Допустим, что нагрузка симметрична относительно оси ребра, т. е. $q_1(\theta) = q_1(-\theta)$ и $q_3(\theta) = q_3(-\theta)$. Тогда, очевидно, и перемещения U и W будут симметричны относительно оси ребра, а это приводит к тому, что $C_{m2} = C_{m4} = C_{m6} = C_{m8} = 0$, в чем легко убедиться, если заметить, что $Y_{mi}(\theta) = Y_{mi}(-\theta)$ $i=1, 3, 5, 7,$; $Y_{mi}(\theta) = -Y_{mi}(-\theta)$ $i=2, 4, 6, 8$. Условия (33.1), (33.3), (33.5), (33.7) удовлетворятся тождественно. Оставшиеся четыре условия дают нам систему для определения постоянных интегрирования C_{m1}, C_{m3}, C_{m5}, C_{m7}. В условии (33.4) вместо сумм останутся лишь члены $n=m$. Действительно, величины $K^1_{n,k+1}$ и $K^2_{n,k+1}$ равны соответственно:

$$K^1_{n,k+1} = K_n{}^1 = A_2{}^3 \frac{d^2}{d\xi^2} \cdot \frac{EJ}{aD} \cdot \frac{d^2\psi_n}{d\xi^2} = \frac{EJ^*}{aD} A_2{}^3 \frac{d^2}{d\xi^2} A_2{}^3 \frac{d^2\psi_n}{d\xi^2} = \gamma \varkappa_n{}^4 \psi_n,$$

т. е.

$$K^1_{n,k+1,m} = \gamma \varkappa_n{}^4 \delta_{nm}.$$

Аналогично

$$K^2_{n,k+1,m} = \beta \varkappa_n{}^4 \delta_{nm},$$

где

$$\gamma = \frac{EJ^*}{aD}; \quad \beta = \frac{ES^*}{D}; \quad \delta_{nm} = \begin{cases} 1 & n = m, \\ 0 & n \neq m. \end{cases}$$

Далее

$$E_{k+1} = \frac{a^3 q_{3p}}{D} - A_2{}^3 \frac{d^2}{d\xi^2} \cdot \frac{EJ}{aD} \frac{d^2 W_0(\varphi_{k+1})}{d\xi^2} + A_2{}^3 \frac{d^2}{d\xi^2} \cdot \frac{ES}{D} \cdot \frac{dU_0(\varphi_{k+1})}{d\xi}.$$

Если вместо $\frac{dU_0(\varphi_{k+1})}{d\xi}$ ввести в рассмотрение величину $A_2 \frac{d^2 U_0{}^*(\varphi_{k+1})}{d\xi^2}$, то выражение для E_{k+1} принимает вид:

$$E_{k+1,n} = \frac{a^3 q_{3pn}}{D} - \gamma \varkappa_n{}^4 W_{0n}(\varphi_{k+1}) + \beta \varkappa_n{}^4 U^*_{0n}(\varphi_{k+1}),$$

где q_{3pn}, W_{0n}, U^*_{0n} — коэффициенты в разложениях

$$q_{3p} = \sum_n q_{3pn}\psi_n; \quad W_0 = \sum_n W_{0n}\psi_n; \quad U_0{}^* = \sum_n U^*_{0n}\psi_n.$$

В условии (33.8) суммы останутся, но, если пренебречь влиянием растяжения ребра, как это часто делается, то нужно пренебречь указанными суммами по сравнению с $G^3_{k+1,m}$, которые принимают вид:

$$G^3_{k+1} = -A_2 \int \frac{a q_{1p}}{A_2 B} d\xi = \sum_m G^3_{k+1,m}\psi_m.$$

Учитывая все вышесказанное, краевые условия можно записать в виде:

$$
\left.
\begin{aligned}
&\frac{d^7P_m(0)}{d\theta^7}-\frac{d^7P_m\left(\frac{2\pi}{N}\right)}{d\theta^7}=\frac{2\lambda_m^8}{1-\nu}\cdot\frac{R}{A_2}G^3_{k+1,m};\\
&\frac{d^5P_m(0)}{d\theta^5}-\frac{d^5P_m\left(\frac{2\pi}{N}\right)}{d\theta^5}=\lambda_m^8H_m;\\
&\frac{dP_m(0)}{d\theta}-\frac{dP_m\left(\frac{2\pi}{N}\right)}{d\theta}=-\frac{2}{1-\nu}\cdot\frac{A_2}{R}G^3_{k+1,m};\\
&\frac{d^3P_m(0)}{d\theta^3}-\frac{d^3P_m\left(\frac{2\pi}{N}\right)}{d\theta^3}=-\frac{A^3}{R^3}\cdot\frac{2}{1-\nu}G^3_{k+1,m}-\\
&-E_{k+1,m}-\gamma\varkappa_m^4P_m(0)-\frac{1}{\lambda_m^8}\cdot\frac{A_2}{R}\left(\frac{A_2}{R}\gamma+\beta\right)\times\\
&\qquad\times\frac{d^6P_m(0)}{d\theta^6}.
\end{aligned}
\right\}\qquad(38)
$$

Выпишем функцию P_m и ее последовательные производные:

$$
\left.
\begin{aligned}
&P_m(\theta)=C_{m1}Y_{m1}+C_{m3}Y_{m3}+C_{m5}Y_{m5}+C_{m7}Y_{m7};\\
&P_m^{\mathrm{I}}(\theta)=-\lambda_m^8C_{m1}Y_{m8}+Y_{m2}C_{m3}+Y_{m4}C_{m5}+Y_{m6}C_{m7};\\
&P_m^{\mathrm{II}}(\theta)=-\lambda_m^8Y_{m7}C_{m1}+Y_{m1}C_{m3}+Y_{m3}C_{m5}+Y_{m5}C_{m7};\\
&P_m^{\mathrm{III}}(\theta)=-\lambda_m^8Y_{m6}C_{m1}-\lambda_m^8Y_{m8}C_{m3}+Y_{m2}C_{m5}+Y_{m4}C_{m7};\\
&P_m^{\mathrm{IV}}(\theta)=-\lambda_m^8Y_{m5}C_{m1}-\lambda_m^8Y_{m7}C_{m3}+Y_{m1}C_{m5}+Y_{m3}C_{m7};\\
&P^{\mathrm{V}}(\theta)=-\lambda_m^8Y_{m4}C_{m1}-\lambda_m^8Y_{m7}C_{m3}-\lambda_m^8Y_{m8}C_{m5}+Y_{m2}C_{m7};\\
&P^{\mathrm{VI}}(\theta)=-\lambda_m^8(Y_{m3}C_{m1}+Y_{m6}C_{m3}+Y_{m7}C_{m5})+Y_{m1}C_{m7};\\
&P^{\mathrm{VII}}(\theta)=-\lambda_m^8(Y_{m2}C_{m1}+Y_{m5}C_{m3}+Y_{m6}C_{m5}+Y_{m8}C_{m7}).
\end{aligned}
\right\}\qquad(39)
$$

Подставляя (39) в (38), получаем

$$
\left.
\begin{aligned}
&Y_{m2}C_{m1}+Y_{m4}C_{m3}+Y_{m6}C_{m5}+Y_{m8}C_{m7}=\frac{2}{1-\nu}\cdot\frac{R}{A_2}G^3_{k+1,m};\\
&Y_{m4}C_{m1}+Y_{m6}C_{m3}+Y_{m8}C_{m5}-\frac{1}{\lambda_m^8}Y_{m2}C_{m7}=H_m;\\
&-\lambda_m^8Y_{m8}C_{m1}+Y_{m2}C_{m3}+Y_{m4}C_{m5}+Y_{m6}C_{m7}=\frac{2}{1-\nu}\cdot\frac{A_2}{R}G^3_{k+1,m};\\
&-\lambda_m^8\left(Y_{m6}+\frac{\gamma h_*^2}{1-\nu^2}\right)C_{m1}-\lambda_m^8Y_{m8}C_{m3}+Y_{m2}C_{m5}+\\
&+\left(Y_{m4}-\frac{\gamma h_*^2}{1-\nu^2}\cdot\frac{A_2^2}{R^2}-\frac{\beta h_*^2}{1-\nu^2}\cdot\frac{A_2}{R}\right)C_{m7}=\frac{A_2^3}{R^3}G^3_{k+1,m}+E_m.
\end{aligned}
\right\}\qquad(40)
$$

Коротко эту систему можно записать так: $\sum\limits_{j=1,3,5,7} a_{ij} C_{mj} = bi.$

Пусть ε_{in} — алгебраическое дополнение к члену a_{ni} в определителе $|a_{mn}|$. Тогда

$$C_{mn} = \frac{\sum b_i \varepsilon_{in}}{|a_{mn}|}. \tag{41}$$

Окончательно выражение для функций P получаем, подставляя (41) и (35) в (22). Небезынтересно отметить, что, если поперечные края оболочки свободно покоятся на жестких опорах ($V=W=T_1=M_1=0$), то нет нужды пользоваться упрощенными уравнениями (15). В этом случае необходимо интегрировать уравнение (3.7) [1, стр. 215] и подчинить его решение краевым условиям (30), полученным в этой работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гольденвейзер А. Л. Теория тонких упругих оболочек. М., ГТТИ, 1953.
2. Новожилов В. В. Теория тонких оболочек. Л., Судпромгиз, 1962.
3. Кизима Г. А., Постоев В. С. Напряженное состояние в оболочках нулевой гауссовой кривизны. В сб. «Котлотурбостроение», вып. 46, Л., 1964 (ЦКТИ).
4. Вишик М. И., Люстерник Л. А. Асимптотическое поведение решений линейных дифференциальных уравнений. УМН, т. 15, вып. 4, 1960.