ОБОЛОЧКИ НУЛЕВОЙ ГАУССОВОЙ КРИВИЗНЫ С МЕРИДИОНАЛЬНЫМИ РЕБРАМИ

П. А. ЖИЛИН, Г. А. КИЗИМА

(*Ленинград*)

Предлагается прием, позволяющий свести исследование напряженного состояния ребристой оболочки вращения к исследованию напряженного состояния гладкой панели. На поперечных краях панели должны выполняться те же условия, что и на поперечных краях ребристой оболочки. На меридиональных кромках решения, полученные для гладкой панели, должны удовлетворять определенным условиям склейки. Часть этих условий тождественна условиям сопряжения ребра с оболочкой, остальные представляют условия неразрывности самой оболочки. Практически существуют решения лишь для панелей, представляющих собой разомкнутые оболочки нулевой гауссовой кривизны, поэтому в дальнейшем речь пойдет лишь о ребристых оболочках этого класса, причем ребра и поверхностная нагрузка таковы, что вызывают циклически-симметричное напряженное состояние в оболочке.

1. Общее решение задачи представим в виде:

$$u = u_0 + u_1, \qquad v = v_0 + v_1, \qquad w = w_0 + w_1 \tag{1.1}$$

Здесь u_0, v_0, w_0 — решение соответствующей гладкой замкнутой оболочки под заданной внешней нагрузкой при заданных краевых условиях на поперечных краях, а u_1, v_1, w_1 удовлетворяют однородным уравнениям при однородных условиях на поперечных краях. В дальнейшем полагаем, что u_0, v_0, w_0 известны и задача состоит в отыскании u_1, v_1, w_1. Эта задача существенно упрощается, если принять во внимание следующие соображения.

Полагаем, что меридиональные ребра оказывают основное влияние на изменяемость напряженного состояния оболочки в окружном направлении, вызывая увеличение показателя изменяемости напряженного состояния. В меридиональном направлении они, наоборот, уменьшают показатель изменяемости и, увеличивая зону протяженности простого краевого эффекта, выравнивают напряженное состояние в продольном направлении. Более того, поскольку коэффициенты уравнений ребристых оболочек в перемещениях терпят разрыв на линиях сопряжения ребра и оболочки, то решения этих уравнений вблизи линий разрыва должны быстро меняться в направлении, нормальном к линиям разрыва, т. е. по параллелям [1].

В таком случае можно существенно упростить исходные уравнения для u_1, v_1, w_1, применяя теорию невырождившегося краевого эффекта [2]. Таким образом, точность предлагаемого приема целиком определяется точностью теории невырождившегося краевого эффекта, требующей выполнения неравенства

$$\partial^2 f / \partial\varphi^2 \gg \partial^2 f / \partial\xi^2 \tag{1.2}$$

Здесь f — любое усилие или перемещение в оболочке, φ — окружная координата, ξ — меридиональная координата. Эта теория строится с точностью до простого краевого эффекта от поперечных краев оболочки, учет которого здесь предлагается сделать приближенно за счет простого краевого эффекта в гладкой оболочке (1.1). Все обозначения приняты такими, как и в монографии [3].

2. В уравнениях равновесия, записанных в усилиях и моментах [3], введем величины, имеющие одинаковую размерность:

$$\varepsilon_i^* = a\varepsilon_i, \quad \varkappa_i^* = a^2\varkappa_i, \quad \omega^* = a\omega, \quad \tau^* = a^2\tau$$

$$T_i^* = \frac{a}{B}T_i, \quad M_i^* = \frac{a^2}{D}M_i, \quad S^* = \frac{a}{B}S, \quad H^* = \frac{a^2}{D}H, \quad R_i^* = \frac{1}{a}R_i, \quad A_i^* = \frac{1}{a}A_i$$

$$\left(B = \frac{Eh}{1-\nu^2}, D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \ i = 1,2\right) \tag{2.1}$$

Здесь a — некоторый характерный линейный размер оболочки.

В этих обозначениях соотношения упругости имеют вид:

$$H^* = (1-\nu)\tau^*, \quad T_i^* = \varepsilon_i^* + \nu\varepsilon_{i+1}^*, \quad M_i^* = \varkappa_i^* + \nu\varkappa_{i+1}^*, \quad S^* = {}^1/_2(1-\nu)\omega^* \tag{2.2}$$

В дальнейшем индекс $*$ опускается. Шесть уравнений равновесия и неразрывности можно свести к двум уравнениям относительно двух неизвестных функций[1].

$$L(q) - h_0^2 M(p) = 0, \quad L(p) + \frac{1}{1-\nu^2}M(q) = 0 \tag{2.3}$$

[1] Рассматривается только однородная система, поскольку нагрузка вошла в решение для гладкой оболочки u_0, v_0, w_0.

$$\left(L = \frac{A_2^4}{R}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} \quad M = \frac{\partial^4}{\partial\varphi^4} \quad h_0^2 = \frac{D}{a^2B} = \frac{h^2}{12a^2}\right)$$

Усилия, моменты и компоненты деформаций имеют вид

$$T_1 = \frac{1}{A_2^2}\frac{\partial^2 q}{\partial\varphi^2}, \quad T_2 = \frac{\partial^2 q}{\partial\xi^2}, \quad S = -\frac{\partial}{\partial\xi}\frac{1}{A_2}\frac{\partial q}{\partial\varphi} \tag{2.4}$$

$$M_1 = \frac{\nu}{A_2^2}\frac{\partial^2 p}{\partial\varphi^2}, \quad M_2 = \frac{1}{A_2^2}\frac{\partial^2 p}{\partial\varphi^2}, \quad H = (1-\nu)\frac{\partial}{\partial\xi}\frac{1}{A_2}\frac{\partial p}{\partial\varphi}$$

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{1-\nu^2}\frac{1}{A_2^2}\frac{\partial^2 q}{\partial\varphi^2}, \quad \varepsilon_2 = -\frac{\nu}{1-\nu^2}\frac{1}{A_2^2}\frac{\partial^2 q}{\partial\varphi^2}, \quad \omega = -\frac{2}{1-\nu}\frac{\partial}{\partial\xi}\frac{1}{A_2}\frac{\partial q}{\partial\varphi}$$

$$\varkappa_1 = \frac{\partial^2 p}{\partial\xi^2} + \frac{1}{1-\nu^2}\frac{1}{A_2^2 R}\frac{\partial^2 q}{\partial\varphi^2}, \quad \varkappa_2 = \frac{1}{A_2^2}\frac{\partial^2 p}{\partial\varphi^2}, \quad \tau = \frac{\partial}{\partial\xi}\frac{1}{A_2}\frac{\partial p}{\partial\varphi}$$

Исключая при помощи первого из уравнений системы (2.3) функцию q, получим уравнение относительно p

$$LL(p) = + \frac{h_0^2}{1-\nu^2}MM(p) = 0 \tag{2.5}$$

Решение уравнения (2.5) будем искать в виде

$$p = \sum_m P_m(\varphi)\psi_m(\xi) \tag{2.6}$$

Здесь ψ_m — собственные функции оператора LL, т. е. ψ_m — нетривиальные решения уравнения

$$LL(\psi_m) - \varkappa_m^4\psi_m = 0 \tag{2.7}$$

при соответствующих однородных краевых условиях.

$\varkappa_m$ — собственные числа оператора LL.

Например, для цилиндрической и конической оболочек уравнение (2.7) принимает соответственно вид ($2\chi_0$ — угол конуса)

$$\frac{d^4\psi_m}{d\xi^4} - \varkappa_m^4\psi_m = 0, \qquad \xi^3\frac{d^2}{d\xi^2}\xi^3\frac{d^2\psi_m}{d\xi^2} - \frac{\varkappa_m^4}{\sin^6\chi_0\cos^2\chi_0}\psi_m = 0$$

После разделения переменных для функции $P_m(\varphi)$ получим уравнение

$$MM(P_m) + \lambda_m^8 P_m = 0 \qquad (\lambda_m^8 = \varkappa_m^4(1-\nu^2)\,/\,h_0^2) \tag{2.8}$$

Для круговых цилиндрических и конических оболочек уравнение (2.8) принимает вид

$$P_m^{(8)} + \lambda_m^8 P_m = 0 \tag{2.9}$$

Здесь и в дальнейшем $^{(n)}$, а также штрихи, означают производные по φ.

Краевыми условиями для этого уравнения будут условия склейки решений на продольных краях панели. Решение ищем в виде

$$P_m(\varphi) = \sum_{n=1}^{8} C_{mn}Y_{mn}(\varphi) \tag{2.10}$$

Здесь C_{mn} — произвольные постоянные, Y_{mn} — функции Крылова с единичной начальной матрицей,

$$Y_{m1} = {}^1/_2(\operatorname{ch} d\varphi\cos b\varphi + \operatorname{ch} b\varphi\cos d\varphi), \qquad Y_{m8} = -\lambda_m^{-8}Y_{m1}$$

$$Y_{mn}' = Y_{n\,m-1} \qquad \left(d = \lambda_m\cos\frac{\pi}{8}, \ b = \lambda_m\sin\frac{\pi}{8}, \ n = 2, 3, \ldots, 8\right) \tag{2.11}$$

В заключение этого параграфа приводятся выражения для перемещений. Прежде всего легко получить

$$q = (1-\nu^2)\sum_m \lambda_m^{-8}M(P_m)L(\psi_m) \tag{2.12}$$

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u_1}{\partial\xi} = \frac{1}{1-\nu^2}\frac{1}{A_2^2}\frac{\partial^2 q}{\partial\varphi^2} \tag{2.13}$$

Отсюда

$$u_1 = \sum_m u_{1m} A_2^2 \frac{d}{d\xi} \frac{\psi_m}{A_2}, \qquad u_{1m} = \frac{1}{\lambda_m^8} \frac{A_2}{R} \frac{d^6 P_m}{d\varphi^6} \tag{2.14}$$

Аналогично, из выражения для $\varkappa_1$ легко получить соотношение

$$w_1 = \sum_m w_{1m} \psi_m, \qquad w_{1m} = -P_m \tag{2.15}$$

Из выражения для ω получим

$$v_1 = -\sum_m \left[\frac{2(1+\nu)}{\lambda_m^8} \frac{d^5 P_m}{d\varphi^5} \frac{A_2}{R} A_2 \frac{d}{d\xi} A_2 \frac{d\psi_m}{d\xi} + \frac{du_{1m}}{d\varphi} \psi_m \right] \tag{2.16}$$

3. Коэффициенты в уравнениях равновесия ребристых оболочек, записанных в перемещениях [4, 5], содержат особенности типа δ-функции, т. е. будут разрывными. Решения полученных уравнений целесообразно искать в области непрерывности коэффициентов, после чего склеивать полученные решения на линиях разрыва. Линии разрыва непрерывности коэффициентов будут линиями сопряжения ребер с оболочкой. В области D_k между соседними ребрами решения совпадают с решениями для гладкой панели. При переходе через k-е ребро эти решения должны переходить в решения для следующей области D_{k+1}. Область D_k определяется неравенствами $-\pi / N = \theta_- < \varphi_k < \pi / N = \theta_+$, где N — число ребер. Уравнение (2.8) имеет восьмой порядок, поэтому должно быть восемь условий склейки на k-м ребре. Часть из них очевидна вследствие того, что сплошность самой оболочки не нарушается.

Остальные условия получим, проинтегрировав уравнения равновесия ребристых оболочек в пределах от $\varphi_k - \varepsilon$ до $\varphi_k + \varepsilon$ и сделав предельный переход [4] при $\varepsilon \to 0$,

$$1)\ u_1(\theta_-) = u_1(\theta_+), \qquad 2)\ v_1(\theta_-) = v_1(\theta_+), \qquad 3)\ w_1(\theta_-) = w_1(\theta_+)$$

$$4)\ v_1'(\theta_-) = v_1'(\theta_+), \qquad 5)\ w_1'(\theta_-) = w_1'(\theta_+), \qquad 6)\ w_1''(\theta_-) = w_1''(\theta_+)$$

$$7)\ \frac{1-\nu}{2} \frac{1}{A_2} [u_1'(\theta_-) - u_1'(\theta_+)] = \frac{\partial}{\partial\xi} \left[\frac{ES}{a^2 B} \frac{\partial^2 w(\theta_+)}{\partial\xi^2} - \frac{EF}{aB} \frac{\partial u(\theta_+)}{\partial\xi} \right] \tag{3.1}$$

$$8)\ h_0^2 [w_1'''(\theta_-) - w_1'''(\theta_+)] = A_2^3 \frac{\partial^2}{\partial\xi^2} \left[\frac{ES}{a^2 B} \frac{\partial u(\theta_+)}{\partial\xi} - \frac{EI}{a^3 B} \frac{\partial^2 w(\theta_+)}{\partial\xi^2} \right]$$

Два последних условия склейки (3.1) определяют соответственно скачок в касательных и перерезывающих усилиях оболочки, а правые части описывают внецентренное растяжение балки и изгиб балки с учетом растяжения, соответственно. При этом предполагается, что ребра одинаковы, расположены на равном расстоянии один от другого, несимметричны относительно срединной поверхности оболочки и отвечают требованию:

$$F = F_0 A_2, \quad S = S_0 A_2^2, \quad I = I_0 A_2^3 \quad (F_0, S_0, I_0 = \text{const}) \tag{3.2}$$

Это означает, что для цилиндрической оболочки ребра имеют постоянную высоту, а для конической высота ребра меняется по линейному закону. Для простоты предположим, что ребра могут скользить вдоль меридиана оболочки без трения.

В этом случае в условиях склейки удается разделить переменные. Предполагается, что в оболочке возникает циклически-симметричное напряженное состояние, например, $w_1(\theta) = w_1(-\theta)$, тогда в выражениях (3.1) следует оставить только четные функции Y_{mn}, т. е. следует положить

$$C_{mn} = 0 \quad (n = 2, 4, 6, 8) \tag{3.3}$$

Тогда первое, третье, четвертое и шестое условия склейки (3.1) удовлетворяются тождественно, а остальные соответственно упрощаются

$$v_1(\theta_+) = 0, \qquad w_1'(\theta_+) = 0, \qquad u_1'(\theta_+) = 0$$

$$w_1'''(\theta_+) = -\frac{A_2^2}{2h_0^2} \frac{\partial^2}{\partial\xi^2} \left[\frac{ES_0}{a^2 B} \frac{\partial u(\theta_+)}{\partial\xi} - \frac{EI_0}{a^3 B} \frac{\partial^2 w(\theta_+)}{\partial\xi^2} \right] \tag{3.4}$$

$$\left(u = u_0 + u_1, \quad w = w_0 + w_1, \quad u_0 = \sum_m u_{0m} A_2^2 \frac{d}{d\xi} \frac{\psi_m}{A_2}, \quad w_0 = \sum_m w_{0m} \psi_m \right)$$

При подстановке выражений (2.14) — (2.16) с учетом (2.10) и (3.2) в выражение (3.4) получается система четырех алгебраических уравнений для определения четырех произвольных постоянных интегрирования при $\theta_+ = \pi / N$

$$\begin{gathered}
C_{m1}Y_{m2} + C_{m3}Y_{m4} + C_{m5}Y_{m6} + C_{m7}Y_{m8} = 0 \\
C_{m1}Y_{m4} + C_{m3}Y_{m6} + C_{m5}Y_{m8} - C_{m7}\lambda_m^{-8}Y_{m2} = 0 \\
-C_{m1}\lambda_m^{8}Y_{m8} + C_{m3}Y_{m2} + C_{m5}Y_{m4} + C_{m7}Y_{m6} = 0 \\
C_{m1}K_m^{(6)} + C_{m3}K_m^{(4)} + C_{m5}K_m'' + C_{m7}K_m = H_m
\end{gathered} \tag{3.5}$$

$$\left(H_m = \frac{\lambda_m^{8}}{2(1-\nu^2)}\left[\frac{ES_0}{a^2B}u_{0m}(\theta_+) - \frac{EI_0}{a^3B}w_{0m}(\theta_+)\right]\right) \tag{3.6}$$

Решение системы для каждого m имеет вид:

$$C_{m1} = H_m\frac{A_{m3}B_{m4} - B_{m2}A_{m4}}{B_{m1}B_{m4} - B_{m2}B_{m3}}, \qquad C_{m3} = -H_m\frac{A_{m1}B_{m4} - B_{m2}A_{m2}}{B_{m1}B_{m4} - B_{m2}B_{m3}}$$

$$C_{m5} = H_m\frac{B_{m4}}{B_{m1}B_{m4} - B_{m2}B_{m3}}, \qquad C_{m7} = -H_m\frac{B_{m2}}{B_{m1}B_{m4} - B_{m2}B_{m3}}$$

$$A_{m1} = \frac{Y_{m4}Y_{m6} - Y_{m2}Y_{m8}}{Y_{m4}^2 - Y_{m2}Y_{m6}}, \qquad A_{m2} = \frac{Y_{m4}Y_{m8} + \lambda_m^{-8}Y_{m2}^2}{Y_{m4}^2 - Y_{m2}Y_{m6}}$$

$$A_{m3} = \frac{Y_{m6}^2 - Y_{m4}Y_{m8}}{Y_{m4}^2 - Y_{m2}Y_{m6}}, \qquad A_{m4} = \frac{Y_{m6}Y_{m8} + \lambda_m^{-8}Y_{m2}Y_{m4}}{Y_{m4}^2 - Y_{m2}Y_{m6}}$$

$$B_{m1} = K_m'' - K_m^{(4)}A_{m1} + K_m^{(6)}A_{m3}, \qquad B_{m2} = Y_{m4} - Y_{m2}A_{m1} - \lambda_m^{8}Y_{m8}A_{m3}$$

$$B_{m3} = K_m - K_m^{(4)}A_{m2} + K_m^{(6)}A_{m4}, \qquad B_{m4} = Y_{m6} - Y_{m2}A_{m2} - \lambda_m^{8}Y_{m8}A_{m4}$$

$$K_m = Y_{m4} - \frac{1}{2(1-\nu^2)}\frac{A_2}{R}\frac{ES_0}{a^2B}Y_{m1} - \frac{\lambda_m^{8}}{2(1-\nu^2)}\frac{EI_0}{a^3B}Y_{m7}, \qquad K_m'' = \frac{d^2K}{d\varphi^2}$$

Нетрудно вычислить перемещения, усилия и моменты, возникающие вблизи ребра, используя выражения (2.4), (2.6), (2.7), (2.10), (2.12), (2.14) — (2.16), (3.6). Полные напряжения в ребристой оболочке складываются из известных напряжений в гладкой оболочке (определенных по точной теории) и напряжений, возникающих вблизи ребра (вычисленных по приближенной теории невыродившегося краевого эффекта).

Поступило 6 III 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Вишик М. И. и Люстерник Л. А. Асимптотическое поведение решений линейных дифференциальных уравнений. Успехи матем. н., 1960, т. 15, № 4.
2. Гольденвейзер А. Л. Теория тонких упругих оболочек. Гостехиздат, 1953.
3. Новожилов В. В. Теория тонких оболочек. Судпромгиз, 1962.
4. Жилин П. А. К анализу краевых задач ребристых оболочек. Сб. «Прочность гидротурбин», Центр. котлотурб. ин-та им. И. И. Ползунова, 1966, вып. 72.
5. Гребень Е. С. Основные соотношения технич. теории ребристых оболочек. Изв. АН СССР, Механика, 1965, № 3.

О РАЗЛИЧНЫХ ОПРЕДЕЛЕНИЯХ ПАРАМЕТРОВ ИЗМЕНЕНИЯ КРИВИЗНЫ ОБОЛОЧКИ И ОБ УРАВНЕНИЯХ СОВМЕСТНОСТИ ДЕФОРМАЦИИ

Э. Л. АКСЕЛЬРАД

(Ленинград)

Величины, применяемые в теории оболочек в качестве параметров изменения кривизны, различаются лишь членами порядка относительных удлинений. Однако пренебрежение этим различием вызывает усложнение уравнений равновесия в перемещениях лишними второстепенными членами, а в уравнениях совместности деформации даже приводит к возникновению существенной погрешности.