Вращение твердого тела с неподвижной точкой: случай Лагранжа*

Аннотация

Случаем Лагранжа называют задачу о вращении твердого тела с трансверсально изотропным тензором инерции в однородном поле тяготения. Центр масс тела расположен на оси симметрии тензора инерции. С формально-математической точки зрения решение этой задачи известно очень давно и приведено во многих книгах и учебниках. Тем не менее, известное решение трудно поддается ясному физическому истолкованию и неоправданно сложно описывает некоторые простые типы движения. В работе дается новая форма решения задачи. В случае быстровращающегося гироскопа получено практически точное решение в элементарных функциях. Показано, что выражение для скорости прецессии, найденное по элементарной теории гироскопов дает ошибку в главном члене.

1 Быстровращающийся гироскоп

Абсолютно твердое тело с трансверсально изотропным тензором инерции, вращающееся вокруг неподвижной точки, называют гироскопом [1]. В технике гироскопы находят очень широкое применение и обычно являются телами вращения. Но нередко [2] гироскопом называют тело с произвольным тензором инерции, и даже не обязательно вращающимся вокруг неподвижной точки. Так что термин *"гироскоп"* не является однозначно определенным и применяется в разных смыслах. Ниже будет рассмотрена простейшая из возникающих здесь задач. К сожалению, обсуждению поведения гироскопа мы вынуждены предпослать относительно длинное решение задачи о быстровращающемся гироскопе. При этом не будут использоваться подходы, типичные для динамики твердого тела. Здесь уместно процитировать известного специалиста по теории гироскопов К. Магнуса [2], стр.117: *"Много усилий было затрачено на поиски таких случаев, для которых было бы возможно точное решение нелинейных уравнений движения. Как бы ни были привлекательны для математика достигнутые при этом результаты, приходится, однако, констатировать, что с физической точки зрения или с точки зрения чисто гироскопической техники они*

*Жилин П.А. Вращение твердого тела с неподвижной точкой: случай Лагранжа // Доклад на XXXI летней школе "Актуальные проблемы механики", Санкт-Петербург, 2003.

почти (или даже совсем) не представляют интереса.” Поэтому ниже будет представлено приближенное, но с очень высокой степенью точности, решение, причем оно будет найдено в явной форме и выражено через элементарные функции. Сравнивая полученное ниже решение с результатами, представленными в книгах по динамике твердого тела, необходимо соблюдать известную осторожность[1]. В частности, в литературе использовалось представление тензора поворота через углы Эйлера, которые в данной задаче неудобны. Ниже используется другое представление тензора поворота.

Итак, рассмотрим тело с трансверсально изотропным тензором инерции, который вычислен относительно неподвижной точки и в отсчетном положении определен выражением

$$\mathbf{\Theta} = \lambda \mathbf{e} \otimes \mathbf{e} + \mu \left(\mathbf{E} - \mathbf{e} \otimes \mathbf{e} \right),$$

где $\mathbf{e}$ есть единичный вектор, задающий ось изотропии, λ и μ суть осевой и экваториальный моменты инерции соответственно. Будем считать, что начало системы отсчета расположено в точке O, а центр масс расположен на оси симметрии

$$\mathbf{r}_C = l\,\mathbf{e} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{R}_C(t) = \mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{r}_C = l\,\mathbf{P} \cdot \mathbf{e} \equiv l\,\mathbf{e}',$$

где l — расстояние от неподвижной точки до центра масс; $\mathbf{r}_C$ и $\mathbf{R}_C$ суть векторы положения центра масс в отсчетном и актуальном положениях соответственно. Угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$ связана с тензором поворота $\mathbf{P}$ уравнением Пуассона [3, 4]

$$\dot{\mathbf{P}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{P}. \tag{1}$$

Вектор кинетического момента $\mathbf{L}$ тела $\mathcal{A}$ вычисляется по формуле

$$\mathbf{L} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{\Theta} \cdot \mathbf{P}^T \cdot \boldsymbol{\omega} = \mu\, \boldsymbol{\omega} + (\lambda - \mu)(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}')\mathbf{e}'.$$

Второй закон динамики Эйлера дает уравнения движения тела $\mathcal{A}$

$$[\boldsymbol{\omega} + \eta(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}')\mathbf{e}']^{\cdot} = \nu\, \mathbf{k} \times \mathbf{e}', \quad \eta \equiv \frac{\lambda - \mu}{\mu}, \quad \nu \equiv \frac{mgl}{\mu}, \tag{2}$$

где $\mathbf{k}$ — орт вертикали, m — масса тела, g — ускорение свободного падения.

Начальные условия имеют вид

$$\mathbf{P}(0) = \mathbf{E}, \quad \boldsymbol{\omega}(0) = \boldsymbol{\omega}_0 = \omega_0 \mathbf{e}. \tag{3}$$

Система уравнений (1) – (2) с начальными условиями (3) дает классическую постановку задачи в случае Лагранжа [1, 2, 5]. Решение этой задачи в полном объеме будет изложено в главе, посвященной динамике твердого тела. Ниже рассматривается частный случай, когда $\boldsymbol{\omega}_0 = \omega_0 \mathbf{e}$. Кроме того, модуль начальной угловой скорости ω_0 будет считаться достаточно большим. Более точный смысл этого утверждения будет указан позднее. Вычислим проекцию уравнения (2) на орт $\mathbf{e}'$. При этом учтем равенство

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} \cdot \mathbf{e}' = (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}')^{\cdot} - \boldsymbol{\omega} \cdot \dot{\mathbf{e}}' = (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}')^{\cdot} - \boldsymbol{\omega} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}') = (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}')^{\cdot}.$$

[1] Даже терминология не всегда совпадает. Используемая в данной книге терминология близка к таковой в учебнике [1], но сильно отличается от принятой в книге [2].

С учетом этого равенства проекция уравнения (2) на орт $\mathbf{e}'$ дает

$$(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}')^{\cdot} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}' = \boldsymbol{\omega}_0 \cdot \mathbf{e} = \omega_0. \tag{4}$$

Иными словами, проекция угловой скорости на вращающуюся ось симметрии остается неизменной и находится по начальным условиям (3). Интеграл (4) впервые был получен Лагранжем и потому его принято называть интегралом Лагранжа. Теперь уравнение (2) принимает вид

$$(\boldsymbol{\omega} + \eta\, \omega_0 \mathbf{e}')^{\cdot} \equiv \dot{\boldsymbol{\omega}} + \eta\, \omega_0 \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}' = \nu\, \mathbf{k} \times \mathbf{e}'. \tag{5}$$

Для уравнения (5) нетрудно получить еще два интеграла. Классические подходы существенно опираются на эти интегралы, но в излагаемом ниже решении они практически не используются. Укажем только, что один из них называется интегралом энергии и получается после скалярного умножения обеих частей уравнения (5) на вектор $\boldsymbol{\omega}$

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega} + \nu \mathbf{k} \cdot \mathbf{e}' = \frac{1}{2}\omega_0^2 + \nu \mathbf{k} \cdot \mathbf{e} = \text{const}. \tag{6}$$

Интеграл энергии (6), в совокупности с интегралом Лагранжа (4), утверждает постоянство суммы кинетической и потенциальной энергии тела. Из интеграла энергии (6) немедленно вытекают неравенства

$$-(1 - \cos\alpha)\frac{2\nu}{\omega_0^2} \le \frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 1 \le (1 + \cos\alpha)\frac{2\nu}{\omega_0^2} \equiv (1 + \cos\alpha)\frac{2mgl}{\mu\omega_0^2}, \quad \cos\alpha = \mathbf{k} \cdot \mathbf{e}.$$

Из этого неравенства видим, что для быстровращающегося гироскопа, т.е. при $2\nu/\omega_0^2 << 1$, модуль угловой скорости почти не отличается от модуля начальной угловой скорости. Смысл параметра $2mgl/\mu\omega_0^2$ понятен. Это отношение максимальной потенциальной энергии гироскопа, когда центр масс находится в верхнем положении, к удвоенной начальной кинетической энергии гироскопа. Для быстровращающегося гироскопа это отношение является малым. Если бы угловая скорость была постоянной, то из интеграла энергии следовало бы

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}' \equiv \mathbf{k} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{e} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{e} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P} = \mathbf{Q}(\psi \mathbf{k}) \cdot \mathbf{Q}(\varphi \mathbf{e}) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{e}' = \mathbf{Q}(\psi \mathbf{k}) \cdot \mathbf{e}.$$

где использовано стандартное для этой книги обозначение

$$\mathbf{Q}(\gamma \mathbf{m}) \equiv (1 - \cos\gamma)\mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + \cos\gamma\ \mathbf{E} + \sin\gamma\ \mathbf{m} \times \mathbf{E}.$$

Иными словами, если бы модуль угловой скорости был постоянным, то ось гироскопа совершала бы чистую прецессию вокруг орта вертикали с угловой скоростью прецессии $\dot{\psi}\mathbf{k}$. На самом деле угловая скорость не постоянна, а угол между вертикалью и осью гироскопа меняется, но меняется незначительно. Поэтому тензор поворота нужно искать в виде композиции трех поворотов

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q}(\psi \mathbf{k}) \cdot \mathbf{Q}(\vartheta \mathbf{p}) \cdot \mathbf{Q}(\varphi \mathbf{e}), \quad \mathbf{p} = \mathbf{k} \times \mathbf{e}/\sin\alpha, \quad |\vartheta| << 1, \tag{7}$$

где углы ψ, ϑ и φ называются углами прецессии, нутации и собственного вращения соответственно. По основной теореме о представлении тензора поворота [3, 4] представление (7) без допущения о малости угла нутации справедливо всегда. Для быстровращающегося гироскопа вектор нутации $\boldsymbol{\vartheta} = \vartheta \mathbf{p}$ мал по модулю. Поэтому можно использовать аппроксимацию для малых углов

$$\mathbf{Q}(\vartheta\mathbf{p}) = \mathbf{E} + \boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{E} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P} = \mathbf{Q}(\psi\mathbf{k}) \cdot (\mathbf{E} + \boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{Q}(\varphi\mathbf{e}). \tag{8}$$

Вычисляя угловую скорость для поворота (8), получаем

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{Q}(\psi\mathbf{k}) \cdot \left(\dot{\psi}\mathbf{k} + \dot{\varphi}\mathbf{e} + \dot{\boldsymbol{\vartheta}} + \dot{\varphi}\boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{e}\right). \tag{9}$$

Нетрудно установить формулы

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{Q}(\psi\mathbf{k}) \cdot \Big(\ddot{\psi}\,\mathbf{k} + \ddot{\varphi}\,\mathbf{e} + \ddot{\boldsymbol{\vartheta}} + \ddot{\varphi}\,\boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{e} - \dot{\varphi}\,\mathbf{e} \times \dot{\boldsymbol{\vartheta}} + \dot{\psi}\dot{\varphi}\,\mathbf{k} \times \mathbf{e} + \dot{\psi}\,\mathbf{k} \times \dot{\boldsymbol{\vartheta}} +$$

$$+ \dot{\psi}\dot{\varphi}\,\mathbf{k} \times (\boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{e})\Big), \quad \mathbf{k} \times \mathbf{e}' = \mathbf{Q}(\psi\mathbf{k}) \cdot [\mathbf{k} \times \mathbf{e} + \mathbf{k} \times (\boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{e})],$$

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}' = \mathbf{Q}(\psi\mathbf{k}) \cdot \left(\dot{\psi}\,\mathbf{k} \times \mathbf{e} + \dot{\psi}\,\mathbf{k} \times (\boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{e}) + \ddot{\boldsymbol{\vartheta}} + \dot{\boldsymbol{\vartheta}} \times \mathbf{e}\right).$$

Подставляя эти выражения в уравнение (5), приходим к следующему уравнению

$$\underline{\ddot{\psi}\,\mathbf{k} + \ddot{\varphi}\,\mathbf{e}} + \ddot{\boldsymbol{\vartheta}} + \ddot{\varphi}\,\boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{e} + \left(-\dot{\varphi}\,\mathbf{e} + \dot{\psi}\,\mathbf{k} - \eta\omega_0\mathbf{e}\right) \times \dot{\boldsymbol{\vartheta}} +$$

$$+ \underline{\left(\dot{\psi}\dot{\varphi} + \eta\omega_0\,\dot{\psi} - \nu\right)\mathbf{k} \times \mathbf{e}} + \left(\dot{\psi}\dot{\varphi} + \eta\omega_0\,\dot{\psi} - \nu\right)\mathbf{k} \times (\boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{e}) = \mathbf{0}. \tag{10}$$

Подчеркнутые слагаемые в уравнении (10) не содержат малого угла нутации и в этом смысле малыми не являются. Поэтому после отбрасывания слагаемых, содержащих угол нутации, получаем для них уравнения

$$\ddot{\psi}_0 = 0, \quad \ddot{\varphi}_0 = 0, \quad \dot{\psi}_0\dot{\varphi}_0 + \eta\omega_0\,\dot{\psi}_0 = \nu.$$

Откуда получаем

$$\dot{\varphi}_0 = \omega_0, \quad \dot{\psi}_0 = \frac{\nu}{(1+\eta)\omega_0} = \frac{\mu\nu}{\lambda\omega_0}. \tag{11}$$

Здесь использовано начальное условие для $\dot{\varphi}_0$. Отклонения углов собственного вращения и прецессии от значений (11) должны быть малыми и иметь порядок $O(\vartheta)$.

$$\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0 + \beta, \quad \dot{\psi} = \dot{\psi}_0 + \gamma, \quad \beta \sim O(\vartheta), \quad \gamma \sim O(\vartheta). \tag{12}$$

Не следует думать, что функции β и γ должны быть малыми в сравнении с $\dot{\varphi}_0$ и $\dot{\psi}_0$ соответственно. В представлении (12) этого не предполагается. В частности, функции γ и $\dot{\psi}_0$ будут иметь одинаковый порядок малости. Из равенств (11) видим, что скорость прецессии $\dot{\psi}_0$ для быстровращающегося гироскопа мала, но угол прецессии

ψ_0 не мал, поскольку он нарастает во времени по линейному закону. Подставляя выражения (12) и (11) в уравнение (10) и отбрасывая в нем величины $O(\beta\vartheta)$ и $O(\gamma\vartheta)$ второго порядка малости, получаем

$$\dot{\gamma}\,\mathbf{k}+\dot{\beta}\,\mathbf{e}+\frac{\ddot{\vartheta}}{\sin\alpha}\mathbf{k}\times\mathbf{e}-\frac{\dot{\vartheta}}{\sin\alpha}\left(\frac{\mu\omega_0}{\lambda}\mathbf{e}-\frac{\mu\nu}{\lambda\omega_0}\mathbf{k}\right)\times(\mathbf{k}\times\mathbf{e})+ \\ +\left(\frac{\mu\omega_0}{\lambda}\gamma+\frac{\mu\nu}{\lambda\omega_0}\beta\right)\mathbf{k}\times\mathbf{e}=\mathbf{0}. \quad (13)$$

Проекция уравнения (13) на орт $\mathbf{k}$ дает

$$\dot{\gamma}+\dot{\beta}\cos\alpha=\frac{\lambda\omega_0}{\mu}\,\dot{\vartheta}\sin\alpha \quad\Rightarrow\quad \gamma+\beta\cos\alpha=\frac{\lambda\omega_0}{\mu}\vartheta\sin\alpha+a,$$

где a есть произвольная постоянная.

Проекция уравнения (13) на орт $\mathbf{e}$ дает

$$\dot{\gamma}\cos\alpha+\dot{\beta}=\frac{\mu\nu}{\lambda\omega_0}\,\dot{\vartheta}\sin\alpha \quad\Rightarrow\quad \gamma\cos\alpha+\beta=\frac{\lambda\omega_0}{\mu}\,\vartheta\sin\alpha+b,$$

где b есть произвольная постоянная.

Наконец, проекция уравнения (13) на орт $\mathbf{k}\times\mathbf{e}$ дает

$$\ddot{\vartheta}+\sin\alpha\left(\frac{\lambda\omega_0}{\mu}\gamma+\frac{\mu\nu}{\lambda\omega_0}\beta\right)=0. \quad (14)$$

Для определения постоянных a и b необходимо использовать начальные условия для угловой скорости. Поскольку начальные углы равны нулю, то выражение (9) дает

$$\omega_0\mathbf{e}=\left.\left(\dot{\psi}\mathbf{k}+\dot{\varphi}\mathbf{e}+\dot{\boldsymbol{\vartheta}}\right)\right|_{t=0} \quad\Rightarrow\quad \beta(0)=0,\ \gamma(0)=-\frac{\mu\nu}{\lambda\omega_0},\ \dot{\vartheta}\,(0)=0. \quad (15)$$

Используя условия (15), получаем

$$a=-\frac{\mu\nu}{\lambda\omega_0},\quad b=-\frac{\mu\nu\cos\alpha}{\lambda\omega_0}.$$

Исключая в уравнении (14) функции β и γ, получаем уравнение для определения угла нутации

$$\ddot{\vartheta}+\omega_*^2\vartheta=\nu\sin\alpha,\quad \vartheta(0)=0,\quad \dot{\vartheta}\,(0)=0, \quad (16)$$

где

$$\omega_*^2\equiv\frac{\lambda^2\omega_0^2}{\mu^2}\left(1-2\frac{\mu^2\nu}{\lambda^2\omega_0^2}\cos\alpha+\frac{\mu^4\nu^2}{\lambda^4\omega_0^4}\right).$$

В этом выражении последнее слагаемое в скобках имеет порядок $O(\vartheta^2)$. Поскольку величины порядка $O(\vartheta^2)$ ранее отбрасывались, то и здесь ее необходимо отбросить. В итоге получаем

$$\omega_*^2\equiv\frac{\lambda^2\omega_0^2}{\mu^2}\left(1-2\frac{\mu^2\nu}{\lambda^2\omega_0^2}\cos\alpha\right)>0 \quad\Rightarrow\quad \lambda^2\omega_0^2>2\nu\mu^2\cos\alpha. \quad (17)$$

Последнее неравенство в (17) является необходимым критерием применимости полученного решения при всех t. Если оно нарушено, то полученное решение правильно только при малых t и не представляет никакого интереса. В этом случае нужно использовать более общий подход, который будет изложен в главе, посвященной задачам динамики твердого тела.

Таким образом, получаем окончательное выражение для угла нутации

$$\vartheta(t) = \frac{\nu \sin\alpha}{\omega_*^2}\left(1 - \cos\omega_* t\right), \tag{18}$$

где частота нутационных колебаний ω_* определена формулой (17). Выражение (17) показывает, что для стоячего гироскопа [2], т.е. при $\alpha < \pi/2$, частота нутационных колебаний немного меньше, чем частота нутационных колебаний висячего гироскопа $(\alpha > \pi/2)$. Окончательные выражения для скорости собственного вращения и скорости прецессии имеют вид

$$\dot\varphi(t) = \omega_0 - \frac{\nu}{\omega_*^2}\left(\frac{\lambda\omega_0}{\mu}\cos\alpha - \underline{\frac{\mu\nu}{\lambda\omega_0}}\right)\left(1 - \cos\omega_* t\right),$$

$$\dot\psi(t) = \frac{\nu}{\omega_*^2}\left(\frac{\lambda\omega_0}{\mu} - \frac{\mu\nu}{\lambda\omega_0}\cos\alpha\right)\left(1 - \cos\omega_* t\right). \tag{19}$$

Подчеркнутое слагаемое в (19) следует отбросить как выходящее за пределы точности принятого метода решения задачи. Отметим, что для быстровращающихся гироскопов, которые используются в технике, формулы (18) и (19) являются практически точными. Наиболее показательным является случай, когда при $t = 0$ ось гироскопа была направлена горизонтально, т.е. $\alpha = \pi/2$, $\cos\alpha = 0$. Тогда вместо выражений (18) и (19) будем иметь

$$\vartheta(t) = \frac{\mu^2\nu}{\lambda^2\omega_0^2}\left(1 - \cos\frac{\lambda\omega_0 t}{\mu}\right), \quad \dot\vartheta(\mathbf{t}) = \frac{\mu\nu}{\lambda\omega_0}\sin\frac{\lambda\omega_0 t}{\mu},$$

$$\dot\varphi(t) = \omega_0, \quad \dot\psi(t) = \frac{\mu\nu}{\lambda\omega_0}\left(1 - \cos\frac{\lambda\omega_0 t}{\mu}\right). \tag{20}$$

Сравним полученное решение с решением, представленном в [1] и полученном на основе приближенной теории быстровращающегося гироскопа. Для скоростей оно имеет вид

$$\dot\vartheta(t) = 0, \quad \dot\varphi(t) = \omega_0, \quad \dot\psi(t) = \frac{\mu\nu}{\lambda\omega_0}.$$

Видим, что эти формулы совпадают с осредненными по периоду нутационных колебаний скоростями, даваемыми формулами (20).

Если бы гироскоп вращался вокруг своего центра масс $(\nu = 0)$, то он обладал бы только вращением вокруг собственной оси, причем скорость собственного вращения сохраняла бы свое направление в пространстве. Если $\nu \neq 0$, то на гироскоп действует внешний момент, направленный по вектору $\mathbf{k} \times \mathbf{e}'$. На первый взгляд кажется, что ось гироскопа должна поворачиваться также вокруг вектора $\mathbf{k} \times \mathbf{e}'$. Но так было бы только в том случае, если бы скорость собственного вращения равнялась бы нулю.

Если $\omega_0 \neq 0$, то ось гироскопа начинает прецессировать вокруг вектора $\mathbf{k}$. Более точно, для оси гироскопа имеем выражение

$$\mathbf{e}' = \mathbf{Q}(\psi\mathbf{k}) \cdot \mathbf{Q}(\vartheta\mathbf{e}) \cdot \mathbf{e} = \mathbf{Q}(\psi\mathbf{k}) \cdot (\mathbf{e} + \boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{e}) \simeq \mathbf{Q}(\psi\mathbf{k}) \cdot \mathbf{e}.$$

Последнее выражение и показывает, что ось гироскопа прецессирует вокруг вектора $\mathbf{k}$ с переменной и малой в сравнении с ω_0 скоростью. Но угол прецессии нарастает во времени и потому происходит уход оси гироскопа от первоначально заданного направления на сколь-угодно большой угол. В то же время ось гироскопа практически не выходит из горизонтальной плоскости, поскольку угол нутации пренебрежимо мал при всех временах. То обстоятельство, что вращающееся тело, при дополнительном воздействии на него моментом, начинает поворачиваться вокруг оси, ортогональной моменту, кажется удивительным. Но это далеко не единственный факт, вызывающий удивление, при первоначальном изучении спинорных движений твердых тел.

2 Общая постановка задачи

Рассмотрим абсолютно твердое тело A, которое может совершать вращательное движение вокруг точки O, которая принадлежит телу A и неподвижна в системе отсчета. Будем считать, что тензор инерции тела A, вычисленный относительно точки O, трансверсально изотропен и имеет вид

$$\boldsymbol{\Theta}(t) = \mathbf{P}_*(t) \cdot [\mu\mathbf{E} + (\lambda - \mu)\mathbf{e} \otimes \mathbf{e}] \cdot \mathbf{P}_*^T(t) = \mu\,\mathbf{E} + (\lambda - \mu)\mathbf{e}' \otimes \mathbf{e}', \quad \mathbf{e}' \equiv \mathbf{P}_* \cdot \mathbf{e}, \quad (21)$$

где λ, μ суть осевой и экваториальный моменты инерции тела соответственно, $\mathbf{E}$ — единичный тензор второго ранга, $\mathbf{P}_*(t)$— тензор поворота, $\mathbf{e}$— орт оси симметрии тензора инерции в отсчетном положении, в качестве которого выберем положение тела в начальный момент времени, т.е. $\mathbf{P}_*(0) = 0$. Здесь и ниже используются обозначения, принятые в книгах [3, 6].

Будем считать, что начало в системе отсчета расположено в точке O, и центр масс расположен на оси симметрии

$$\mathbf{r}_C = l\,\mathbf{e} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{R}_C(t) = \mathbf{P}_*(t) \cdot \mathbf{r}_C = l\,\mathbf{P}_* \cdot \mathbf{e} \equiv l\,\mathbf{e}',$$

где l — расстояние от неподвижной точки до центра масс; $\mathbf{r}_C$ и $\mathbf{R}_C$ суть векторы положения центра масс в отсчетном и актуальном положениях соответственно. Угловая скорость $\boldsymbol{\omega}_*$ связана с тензором поворота $\mathbf{P}_*$ уравнением Пуассона

$$\dot{\mathbf{P}}_* = \boldsymbol{\omega}_* \times \mathbf{P}_*. \quad (22)$$

Вектор кинетического момента $\mathbf{L}$ тела A вычисляется по формуле

$$\mathbf{L}_* = \boldsymbol{\Theta} \cdot \boldsymbol{\omega}_* = \mu\,\boldsymbol{\omega}_* + (\lambda - \mu)(\boldsymbol{\omega}_* \cdot \mathbf{e}')\mathbf{e}'.$$

Второй закон динамики Эйлера дает уравнения движения тела A

$$[\boldsymbol{\omega}_* + \eta(\boldsymbol{\omega}_* \cdot \mathbf{e}')\mathbf{e}']^{\cdot} = \nu\,\mathbf{k} \times \mathbf{e}', \quad \eta \equiv \frac{\lambda - \mu}{\mu}, \quad \nu \equiv \frac{mgl}{\mu}, \quad (23)$$

где $\mathbf{k}$ — орт вертикали, m — масса тела, g — ускорение свободного падения.

Начальные условия имеют вид

$$\mathbf{P}_*(0) = \mathbf{E}, \quad \boldsymbol{\omega}_*(0) = \boldsymbol{\omega}_*^0. \tag{24}$$

Система уравнений (22) – (23) с начальными условиями (24) дает классическую постановку задачи в случае Лагранжа [5]. Решение этой задачи зависит от пяти параметров: двух скалярных параметров η и ν и одного векторного параметра $\boldsymbol{\omega}_*^0$. Но зависимость решения от параметра η является несущественной, и от нее легко избавиться. Для этого предварительно вычислим проекцию уравнения (23) на орт $\mathbf{e}'$. При этом учтем равенство

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_* \cdot \mathbf{e}' = (\boldsymbol{\omega}_* \cdot \mathbf{e}')^{\cdot} - \boldsymbol{\omega}_* \cdot \dot{\mathbf{e}}' = (\boldsymbol{\omega}_* \cdot \mathbf{e}')^{\cdot} - \boldsymbol{\omega}_* \cdot (\boldsymbol{\omega}_* \times \mathbf{e}') = (\boldsymbol{\omega}_* \cdot \mathbf{e}')^{\cdot}\,.$$

С учетом этого равенства проекция уравнения (23) на орт $\mathbf{e}'$ дает

$$(\boldsymbol{\omega}_* \cdot \mathbf{e}')^{\cdot} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\omega}_* \cdot \mathbf{e}' = a_* = \mathrm{const}. \tag{25}$$

Иными словами, проекция угловой скорости на вращающуюся ось симметрии остается неизменной и находится по начальным условиям (24). Интеграл (25) принято называть интегралом Лагранжа.

Введем обозначение $\mathbf{Q}(\varphi\mathbf{n})$ для поворота на угол φ вокруг единичного вектора $\mathbf{n}$. Для него справедлива теорема Эйлера

$$\mathbf{Q}(\varphi\mathbf{n}) \equiv (1 - \cos\varphi)\mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \cos\varphi\mathbf{E} + \sin\varphi\mathbf{n} \times \mathbf{E}. \tag{26}$$

Ниже будет широко использоваться теорема об угловой скорости композиции поворотов [3, 4]

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_2 \cdot \mathbf{Q}_1 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_2 + \mathbf{Q}_2 \cdot \boldsymbol{\omega}_1, \tag{27}$$

где угловые скорости $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\omega}_1$, $\boldsymbol{\omega}_2$ отвечают тензорам поворота $\mathbf{Q}$, $\mathbf{Q}_1$, $\mathbf{Q}_2$ соответственно. Сделаем замену переменных

$$\begin{aligned}&\mathbf{P}_* = \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}(-\eta a_* t\mathbf{e}) \quad \Rightarrow \\ &\qquad \Rightarrow \boldsymbol{\omega}_* = \boldsymbol{\omega} - \eta a_* \mathbf{P} \cdot \mathbf{e} = \boldsymbol{\omega} - \eta a_* \mathbf{e}', \quad \mathbf{e}' = \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}(-\eta a_* t\mathbf{e}) \cdot \mathbf{e} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{e}.\end{aligned} \tag{28}$$

Подставляя выражение (28) в уравнение (23) и присоединяя к результату уравнение Пуассона, приходим к следующей системе

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \nu\, \mathbf{k} \times \mathbf{e}', \quad \dot{\mathbf{P}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{P}, \quad \mathbf{e}' = \mathbf{P} \cdot \mathbf{e}. \tag{29}$$

К системе (29) необходимо добавить начальные условия

$$t = 0: \quad \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_0, \quad \mathbf{P} = \mathbf{E} \qquad (\boldsymbol{\omega}_0 \equiv \boldsymbol{\omega}_*^0 + \eta\, a_*\, \mathbf{e}). \tag{30}$$

Задача (29) – (30) немного проще исходной, поскольку ее решение зависит от четырех параметров: скаляра ν и вектора $\boldsymbol{\omega}_0$. Именно эта задача будет анализироваться ниже. В литературе приводится решение задачи (29) – (30), точнее говоря ее исходной постановки, на основе представления тензора поворота через углы Эйлера [3, 4]

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q}(\psi\, \mathbf{k}) \cdot \mathbf{Q}(\vartheta\, \mathbf{p}) \cdot \mathbf{Q}(\varphi\, \mathbf{k}), \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{p} = 0, \quad |\mathbf{p}| = 1. \tag{31}$$

Другие представления в известной автору литературе не использовались. Более того, в литературе не дается никаких обоснований в пользу использования именно углов Эйлера. В следующем пункте будет использовано другое представление тензора поворота, которое диктуется самим решением задачи, а не принимается заранее. Получаемое при этом решение значительно проще поддается наглядной интерпретации, нежели при использовании углов Эйлера.

3 Формальное решение задачи Лагранжа

Формальное решение рассматриваемой задачи (29) – (30) опирается на факт существования трех очевидных первых интегралов. Они даются выражениями

$$\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}' = a \equiv \boldsymbol{\omega}_0 \cdot \mathbf{e}, \quad \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{k} = b \equiv \boldsymbol{\omega}_0 \cdot \mathbf{k}, \quad \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega} + \nu\, \mathbf{k} \cdot \mathbf{e}' = H, \tag{32}$$

где величины a, b, H суть постоянные, определяемые по начальным условиям. Первый интеграл в системе (32) есть проекция уравнения (29) на орт $\mathbf{e}'$ и называется [7] интегралом Лагранжа. Второй интеграл в системе (32) есть проекция уравнения (29) на орт $\mathbf{k}$ и называется интегралом площадей. Наконец, последний интеграл в системе (32) есть интеграл энергии. Осталось выписать проекцию уравнения (29) на орт $\mathbf{k} \times \mathbf{e}'/|\mathbf{k} \times \mathbf{e}'|$. После несложных преобразований, учитывающих интегралы (32), указанная проекция записывается в виде

$$\ddot{x} + \omega^2 x - \nu x^2 + \nu - ab = 0, \qquad x = \cos\gamma = \mathbf{k} \cdot \mathbf{e}'. \tag{33}$$

После исключения квадрата модуля угловой скорости с помощью интеграла энергии уравнение (33) можно записать в другой форме

$$\ddot{x} + 2H x - 3\nu x^2 + \nu - ab = 0, \qquad x = \cos\gamma = \mathbf{k} \cdot \mathbf{e}'. \tag{34}$$

С формальной точки зрения решение уравнения (34) легко строится в эллиптических функциях и здесь не приводится. Будем считать, что функция $x(t)$ известна. Задача состоит в том, чтобы через нее выразить все остальные неизвестные. Интегралы (32) дают проекции угловой скорости на орты $\mathbf{e}'$ и $\mathbf{k}$. Вычислим скалярное произведение

$$\boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{e}') = -\mathbf{k} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}') = -\mathbf{k} \cdot \dot{\mathbf{e}}' = -\dot{x}\,. \tag{35}$$

Примем векторы

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{k}, \quad \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}', \quad \mathbf{e}_3 = \mathbf{k} \times \mathbf{e}'$$

в качестве базиса. Тогда векторы взаимного базиса вычисляются по формулам

$$\mathbf{e}^1 = \frac{\mathbf{k} - x\mathbf{e}'}{1 - x^2}, \quad \mathbf{e}^2 = \frac{\mathbf{e}' - x\mathbf{k}}{1 - x^2}, \quad \mathbf{e}^3 = \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{e}'}{1 - x^2}.$$

Теперь для вектора угловой скорости имеем выражение

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{b - ax}{1 - x^2}\, \mathbf{k} - \frac{\dot{x}}{1 - x^2}\, \mathbf{k} \times \mathbf{e}' + \frac{a - bx}{1 - x^2}\, \mathbf{e}', \quad \mathbf{e}' \equiv \mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{e}. \tag{36}$$

Выражение (36) еще не дает полного представления об угловой скорости, поскольку содержит неопределенный вектор $\mathbf{e}'$, зависящий от тензора поворота. Подчеркнем, что в использованных выше построениях конкретное представление для тензора поворота не имело значения. Поэтому можно, в принципе, использовать любое представление для тензора поворота. Однако выражение (36) дает ясное представление о том, какая должна быть структура тензора поворота. А именно, угловая скорость (36) отвечает тензору поворота вида

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{Q}(\psi\mathbf{k}) \cdot \mathbf{Q}(\vartheta\mathbf{p}) \cdot \mathbf{Q}(\varphi\mathbf{e}), \quad \mathbf{p} = \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{e}}{|\mathbf{k} \times \mathbf{e}|} = \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{e}}{\sin\gamma_0}, \quad \cos\gamma_0 = \mathbf{k} \cdot \mathbf{e}, \tag{37}$$

где углы ψ, ϑ, φ будем называть углами прецессии, нутации и собственного вращения соответственно. Если векторы $\mathbf{k}$ и $\mathbf{e}$ совпадают, то в качестве вектора $\mathbf{p}$ можно выбрать произвольный единичный вектор, ортогональный вектору $\mathbf{k}$. Нетрудно установить связь между углом γ и углом нутации ϑ. Действительно

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}' = \cos\gamma = \mathbf{k} \cdot \mathbf{Q}(\vartheta\mathbf{p}) \cdot \mathbf{e} = \cos(\gamma_0 + \vartheta) \quad \Rightarrow \quad \gamma = \gamma_0 + \vartheta. \tag{38}$$

Кроме того, нетрудно убедиться, что справедливо равенство

$$\mathbf{k} \times \mathbf{e}' = \sin(\gamma_0 + \vartheta)\mathbf{Q}(\psi\mathbf{k}) \cdot \mathbf{p}. \tag{39}$$

С учетом равенств (38) и (39) выражение для угловой скорости (36) можно переписать в виде

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{b - ax}{1 - x^2}\,\mathbf{k} - \frac{\dot{x}\sin\gamma}{1 - x^2}\,\mathbf{Q}(\psi\mathbf{k}) \cdot \mathbf{p} + \frac{a - bx}{1 - x^2}\,\mathbf{e}'. \tag{40}$$

С другой стороны, угловую скорость можно вычислить по тензору поворота (37) с учетом теоремы (27)

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\psi}\,\mathbf{k} + \dot{\vartheta}\,\mathbf{Q}(\psi\mathbf{k}) \cdot \mathbf{p} + \dot{\varphi}\,\mathbf{e}'. \tag{41}$$

Из сравнения выражений (40) и (41) получаем уравнения для определения углов прецессии и собственного вращения

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{b - a\cos\gamma}{\sin^2\gamma}, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{a - b\cos\gamma}{\sin^2\gamma} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\,(\psi + \varphi)}{dt} = \frac{a + b}{1 + \cos\gamma}. \tag{42}$$

Что касается равенства

$$\dot{\vartheta} = -\frac{\dot{x}\sin\gamma}{1 - x^2} = \dot{\gamma},$$

то оно выполняется тождественно в силу (38).

Таким образом, если решение уравнения (34) найдено, то углы прецессии и собственного вращения находятся квадратурами (42). Разумеется, к уравнению (34) необходимо присоединить начальные условия

$$t = 0: \quad x(0) = \cos\gamma_0, \quad \dot{x}(0) = -\,\boldsymbol{\omega}_0 \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{e}) \equiv -\,c. \tag{43}$$

Последнее условие немедленно следует из равенства (40), если его записать при $t = 0$. Не уменьшая общности можно считать, что $c = 0$. Это означает, что отсчетное положение тела выбрано так, что начальная угловая скорость лежит в плоскости, натянутой на векторы $\mathbf{k}$ и $\mathbf{e}$.

С формально-математической точки зрения задача полностью решена в том смысле, что она сведена к квадратурам. Однако приемлемость полученного решения с физической точки зрения еще предстоит выяснить.

4 Регулярная прецессия

Случай регулярной прецессии традиционно вызывает интерес, поскольку это наиболее простой и наглядный вид движения твердого тела. Регулярной прецессией называют движение тела, при котором некая материальная прямая, т.е. прямая, составленная из одних и тех же точек тела, вращается вокруг заданного в пространстве и неизменного во времени вектора $\mathbf{k}$ так, что угол между указанной материальной прямой и вектором $\mathbf{k}$ постоянен во времени. В случае Лагранжа в качестве материальной прямой выбираем ось тела вращения, а в качестве вектора $\mathbf{k}$ выбираем орт вертикали. При регулярной прецессии угол между ними сохраняется неизменным

$$x = \mathbf{k} \cdot \mathbf{e}' = \mathbf{k} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{e} = const \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P} = \mathbf{Q}(\psi \mathbf{k}) \cdot \mathbf{Q}(\varphi \mathbf{e}), \quad \mathbf{e}' = \mathbf{Q}(\psi \mathbf{k}) \cdot \mathbf{e}.$$

Для угловой скорости отсюда следует выражение

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{Q}(\psi \mathbf{k}) \cdot \left(\dot{\psi} \mathbf{k} + \dot{\varphi} \mathbf{e} \right) \quad \Rightarrow \quad \dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{Q}(\psi \mathbf{k}) \cdot \left(\ddot{\psi} \ \mathbf{k} + \ddot{\varphi} \ \mathbf{e} + \dot{\psi} \dot{\varphi} \mathbf{k} \times \mathbf{e} \right).$$

В этом случае уравнение (29) принимает совсем простой вид

$$\ddot{\psi} \ \mathbf{k} + \ddot{\varphi} \ \mathbf{e} + \dot{\psi} \dot{\varphi} \mathbf{k} \times \mathbf{e} = \nu \mathbf{k} \times \mathbf{e} \quad \Rightarrow \quad \dot{\psi} = \dot{\psi}_0, \quad \dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0, \quad \dot{\varphi}_0 \dot{\psi}_0 = \nu. \tag{44}$$

Последнее из этих условий налагает ограничение на начальную скорость, которая должна иметь вид

$$\boldsymbol{\omega}_0 = \dot{\psi}_0 \mathbf{k} + \dot{\varphi}_0 \mathbf{e} = \dot{\varphi}_0 \left(\mathbf{e} + \frac{\nu}{\dot{\varphi}_0^2} \mathbf{k} \right).$$

При этом угловая скорость также прецессирует вокруг орта вертикали

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{Q}(\psi \mathbf{k}) \cdot \boldsymbol{\omega}_0.$$

На первый взгляд кажется, что полученное решение справедливо при произвольном значении угла между осью тела и вертикалью. Однако это не так. Действительно, по формулам (42) и (44) имеем

$$\frac{(b - a\cos\gamma)}{\sin^2\gamma} \frac{(a - b\cos\gamma)}{\sin^2\gamma} = \nu. \tag{45}$$

Анализ этого уравнения пока отложу.

5 Обсуждение формального решения

5.1 Общие замечания

Сомнения в физической приемлемости полученного решения связаны со следующим фактом. Известно [3, 4], что один и тот же тензор поворота допускает несчетное множество различных представлений. Каждому из этих представлений отвечает единственный набор трех параметров типа углов ψ, ϑ, φ, использованных выше. Если для всех начальных данных используется одно и то же представление тензора поворота, то это означает, что вся область начальных данных покрыта одной координатной картой. В принципе это возможно, но обычно, даже в простейших случаях такая карта будет иметь полюса, т.е. полученное решение будет содержать в себе либо неопределенности типа $0/0$[2], либо приводят к разрывным решениям. Кстати, есть примеры, в которых, например, углы Эйлера выражаются функциями времени, имеющими разрывы первого рода, т.е. скачки, хотя все наблюдаемые величины, например, угловые скорости оказываются непрерывными функциями времени. В качестве иллюстрации сказанного сошлемся на работу [4], в которой для случая Эйлера показано, что вся область начальных данных разбивается на две подобласти, каждую из которых нужно покрывать своей картой. Только в этом случае получаются решения, пригодные для практического использования. В приводимом в литературе решении для случая Эйлера используется одна карта. В результате, при компьютерных расчетах по приводимым в книгах формулам получаются совершенно неправильные результаты. Задача (29) – (30) внешне выглядит чрезвычайно простой. Тем не менее, движения, совершаемые телом в этом случае, могут существенно различаться по своему типу. Поэтому кажется мало вероятным, чтобы единственное представление тензора поворота (37) было бы удовлетворительным при всех начальных данных.

Тензор поворота часто удобно представлять в виде композиции поворотов вокруг неких фиксированных осей, которые, в принципе, выбираются произвольно [3, 4]. Выбор осей поворота определяет систему параметров (систему координат), через которые выражается изучаемый поворот тела. Однако далеко не при всяком выборе осей поворота вводимая система координат оказывается целесообразной. Важность правильного выбора осей поворота покажем на простейшем примере. Рассмотрим поворот вокруг фиксированной оси $\mathbf{n}$, т.е. тензор поворота $\mathbf{Q}(\alpha\,\mathbf{n})$. Попытаемся представить этот поворот через углы Эйлера

$$\mathbf{Q}(\alpha\,\mathbf{n}) = \mathbf{Q}(\psi\,\mathbf{m})\cdot\mathbf{Q}(\vartheta\,\mathbf{e})\cdot\mathbf{Q}(\varphi\,\mathbf{m}), \quad \mathbf{m}\cdot\mathbf{e} = 0,$$

где единичные ортогональные между собой векторы $\mathbf{m}$ и $\mathbf{e}$ могут выбираться произвольно. Воспользовавшись теоремой Эйлера (26), нетрудно получить нелинейную систему, позволяющую, в принципе, выразить параметры ψ, ϑ, φ через параметр α. Но проще для этой цели использовать равенство угловых скоростей

$$\dot\alpha\,\mathbf{n} = \dot\psi\,\mathbf{m} + \dot\vartheta\,\mathbf{Q}(\psi\,\mathbf{m})\cdot\mathbf{e} + \dot\varphi\mathbf{Q}(\psi\,\mathbf{m})\cdot\mathbf{Q}(\vartheta\,\mathbf{e})\cdot\mathbf{m}.$$

В скалярной форме эта система имеет вид

$$\dot\sigma + \dot\varphi\cos\vartheta = \cos\beta_1\,\dot\alpha, \quad \dot\vartheta = (\cos\beta_2\cos\psi + \cos\beta_3\sin\psi)\,\dot\alpha,$$
$$\dot\varphi\sin\vartheta = (\sin\psi\cos\beta_2 - \cos\psi\cos\beta_3)\,\dot\alpha, \quad (46)$$

где

$$\mathbf{n} = \cos\beta_1\mathbf{m} + \cos\beta_2\mathbf{e} + \cos\beta_3\mathbf{m}\times\mathbf{e}, \quad \cos^2\beta_1 + \cos^2\beta_2 + \cos^2\beta_3 = 1.$$

[2]Эти неопределенности делают невозможным использование полученных формул для компьютерных вычислений.

Систему (46) можно переписать в более компактной форме ($\sigma \equiv \psi - \gamma$)

$$\dot{\sigma} + \dot{\varphi}\cos\vartheta = \cos\beta_1\,\dot{\alpha}, \quad \dot{\vartheta} = \sin\beta_1\cos\sigma\,\dot{\alpha}, \quad \dot{\varphi}\sin\vartheta = \sin\beta_1\sin\sigma\,\dot{\alpha}, \tag{47}$$

где

$$\cos\gamma = \frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_1}, \quad \sin\gamma = \frac{\cos\beta_3}{\sin\beta_1}, \quad \text{если } \beta_1 \neq 0; \qquad \gamma = 0, \quad \text{если } \beta_1 = 0.$$

Систему (47), в свою очередь, можно переписать в другом виде

$$\frac{d\sigma}{d\alpha} + \frac{d\varphi}{d\alpha}\cos\vartheta = \cos\beta_1, \quad \frac{d\vartheta}{d\alpha} = \sin\beta_1\cos\sigma, \quad \frac{d\varphi}{d\alpha}\sin\vartheta = \sin\beta_1\sin\sigma. \tag{48}$$

В такой записи хорошо видно, что все искомые переменные являются функциями угла α и постоянных β_1, β_2, β_3. Системы (47) или (48) достаточно сложны для решения, но эта сложность отнюдь не связана с характером движения, а обусловлена исключительно выбором представления тензора поворота. Разумеется, в рассматриваемом случае никаких проблем не возникает, если изначально принять, что $\mathbf{m} = \mathbf{n}$, т.е. распорядиться возможностью выбирать углы β_1, β_2, β_3. Например, можно принять $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = \pi/2$, $\beta_3 = \pi/2$. В таком случае система (48) решается элементарно. В реальных задачах, ситуация сложнее. Всякая задача зависит от набора параметров, включая начальные данные. Всю область параметров можно разбить на подобласти. В каждой из этих подобластей нужно искать собственное представление для тензора поворота. Именно это и сделано в работе [4] в случае Эйлера. В полученном выше формальном решении этого не сделано, и вся область параметров покрыта одной картой. Поэтому, в общем случае, полученное формальное решение может оказаться неудобным для практического применения. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим частные случаи задачи Лагранжа.

5.2 Плоские движения — физический маятник

Рассмотрим частный случай начальных данных

$$a = \boldsymbol{\omega}_0 \cdot \mathbf{e} = 0, \quad b = \boldsymbol{\omega}_0 \cdot \mathbf{k} = 0. \tag{49}$$

В таком случае, согласно (42), углы прецессии и собственного вращения обращаются в нулевые. При этом тело поворачивается вокруг фиксированной оси, натянутой на вектор $\mathbf{k} \times \mathbf{e}$. Иными словами, мы имеем дело с физическим маятником. Посмотрим, во что превращается в этом случае формальное решение. Имеем

$$x = \cos\gamma \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = -\sin\gamma\dot{\gamma} \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} = -\sin\gamma\,\ddot{\gamma} - \sin^2\gamma\,\dot{\gamma}^2.$$

Кроме того, согласно (40) имеем, что $\omega^2 = \dot{\gamma}^2$. Подставляя эти выражение в уравнение (33), получаем уравнение физического маятника

$$\ddot{\gamma} - \nu\sin\gamma = 0. \tag{50}$$

Стандартный вид уравнения физического маятника получается с помощью замены $\gamma = \pi + \vartheta$. Уравнение (50), как известно, упростить нельзя. Таким образом, представление тензора поворота в виде (37) в рассматриваемом случае оказывается наилучшим. Надо полагать, что оно будет оставаться приемлемым и в случае малых значений величин a, b. Видимо, представление (37) является удовлетворительным в случае, когда $b \neq 0$ и не мало, но $a = 0$ или близко к нулю: $|a| << |b|$. В последнем случае ось тела прецессирует вокруг вектора $\mathbf{k}$, причем скорость прецессии знакопостоянна: $\operatorname{sign} \dot\psi = \operatorname{sign} b$.

5.3 Свободные вращения

В предыдущем случае главную роль играло поле тяготения. Теперь рассмотрим другую крайность: пусть поле тяготения отсутствует, т.е. $\nu = 0$. В таком случае задача (29) – (30) имеет совсем простое решение

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_0 = \omega_0 \mathbf{m} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P}(t) = \mathbf{Q}(\omega_0 t\, \mathbf{m}), \quad |\mathbf{m}| = 1. \tag{51}$$

В этом случае тело совершает повороты вокруг фиксированной оси, натянутой на вектор $\boldsymbol{\omega}_0$, причем ось тела прецессирует вокруг вектора $\boldsymbol{\omega}_0$:

$$\mathbf{e}' = (1 - \cos\omega_0 t)\cos\alpha\, \mathbf{m} + \cos\omega_0 t\, \mathbf{e} + \sin\omega_0 t\, \mathbf{m} \times \mathbf{e}, \quad \mathbf{e}\cdot\mathbf{m} = \cos\alpha$$

с постоянной скоростью ω_0. Качественное рассмотрение этого частного случая задачи Лагранжа на основе углов Эйлера подробно обсуждается в книге [8]. Выясним насколько хорошо этот случай описывается формальным решением, построенным выше. При $\nu = 0$ интеграл энергии (32) показывает, что угловая скорость постоянна по модулю, а уравнение (33) и начальные условия (43) принимают вид

$$\ddot{x} + \omega^2 x = ab; \qquad x(0) = \cos\gamma_0, \quad \dot{x}(0) = -c. \tag{52}$$

Уравнения (52) и (43) легко интегрируются в элементарных функциях. Для иллюстрации рассмотрим конкретные начальные условия

$$a = \boldsymbol{\omega}_0 \cdot \mathbf{e} = \omega_0 \cos\alpha, \quad b = \boldsymbol{\omega}_0 \cdot \mathbf{k} = \omega_0 \cos(\alpha + \gamma_0), \quad c = \boldsymbol{\omega}_0 \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{e}) = 0, \tag{53}$$

где $\mathbf{m}\cdot\mathbf{e} \equiv \cos\alpha$. Решение задачи (52) – (53) имеет вид

$$x = \cos\alpha\cos(\alpha + \gamma_0) + \sin\alpha\sin(\alpha + \gamma_0)\cos\omega_0 t. \tag{54}$$

Не составляет большого труда по формулам (42) и (54) вычислить углы прецессии и собственного вращения, но далее для наглядности будем считать, что угол α мал, т.е. начальная угловая скорость почти совпадает с начальным направлением оси симметрии. В этом случае выражение (54) можно упростить, отбрасывая слагаемые порядка $O(\alpha^2)$

$$x = \cos\gamma_0 - \alpha\sin\gamma_0\,(1 - \cos\omega_0 t) \quad \Rightarrow \quad \vartheta = \alpha\,(1 - \cos\omega_0 t)\,. \tag{55}$$

Здесь использованы формулы (38), т.е. угол нутации есть величина первого порядка малости. Выражения (42) также упрощаются и принимают вид

$$\dot{\psi} = -\frac{\alpha\omega_0 \cos\omega_0 t}{\sin\gamma_0},\ \dot{\varphi} = \omega_0 \left[1 + \frac{\alpha\cos\omega_0 t}{\operatorname{tg}\gamma_0}\right] \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad \psi = -\alpha\frac{\sin\omega_0 t}{\sin\gamma_0},\ \varphi = \omega_0\, t + \frac{\alpha\sin\omega_0 t}{\operatorname{tg}\gamma_0}. \quad (56)$$

Итак, в рассматриваемом случае ось симметрии совершает регулярную прецессию вокруг вектора $\mathbf{m}$. Именно это простейшее движение и описывают относительно сложные формулы (54) – (56). Сами по себе эти формулы не имеют никакого смысла, если не помнить о представлении тензора поворота (37), т.е. об осях, вокруг которых происходит вращение. Конечно, формулы (37) и (54) – (56) позволяют увидеть истинное движение тела, но представление (53) несравнимо проще для восприятия. Если бы использовались углы Эйлера, то описание движения оказалось бы еще сложнее, чем приведенное выше.

Список литературы

[1] Маркеев А.П. Теоретическая механика. М.: Наука, 1990. 414с.

[2] Магнус К. Гироскоп. Теория и применение М.: Мир, 1974. 525с.

[3] Жилин П.А. Векторы и тензоры второго ранга в трехмерном пространстве. С.-Петербург, Нестор, 2001. 276стр.

[4] Zhilin P.A. A New Approach to the Analysis of Free Rotations of Rigid Bodies/ ZAMM· 76 (1996) 4. P.187 – 204.

[5] В.Д. Мак-Миллан. Динамика твердого тела. М.: ИЛ, 1951. 467с.

[6] Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512с.

[7] Четаев Н.Г. Теоретическая механика. М.: Наука, 1987. 367с.

[8] Арнольд В.И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1979. 431с.