

ДИНАМИКА ГИРОСТАТА НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

П.А.Жилин

Россия, 199178, Санкт-Петербург, В.О., Большой проспект, д. 61,
Институт проблем машиноведения РАН,
e-mail: zhilin@euler.ipme.ru

С.А.Сорокин

Россия, 195251, Санкт-Петербург, ул. Политехническая, д. 29,
С.-Петербургский государственный технический университет,
кафедра Механики и процессов управления

Аннотация.

В работе впервые дается математическая постановка задачи о двухроторном гиростате на упругом основании. Вводятся все необходимые для этого понятия: тензор поворота, вектор поворота, левая и правая угловые скорости, тензор-интегратор (т.е. тензорный интегрирующий множитель, переводящий линейную дифференциальную форму угловой скорости в дифференциал вектора поворота), потенциальный момент и др. Упругое основание определяется заданием энергии деформации в виде скалярной функции вектора поворота. В конечном счете задача сводится к интегрированию системы нелинейных дифференциальных уравнений, имеющих простую структуру, но достаточно сложную нелинейность. Отличие этих уравнений от традиционно используемых в динамике твердого тела в том, что при их написании не требуется вводить искусственных параметров типа углов Эйлера или параметров Кэли-Гамильтона. Если необходимо, то указанные параметры могут быть найдены после решения задачи по найденному вектору поворота. Рассмотрены решения конкретных задач. При этом на примере частного случая описан новый метод интегрирования основных уравнений. Решение получено в квадратурах для изотропного нелинейного упругого основания.

⁰Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ, грант 96-01-00391; проект "Интеграция", Рег. N 589)

1 Введение

Хорошо известна роль, которую играют в механике и физике разного рода модели. В ньютоновской механике, т.е. в механике систем материальных точек, наиболее фундаментальной принято считать модель нелинейного осциллятора или точечной массы на нелинейно упругой пружине общего вида. В практическом плане огромное число полезных результатов можно получить на основе простейшей модели линейного осциллятора. Вместе с тем развитие механики и физики в XX веке со всей очевидностью показало, что существующих модельных представлений недостаточно для адекватного описания целого ряда явлений. Уже в начале этого века высказывались суждения о необходимости построения модели многоспиновой частицы. Частицы такого рода вводились в квантовой механике, но это сопровождалось принятием допущений, которые трудно примирить с классическими представлениями. За прошедшее столетие в механике также произошли существенные изменения. Прежде всего, эти изменения связаны с переходом на постулаты эйлеровой механики. В последней место материальной точки ньютоновской механики заняло абсолютно твердое тело — точка, т.е. односпиновая частица. Существенно, что наряду с трансляционными движениями в эйлеровой механике на паритетных началах введены в рассмотрение спинорные движения, описывающие вращения точечных частиц. Спинорные движения устраняют одно из главных противоречий квантовой механики, в которой частицы обладают спином, но движения, порождающие спины, отсутствуют. Для многих целей модель односпиновой частицы оказывается уже недостаточной и приходится вводить в рассмотрение многоспиновые частицы. Простейшим примером последней является гироскат, т.е. твердое тело с встроенными в него роторами, обладающими независимыми скоростями вращения. При вращении роторов вокруг собственных осей распределение масс в теле не меняется — это и есть главный признак, в соответствии с которым рассматриваемая конструкция называется гироскатом. В технике применяются гироскаты, которые закреплены на разного рода упругих основаниях. Гироскат на упругом основании может быть назван твердотельным осциллятором. Последний является фундаментальной моделью в динамике многоспиновых частиц — науке, возникшей совсем недавно и развиваемой в С.-Петербургском государственном техническом университете и ИПМаш РАН. В настоящее время еще трудно судить о том, насколько полезной для механики и физики окажется модель многоспинового твердотельного осциллятора. Однако тот факт, что именно эта модель постоянно возникает в умах многих ученых на протяжении уже целого столетия, указывает на необходимость ее детального изучения. В этой связи возникает вопрос: "Если модель твердотельного осциллятора столь важна, то почему она до сих пор фактически не представлена в ясной математической форме в научных публикациях?" Ответ, вероятно, будет очевиден только тем, кто хорошо знаком с динамикой твердого тела. Этот раздел принято считать одним из наиболее сложных в механике. В качестве иллюстрации возьмем такой пример. Сначала рассмотрим простейшую задачу ньютоновской механики: в инерциальной системе отсчета дана материальная точка и указано ее положение и скорость в начальный момент времени $t = 0$, требуется ука-

зять ее движение при $t > 0$ и отсутствии внешних сил. Только очень нерадивые школьники не знают решения этой задачи. Теперь рассмотрим простейшую задачу эйлеровой механики (динамики многоспиновых частиц): в инерциальной системе отсчета дано абсолютно твердое тело с произвольным тензором инерции, центр масс покоится; при $t = 0$ заданы его положение и угловая скорость, а требуется указать как будет поворачиваться тело при $t > 0$ в отсутствии внешних полей. Только очень немногие специалисты смогут правильно ответить на этот простейший (!) вопрос без предварительного анализа сложных эллиптических интегралов. Между прочим, этот вопрос часто не по силам даже мощным компьютерам, если пользоваться приводимыми в учебниках выражениями. Проблема здесь вовсе не в сложности построения точных решений нелинейных уравнений. Например, для нелинейного уравнения Дуффинга с трением нельзя построить точного решения, но качественное поведение осциллятора Дуффинга с трением легко представит себе даже хороший студент, не говоря уже о специалистах, и при том без всякого интегрирования. Повороты твердого тела, в противоположность указанному случаю, воспринимаются нашей интуицией с большим трудом и только после специальной тренировки. Например, у многих студентов (людей с неиспорченной интуицией) вызывает немалое изумление тот факт, что в случае знаменитой регулярной прецессии ось вращения тела и ось поворота тела ортогональны между собой. В классической динамике твердого тела роль поворотов относительно невелика, главную роль играют вращения, т.е. угловые скорости. При рассмотрении твердотельного осциллятора на первый план выдвигаются именно повороты, поскольку внешние поля (в частности упругое основание) реагируют как правило на повороты, а не угловые скорости. Именно недостаточно эффективное описание поворотов в классической динамике твердого тела породило ряд специфических проблем. Продолжим сравнение ньютоновской механики с динамикой Эйлера. Всем хорошо известно, что такое потенциальная сила. Аналогичный вопрос из эйлеровой динамики: как определить общий вид потенциального момента? Найти ответ в литературе не удалось. Но без ответа на этот вопрос об общей постановке задачи о твердотельном осцилляторе и нечего и думать. Из уже сказанного, видимо, ясно, что отсутствие модели твердотельного осциллятора в литературе отнюдь не является простым упущением. Речь идет о достаточно серьезных изменениях или, лучше сказать, дополнениях, которые совершенно необходимы при построении динамики многоспиновых частиц. Именно этому и посвящена данная работа. Математики, специалисты по нелинейным дифференциальным уравнениям найдут в ней весьма интересные и необычные по форме уравнения, анализ которых еще впереди. В качестве обзора в работе приведен довольно обширный список литературы, где рассматриваются обсуждаемые или близкие к ним вопросы.

2 Уравнения движения двухроторного гиростата на нелинейно упругом основании

2.1 Тензоры второго ранга и тензор поворота в трехмерном пространстве

В данной работе используется диадное представление тензоров второго ранга, основные сведения о которых можно найти в книгах М. Лагалли [87], А. И. Лурье [91, 92], П. А. Жилина и др. [29, 30, 31, 152]. Здесь они воспроизводятся для облегчения чтения работы людьми, не использующими этих представлений в своих работах.

Диадой называется упорядоченная пара векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} , воспринимаемая как единый объект и обозначаемая символами $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ или \mathbf{ab} . Тензором второго ранга \mathbf{A} называется совокупность конечного числа диад

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^N \mathbf{a}_i \otimes \mathbf{b}_i$$

Любой тензор второго ранга в трехмерном пространстве может быть представлен в виде совокупности не более чем трех диад. Транспонированным тензором называется тензор

$$\mathbf{A}^T = \left(\sum_{i=1}^N \mathbf{a}_i \otimes \mathbf{b}_i \right)^T = \sum_{i=1}^N \mathbf{b}_i \otimes \mathbf{a}_i$$

Пусть дан вектор \mathbf{c} и тензор \mathbf{A} . Скалярным умножением \mathbf{A} на \mathbf{c} справа называется вектор \mathbf{d} , полученный по правилу

$$\mathbf{d} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{c} = \left(\sum_{i=1}^N \mathbf{a}_i \otimes \mathbf{b}_i \right) \cdot \mathbf{c} = \sum_{i=1}^N (\mathbf{b}_i \cdot \mathbf{c}) \mathbf{a}_i$$

Аналогично вводится операция умножения тензора \mathbf{A} на вектор \mathbf{c} слева. Результатом будет вектор \mathbf{e}

$$\mathbf{e} = \mathbf{c} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{c} \cdot \left(\sum_{i=1}^N \mathbf{a}_i \otimes \mathbf{b}_i \right) = \sum_{i=1}^N (\mathbf{c} \cdot \mathbf{a}_i) \mathbf{b}_i \equiv \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{c}$$

Если $\mathbf{A} \neq \mathbf{A}^T$, то векторы \mathbf{d} и \mathbf{e} различаются между собой. Для симметричных тензоров $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$ имеем

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{c} \cdot \mathbf{A}^T = \mathbf{c} \cdot \mathbf{A}$$

Симметричный тензор второго ранга называется неотрицательно определенным, если для любого вектора $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$ выполняется неравенство

$$\mathbf{c} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{c} \geq 0 \quad \forall \mathbf{c}: \mathbf{c} \neq \mathbf{0}$$

Если это неравенство является строгим, то тензор $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$ называется положительно определенным. Напомним теорему о спектральном разложении тензора второго ранга: любой симметричный тензор второго ранга \mathbf{A} представим в виде

$$\mathbf{A} = A_1 \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + A_2 \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + A_3 \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3 \quad (2.1.1)$$

где числа A_i называются главными значениями тензора \mathbf{A} , а единичные векторы \mathbf{e}_i называются собственными векторами \mathbf{A} и определяют главные оси тензора \mathbf{A} , векторы \mathbf{e}_i образуют ортонормированную тройку векторов и определяются однозначно (с точностью до замены $\mathbf{e}_i \rightarrow -\mathbf{e}_i$), если все числа A_i различны. Если два собственных числа совпадают, например $A_2 = A_3$, то тензор \mathbf{A} называется трансверсально изотропным с осью изотропии \mathbf{e}_1 и допускает представление

$$\mathbf{A} = A_1 \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + A_2 (\mathbf{E} - \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1) \quad (2.1.2)$$

где вектор \mathbf{e}_1 определяется однозначно (с точностью до замены $\mathbf{e}_1 \rightarrow -\mathbf{e}_1$), а \mathbf{E} — единичный тензор. Если все три главных значения совпадают, то тензор \mathbf{A} называется шаровым и имеет вид

$$\mathbf{A} = A \mathbf{E}$$

Тензор второго ранга \mathbf{Q} называется ортогональным, если он удовлетворяет уравнению

$$\mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{E} \implies \det \mathbf{Q} = \pm 1$$

Ортогональный тензор \mathbf{Q} с определителем равным $+1$ называется собственно ортогональным тензором или тензором поворота.

Напомним теорему Эйлера:

Любой тензор поворота $\mathbf{P} \neq \mathbf{E}$ однозначно представлен в виде

$$\mathbf{P} = (1 - \cos \theta) \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + \cos \theta \mathbf{E} + \sin \theta \mathbf{m} \times \mathbf{E}, \quad (2.1.3)$$

где единичный вектор \mathbf{m} является неподвижным вектором тензора \mathbf{P} :

$\mathbf{P} \cdot \mathbf{m} = \mathbf{m} \cdot \mathbf{P} = \mathbf{m}$, а скаляр θ называется углом поворота.

Справедливы равенства

$$1 + 2 \cos \theta = \text{tr} \mathbf{P} \quad -2 \sin \theta \mathbf{m} = \mathbf{P}_\times, \quad (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})_\times = \mathbf{a} \times \mathbf{b} \quad (2.1.4)$$

Смысл тензора поворота легче всего воспринимается, если рассматривать действие тензора поворота на произвольный вектор \mathbf{c}

$$\mathbf{c}' = \mathbf{P} \cdot \mathbf{c}$$

Вектор \mathbf{c}' есть вектор \mathbf{c} , повернутый вокруг оси, натянутой на неподвижный вектор \mathbf{m} тензора \mathbf{P} , на угол θ . Если $\theta > 0$, то поворот происходит вокруг \mathbf{m} против движения часовой стрелки. Обратим внимание на то, что угол θ равен углу между проекциями векторов \mathbf{c}' и \mathbf{c} на плоскость, ортогональную \mathbf{m} , но не углу между самими векторами \mathbf{c}' и \mathbf{c} .

Введем в рассмотрение вектор поворота. Существует несколько объектов, называемых в литературе вектором поворота. Здесь мы будем следовать работам [44, 45] и в качестве вектора поворота будем использовать вектор, с которым

тензор поворота связан наиболее простым и естественным образом. Вектором поворота назовем вектор $\boldsymbol{\theta} = \theta \mathbf{m}$. Представление (2.1.5) перепишем в виде

$$\mathbf{P} = \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} \boldsymbol{\theta} \otimes \boldsymbol{\theta} + \cos \theta \mathbf{E} + \frac{\sin \theta}{\theta} \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{E}$$

Введем в рассмотрение логарифмический тензор поворота \mathbf{R} [45]

$$\mathbf{R} = \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{E} \quad \mathbf{R}^2 = \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{E} \times \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta} \otimes \boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\theta} \mathbf{E}$$

Тогда предыдущее выражение перепишется в виде

$$\mathbf{P} = \mathbf{E} + \frac{\sin \theta}{\theta} \mathbf{R} + \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} \mathbf{R}^2 \equiv \exp \mathbf{R} \quad (2.1.5)$$

Представление (2.1.5) является результатом формального преобразования выражения (2.1.3), однако оно заметно отличается от (2.1.3) тем, что в него входит только вектор поворота $\boldsymbol{\theta}$, а не угол поворота θ и неподвижный вектор \mathbf{m} . Заметим, что в (2.1.5) под величиной θ можно (и нужно) понимать модуль вектора поворота $\boldsymbol{\theta}$: $\theta = |\boldsymbol{\theta}|$. Это следует из того, что модуль вектора поворота $|\boldsymbol{\theta}|$ отличается от угла поворота θ только знаком $\theta = \pm |\boldsymbol{\theta}|$. Замена в (2.1.5) θ на $(-\theta)$ ничего не меняет. Поэтому (2.1.5) можно переписать так

$$\mathbf{P} = \mathbf{E} + \frac{\sin |\boldsymbol{\theta}|}{|\boldsymbol{\theta}|} \mathbf{R} + \frac{1 - \cos |\boldsymbol{\theta}|}{\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\theta}} \mathbf{R}^2$$

В дальнейшем будем пользоваться представлением (2.1.5), но будем считать, что в нем $\theta = |\boldsymbol{\theta}|$. Формулы (2.1.4) также могут быть переписаны в терминах вектора поворота

$$1 + 2 \cos |\boldsymbol{\theta}| = \text{tr} \mathbf{P} \quad -2 \frac{\sin |\boldsymbol{\theta}|}{|\boldsymbol{\theta}|} \boldsymbol{\theta} = \mathbf{P}_\times \quad \mathbf{R}_\times = -2\boldsymbol{\theta} \quad (2.1.6)$$

В последующем представление (2.1.5) и формулы (2.1.6) будут широко использоваться.

В заключение этого пункта сформулируем теорему о представлении тензора поворота [31, 36]

Теорема (Жилин П.А.): Любой тензор поворота представим в виде композиции поворотов вокруг произвольно выбираемых единичных векторов \mathbf{m} и \mathbf{n}

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q}(\psi \mathbf{m}) \cdot \mathbf{Q}(\vartheta \mathbf{e}) \cdot \mathbf{Q}(\varphi \mathbf{n}) \quad \mathbf{e} = \mathbf{m} \times \mathbf{n} / |\mathbf{m} \times \mathbf{n}|, \quad (2.1.7)$$

где углы ψ , ϑ и φ называются углами прецессии, нутации и собственного вращения соответственно. Если $\mathbf{m} = \mathbf{n}$, то углы ψ , ϑ , φ называются углами Эйлера, а в качестве вектора \mathbf{e} может быть выбран любой единичный вектор, ортогональный \mathbf{m} .

Представление (2.1.7) включает в себя как частные случаи все известные представления. Например, если $\mathbf{m} \cdot \mathbf{n} = 0$, то углы ψ , ϑ и φ являются углами Брайнта. Важность представления (2.1.7) определяется тем, что векторы \mathbf{m} и \mathbf{n} в нем могут выбираться в процессе решения задачи, что позволяет находить простейшие формы представления решения задачи. В (2.1.7) использовано обозначение

$$\mathbf{Q}(\alpha \mathbf{p}) = (1 - \cos \alpha) \mathbf{p} \otimes \mathbf{p} + \cos \alpha \mathbf{E} + \sin \alpha \mathbf{p} \times \mathbf{E}, \quad (2.1.8)$$

которое будет широко использоваться в дальнейшем.

2.2 Левая и правая угловые скорости. Задача Дарбу

Угловые скорости вводятся в рассмотрение с помощью хорошо известных уравнений Пуассона [31]

$$\dot{\mathbf{P}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{P} \quad \dot{\mathbf{P}} = \mathbf{P} \times \boldsymbol{\Omega} \quad \boldsymbol{\omega} = \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\Omega} \quad (2.2.9)$$

Первое из этих уравнений называется левым уравнением Пуассона, а второе — правым уравнением Пуассона. Векторы $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\Omega}$ называются левой и правой угловыми скоростями соответственно. Проблема определения тензора поворота по заданной угловой скорости называется задачей Дарбу. Например, левая задача Дарбу сводится к отысканию решений следующей задачи Коши

$$\dot{\mathbf{P}}(t) = \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{P}(t) \quad \mathbf{P}(0) = \mathbf{P}_0 \quad \mathbf{P}_0 \cdot \mathbf{P}_0^T = \mathbf{E} \quad (2.2.10)$$

В скалярной форме первое из уравнений (2.2.9) эквивалентно системе из девяти уравнений, но только три из них являются функционально независимыми. Чтобы найти три независимых уравнения, выполнение которых гарантирует выполнение системы (2.2.10), достаточно в (2.2.10) тензор поворота выразить через вектор поворота. В работе [45] показан один из возможных путей. Здесь будет использован другой способ. Вычислим векторные инварианты от обеих частей левого уравнения Пуассона

$$(\mathbf{P}_\times)' = (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{P})_\times \quad (2.2.11)$$

Тензор поворота представим в виде $\mathbf{P} = \mathbf{D}_i \otimes \mathbf{d}_i$, где \mathbf{d}_i и \mathbf{D}_i ортонормированные тройки векторов. Тогда получим

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{P})_\times &= ((\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{D}_i) \otimes \mathbf{d}_i)_\times = (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{D}_i) \times \mathbf{d}_i = \\ &= \mathbf{D}_i(\mathbf{d}_i \cdot \boldsymbol{\omega}) - \boldsymbol{\omega} \mathbf{D}_i \cdot \mathbf{d}_i = \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\omega} - (\text{tr } \mathbf{P}) \boldsymbol{\omega} = (\mathbf{P} - (\text{tr } \mathbf{P})\mathbf{E}) \cdot \boldsymbol{\omega} \end{aligned}$$

Подставляя это выражение в (2.2.11) и используя формулы (2.1.6), получаем

$$-2 \left(\frac{\sin \theta}{\theta} \boldsymbol{\theta} \right)' = (\mathbf{P} - (\text{tr } \mathbf{P})\mathbf{E}) \cdot \boldsymbol{\omega}$$

или в развернутом виде

$$\frac{\sin \theta}{\theta} \dot{\boldsymbol{\theta}} + \frac{\theta \cos \theta - \sin \theta}{\theta^2} \dot{\theta} \boldsymbol{\theta} = -\frac{1}{2} (\mathbf{P} - (\text{tr } \mathbf{P})\mathbf{E}) \cdot \boldsymbol{\omega} \quad (2.2.12)$$

Умножая обе части этого уравнения скалярно на вектор $\boldsymbol{\theta}$ и учитывая тождество $\boldsymbol{\theta} \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}} = \dot{\theta} \boldsymbol{\theta}$, получаем равенство

$$\boldsymbol{\theta} \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\omega} \quad \Longrightarrow \quad \dot{\theta} \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\omega} \quad \Longrightarrow \quad \dot{\boldsymbol{\theta}} = \frac{\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\omega}}{\theta} \quad (2.2.13)$$

Подставляя это выражение в (2.2.10), получаем после несложных преобразований

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{Z}^{-1}(\boldsymbol{\theta}) \cdot \boldsymbol{\omega}, \quad (2.2.14)$$

где

$$\mathbf{Z}^{-1}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{E} - \frac{1}{2}\mathbf{R} + \frac{1-g}{\theta^2}\mathbf{R}^2 \quad g = \frac{\theta \sin \theta}{2(1 - \cos \theta)} \quad (2.2.15)$$

Здесь использованы обозначения работы [45]. Теперь левая задача Дарбу может быть записана в виде

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{\omega} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\omega} + \frac{1-g}{\theta^2}\boldsymbol{\theta} \times (\boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\omega}) \quad \boldsymbol{\theta}|_{t=0} = \boldsymbol{\theta}_0 \quad (2.2.16)$$

Чтобы перейти от (2.2.16) к правой задаче Дарбу достаточно умножить обе части уравнения (2.2.16) на \mathbf{P}^\top слева и учесть тождества

$$\mathbf{P}^\top \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}} = (\mathbf{P}^\top \cdot \boldsymbol{\theta}) \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}} - \dot{\mathbf{P}}^\top \cdot \boldsymbol{\theta} = \dot{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\Omega}$$

Тогда вместо (2.2.16) получим правую задачу Дарбу

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{\Omega} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\Omega} + \frac{1-g}{\theta^2}\boldsymbol{\theta} \times (\boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\Omega}) \quad \boldsymbol{\theta}|_{t=0} = \boldsymbol{\theta}_0 \quad (2.2.17)$$

Здесь учтены тождества

$$\mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta} \quad \mathbf{P}^\top \cdot (\boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\omega}) = \boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\Omega}$$

Уравнение (2.2.14) можно обратить и переписать его в виде

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{Z}(\boldsymbol{\theta}) \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}}, \quad (2.2.18)$$

где

$$\mathbf{Z}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{E} + \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2}\mathbf{R} + \frac{\theta - \sin \theta}{\theta^3}\mathbf{R}^2 \quad (2.2.19)$$

Умножая (2.2.18) слева на \mathbf{P}^\top и учитывая равенства

$$\mathbf{P}^\top \cdot \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\Omega} \quad \mathbf{P}^\top \cdot \mathbf{Z} = \mathbf{Z}^\top \quad (2.2.20)$$

получаем

$$\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{Z}^\top(\boldsymbol{\theta}) \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}}, \quad (2.2.21)$$

Все вышеприведенные соотношения будут необходимы для дальнейших вычислений.

2.3 Тензоры инерции. Кинетический момент двухроторного гиростата

Гиростатом называется тело, распределение масс в котором не меняется в процессе движения. Однако какая-то часть этого тела может вращаться относительно остальной части. Для определенности рассмотрим двухроторный гироскат на упругом основании. Пусть дано твердое тело с двумя полостями, границы которых являются поверхностями вращения. В дальнейшем будем считать, что это тело A имеет неподвижную точку и упруго зашпемлено в некоей опоре — рис.2.3.1.

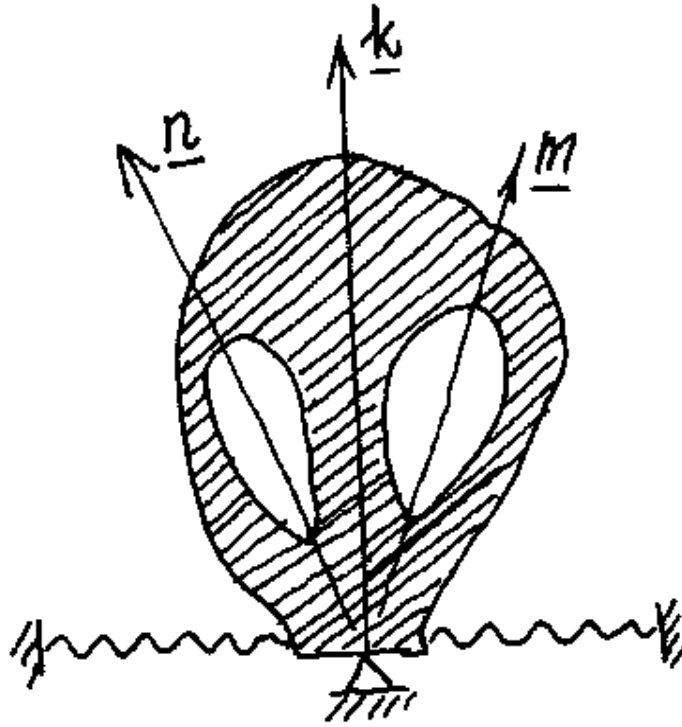


Рис. 2.3.1: Двухроторный гириостат.

В отсчетном положении ось \mathbf{k} тела направлена вертикально, а упругое основание недеформировано. Тензор инерции этого тела с полостями, вычисленный относительно неподвижной точки O , в отсчетном положении обозначим символом \mathbf{A} . Тензор инерции тела в актуальный момент времени обозначим символом \mathbf{A}^t

$$\mathbf{A}^t = \mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}^T(t), \quad (2.3.22)$$

где через $\mathbf{P}(t)$ обозначен тензор поворота тела \mathbf{A} . Векторы \mathbf{m} и \mathbf{n} направлены по осям симметрии полостей в отсчетном положении. В одну полость вставлен ротор с тензором инерции \mathbf{B} , вычисленным относительно опорной точки O . Чтобы вращение ротора \mathbf{B} не меняло распределения масс в теле, он должен быть осесимметричным, т. е. иметь вид

$$\mathbf{B} = \lambda_b \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + \mu_b (\mathbf{E} - \mathbf{m} \otimes \mathbf{m}) \quad (2.3.23)$$

где \mathbf{m} определяет ось ротора \mathbf{B} в отсчетном положении, λ_b — осевой момент инерции, μ_b — экваториальный момент инерции.

В актуальный момент времени тензор инерции ротора \mathbf{B} имеет вид, аналогичный (2.3.22)

$$\mathbf{B}^t = \mathbf{P}_b(t) \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{P}_b^T(t), \quad (2.3.24)$$

где \mathbf{P}_b — тензор поворота (полный) ротора \mathbf{B} . В другую полость вставлен ротор \mathbf{C} с тензором инерции

$$\mathbf{C} = \lambda_c \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \mu_c (\mathbf{E} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \quad (2.3.25)$$

где единичный вектор \mathbf{n} определяет ось симметрии ротора C в отсчетном положении. В актуальном положении тензор инерции ротора C имеет вид

$$\mathbf{C}^t = \mathbf{P}_c(t) \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{P}_c^T(t), \quad (2.3.26)$$

где \mathbf{P}_c — полный тензор поворота ротора C . Тензоры поворота роторов B и C удобно представить в другом виде. Полный поворот ротора B можно представить в виде композиции поворотов: поворота ротора $\mathbf{Q}(\tilde{\alpha}\mathbf{m})$ вокруг своей оси симметрии в отсчетном положении и поворота ротора тензором поворота тела A , т. е. тензором $\mathbf{P}(t)$. Однако здесь необходимо уточнение. Если тело A поворачивается вокруг оси \mathbf{m} , то такой поворот не повернет ротора, который может свободно вращаться внутри A . Тензор поворота $\mathbf{P}(t)$ тела в свою очередь можно представить в виде композиции поворотов вокруг \mathbf{m} и вокруг оси ортогональной \mathbf{m} . Это немедленно следует из теоремы (2.1.7), где следует положить $\mathbf{n} = \mathbf{m}$

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q}(\psi\mathbf{m}) \cdot \mathbf{Q}(\vartheta\mathbf{e}) \cdot \mathbf{Q}(\varphi\mathbf{m}) = \mathbf{Q}(\vartheta\mathbf{e}') \cdot \mathbf{Q}((\varphi - \psi)\mathbf{m}),$$

где

$$\mathbf{e}' = \mathbf{Q}(\psi\mathbf{m}) \cdot \mathbf{e} \quad \mathbf{e}' \cdot \mathbf{m} = \mathbf{m} \cdot \mathbf{e} = 0$$

Итак, тензор поворота $\mathbf{P}(t)$ представим в виде

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{P}_*(t) \cdot \mathbf{Q}(\alpha_*\mathbf{m}), \quad (2.3.27)$$

где $\mathbf{P}_*(t)$ можно назвать тензором наклона оси \mathbf{m} . Именно этот тензор поворота $\mathbf{P}_*(t)$ и поворачивает ротор с осью \mathbf{m} . Теперь полный поворот ротора B можно записать в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_b(t) &= \mathbf{P}_*(t) \cdot \mathbf{Q}(\tilde{\alpha}\mathbf{m}) = \mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{Q}^T(\alpha_*\mathbf{m}) \cdot \mathbf{Q}(\tilde{\alpha}\mathbf{m}) = \mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{Q}(\alpha\mathbf{m}) \\ \alpha(t) &= \tilde{\alpha}(t) - \alpha_*(t) \end{aligned} \quad (2.3.28)$$

где $\alpha(t)$ есть угол поворота ротора B относительно тела A . Для ротора C имеем аналогичное представление

$$\mathbf{P}_c(t) = \mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{Q}(\beta\mathbf{n}) \quad (2.3.29)$$

где $\beta(t)$ угол поворота ротора C относительно тела A . Введем обозначения:

- $\boldsymbol{\omega}$ — вектор угловой скорости тела A ,
- $\boldsymbol{\omega}_b$ — вектор угловой скорости ротора B ,
- $\boldsymbol{\omega}_c$ — вектор угловой скорости ротора C .

Тогда, согласно [45], имеем формулы

$$\boldsymbol{\omega}_b = \boldsymbol{\omega} + \dot{\alpha}\mathbf{m}' \quad \mathbf{m}' = \mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{m} \quad (2.3.30)$$

$$\boldsymbol{\omega}_c = \boldsymbol{\omega} + \dot{\beta}\mathbf{n}' \quad \mathbf{n}' = \mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{n} \quad (2.3.31)$$

Теперь мы можем записать выражение для кинетического момента гиростата. Поскольку кинетический момент аддитивен по массе, то полный кинетический момент гиростата есть сумма кинетических моментов тела A и роторов B и C .

$$\mathbf{K} = \mathbf{A}^t \cdot \boldsymbol{\omega} + \mathbf{B}^t \cdot \boldsymbol{\omega}_b + \mathbf{C}^t \cdot \boldsymbol{\omega}_c \quad (2.3.32)$$

Заметим, что справедливы равенства

$$\mathbf{B}^t = \mathbf{P}_b \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{P}_b^T = \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}(\alpha \mathbf{m}) \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{Q}^T(\alpha \mathbf{m}) \cdot \mathbf{P}^T = \mathbf{P} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{P}^T,$$

т. к.

$$\mathbf{Q}(\alpha \mathbf{m}) \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{Q}^T(\alpha \mathbf{m}) = \mathbf{B}$$

С учетом вышесказанного теперь имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \mathbf{P} \cdot \left(\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\Omega} + \mathbf{B} \cdot (\boldsymbol{\Omega} + \dot{\alpha} \mathbf{m}) + \mathbf{C} \cdot (\boldsymbol{\Omega} + \dot{\beta} \mathbf{n}) \right) = \\ &= \mathbf{P} \cdot \left((\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C}) \cdot \boldsymbol{\Omega} + \lambda_b \dot{\alpha} \mathbf{m} + \lambda_c \dot{\beta} \mathbf{n} \right), \end{aligned} \quad (2.3.33)$$

где $\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{P}^T \cdot \boldsymbol{\omega}$ есть правая угловая скорость тела A .

Введем обозначение

$$\mathbf{D} = \mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} \quad (2.3.34)$$

Тогда для вектора кинетического момента имеем окончательное выражение

$$\mathbf{K} = \mathbf{P} \cdot \left(\mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\Omega} + \lambda_b \dot{\alpha} \mathbf{m} + \lambda_c \dot{\beta} \mathbf{n} \right) \quad (2.3.35)$$

Сюда вошли: суммарный тензор инерции гиростата в отсчетном положении и осевые моменты инерции роторов.

2.4 Уравнения движения гиростата

Напомним второй закон динамики Эйлера: Скорость изменения кинетического момента произвольной системы, вычисленного относительно опорной точки O , равна внешнему моменту, действующему на рассматриваемую систему.

В данном случае второй закон динамики имеет вид

$$\dot{\mathbf{K}} = \mathbf{M}_{\text{ext}} \quad (2.4.36)$$

где \mathbf{M}_{ext} — внешний момент. Запишем кинетический момент в виде

$$\mathbf{K} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{J} \quad \mathbf{J} = \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\Omega} + \lambda_b \dot{\alpha} \mathbf{m} + \lambda_c \dot{\beta} \mathbf{n} \quad (2.4.37)$$

Тогда имеем

$$\dot{\mathbf{K}} = \mathbf{P} \cdot \dot{\mathbf{J}} + \dot{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{J} = \mathbf{P} \cdot \dot{\mathbf{J}} + (\mathbf{P} \times \boldsymbol{\Omega}) \cdot \mathbf{J} = \mathbf{P} \cdot \dot{\mathbf{J}} + \mathbf{P} \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{J}) = \mathbf{P} \cdot (\dot{\mathbf{J}} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{J})$$

Подставляя это выражение в (2.4.36) и умножая обе части получившегося уравнения на тензор \mathbf{P}^T слева, получаем

$$\dot{\mathbf{J}} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{J} = \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{M}_{\text{ext}} \quad (2.4.38)$$

В качестве внешнего момента в данном случае нужно рассматривать момент, действующий на тело A со стороны упругого основания. По физическим соображениям ясно, что такой момент должен быть потенциальным.

При определении потенциального момента будем следовать работе [45]. Введем в рассмотрение вектор поворота $\boldsymbol{\theta}$ тела \mathbf{A} . Энергия упругого основания, соединенного с телом \mathbf{A} , является функцией вектора поворота тела \mathbf{A} .

Определение: момент \mathbf{M} называется потенциальным, если его мощность равна скорости изменения некоей скалярной функции, называемой потенциалом.

Итак, по определению, имеем

$$\mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\omega} = -\dot{\Pi}(\boldsymbol{\theta}) = -\frac{d\Pi}{d\boldsymbol{\theta}} \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}}$$

Вспоминая формулу (2.2.18) это выражение переписываем в виде

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{Z}(\boldsymbol{\theta}) \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}} = -\frac{d\Pi}{d\boldsymbol{\theta}} \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}} \implies \mathbf{M} = -\mathbf{Z}^{-T}(\boldsymbol{\theta}) \cdot \frac{d\Pi}{d\boldsymbol{\theta}} \quad (2.4.39)$$

Функцию $\Pi(\boldsymbol{\theta})$ естественно назвать энергией упругого основания. В дальнейшем упругое основание будем считать трансверсально изотропным. В работе [45] показано, что трансверсально изотропный потенциал с осью изотропии \mathbf{k} может быть выражен как функция двух скалярных аргументов.

Внешний момент \mathbf{M}_{ext} представим в виде суперпозиции моментов:

$$\mathbf{M}_{\text{ext}} = \mathbf{M}_e + \mathbf{M}_{\text{ex}}^*$$

где \mathbf{M}_e момент, создающийся упругим основанием, \mathbf{M}_{ex}^* — момент внешних (прочих) воздействий. Момент \mathbf{M}_{ex}^* в свою очередь может состоять из потенциальной и непотенциальной частей. Поэтому для \mathbf{M}_{ext} можно записать выражение

$$\mathbf{M}_{\text{ext}} = -\mathbf{Z}^{-T}(\boldsymbol{\theta}) \cdot \frac{d(\Pi(\boldsymbol{\theta}) + \mathcal{U}(\boldsymbol{\theta}))}{d\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{M}_{\text{ex}} \quad (2.4.40)$$

где \mathbf{M}_{ex} есть непотенциальная часть внешнего момента, $\mathcal{U}(\boldsymbol{\theta})$ — потенциал внешнего момента. Теперь уравнение движения (2.4.38) можно переписать в виде

$$\dot{\mathbf{J}} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{J} + \mathbf{Z}^{-1} \cdot \frac{d(\Pi + \mathcal{U})}{d\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{M}_{\text{ex}} \quad (2.4.41)$$

где учтено тождество $\mathbf{P}^T \cdot \mathbf{Z}^{-T} = \mathbf{Z}^{-1}$.

Упругое основание будем считать трансверсально изотропным

$$\Pi(\boldsymbol{\theta}) = \Pi(\theta^2, \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta})$$

с осью изотропии \mathbf{k} .

Тогда имеем

$$d\Pi = \frac{\partial \Pi}{\partial(\theta^2)} d(\theta^2) + \frac{\partial \Pi}{\partial(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta})} \mathbf{k} \cdot d\boldsymbol{\theta} = \left(2 \frac{\partial \Pi}{\partial(\theta^2)} \boldsymbol{\theta} + \frac{\partial \Pi}{\partial(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta})} \mathbf{k} \right) \cdot d\boldsymbol{\theta}$$

Отсюда по определению производной по вектору следует формула

$$\frac{d\Pi}{d\boldsymbol{\theta}} = 2 \frac{\partial \Pi}{\partial(\theta^2)} \boldsymbol{\theta} + \frac{\partial \Pi}{\partial(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta})} \mathbf{k}$$

Для упругого момента в этом случае получается упрощенное выражение

$$-\mathbf{M}_e = 2 \frac{\partial \Pi}{\partial (\theta^2)} \boldsymbol{\theta} + \frac{\partial \Pi}{\partial (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta})} \mathbf{Z}^{-\top} \cdot \mathbf{k} \quad \boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{Z} = \theta \quad (2.4.42)$$

Уравнение движения гиростата в этом случае можно переписать в виде

$$\dot{\mathbf{J}} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{J} + 2 \frac{\partial \Pi}{\partial (\theta^2)} \boldsymbol{\theta} + \frac{\partial \Pi}{\partial (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta})} \mathbf{Z}^{-1} \cdot \mathbf{k} + \mathbf{Z}^{-1} \cdot \frac{d\mathbf{U}}{d\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{P}^\top \cdot \mathbf{M}_{\text{ex}} \quad (2.4.43)$$

Если на гиростат помимо реакции упругого основания других воздействий нет, то получаем более простое уравнение

$$\dot{\mathbf{J}} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{J} + 2 \frac{\partial \Pi}{\partial (\theta^2)} \boldsymbol{\theta} + \frac{\partial \Pi}{\partial (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta})} \mathbf{Z}^{-1} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{0} \quad (2.4.44)$$

Если роторы жестко закреплены на несущем теле \mathbf{A} , т. е. $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}$, то уравнение (2.4.44) упрощается еще сильнее

$$\mathbf{A} \cdot \dot{\boldsymbol{\Omega}} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\Omega} + 2 \frac{\partial \Pi}{\partial (\theta^2)} \boldsymbol{\theta} + \frac{\partial \Pi}{\partial (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta})} \mathbf{Z}^{-1} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{0} \quad (2.4.45)$$

Наконец, полагая в (2.4.45) функцию $\Pi(\boldsymbol{\theta})$ равной нулю, т. е. убирая упругое основание, получаем хорошо известное уравнение Эйлера

$$\mathbf{A} \cdot \dot{\boldsymbol{\Omega}} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\Omega} = \mathbf{0} \quad (2.4.46)$$

К этим уравнениям должно быть добавлено уравнение, связывающее угловую скорость $\boldsymbol{\Omega}$ с производной от вектора поворота. Удобнее записать последнее уравнение в обращенной форме

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{\Omega} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\Omega} + \frac{1-g}{\theta^2} \boldsymbol{\theta} \times (\boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\Omega}) \quad g = \frac{\theta \sin \theta}{2(1 - \cos \theta)}, \quad (2.4.47)$$

где $\theta = |\boldsymbol{\theta}|$.

Сравнивая между собой системы (2.4.45), (2.4.47) и (2.4.46), (2.4.47) видим, что первая из них существенно сложнее второй, т. к. уравнения (2.4.45) и (2.4.47) образуют совместную систему для векторов $\boldsymbol{\theta}$ и $\boldsymbol{\Omega}$. В классическом случае по уравнению Эйлера (2.4.46) находят правую угловую скорость $\boldsymbol{\Omega}$, а затем решают правую задачу Дарбу, которая в данной работе сводится к интегрированию уравнения (2.4.47). Если тело закреплено на упругом основании, то задача интегрирования основной системы очевидным образом усложняется. Впрочем, для численных решений обсуждаемые системы уравнений практически эквивалентны. Возвращаясь к рассмотрению двухроторного гиростата, сразу замечаем, что здесь возникают дополнительные осложнения. Вектор \mathbf{J} , определенный выражением (2.4.37), зависит не только от угловой скорости $\boldsymbol{\Omega}$ тела \mathbf{A} , но и от относительных скоростей роторов \mathbf{B} и \mathbf{C} , т. е. в этом случае система уравнений (2.4.44) и (2.4.47) содержит два неизвестных вектора $\boldsymbol{\Omega}$ и $\boldsymbol{\theta}$ (считается, что вектор \mathbf{J} исключен из (2.4.44) с помощью (2.4.37)) и две скалярных функции α и β . Иными словами, система (2.4.44) и (2.4.47) незамкнута. К ней необходимо добавить еще два уравнения, к выводу которых мы сейчас и переходим.

2.5 Уравнения движения роторов

Для упрощения нижеследующих уравнений и рассуждений примем ограничение, что оси роторов проходят через неподвижную точку O . Тогда сами роторы можно считать твердыми телами, имеющими неподвижную точку. На роторы действуют моменты, развиваемые двигателями, которые до сих пор не упоминались, поскольку для гиростата в целом они являются внутренними. Кроме того, на роторы действуют моменты со стороны тела A , вынуждающие роторы отслеживать повороты несущего тела A .

Обратимся к выводу уравнений движения ротора B . Кинетический момент ротора B определяется выражением

$$\mathbf{K}_b = \mathbf{P}_b \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{P}_b^T \cdot \boldsymbol{\omega}_b \quad (2.5.48)$$

С учетом формул (2.3.23), (2.3.28) и (2.3.30) выражению (2.5.48) можно придать вид

$$\mathbf{K}_b = \mathbf{P} \cdot \mathbf{V} \cdot (\boldsymbol{\Omega} + \dot{\boldsymbol{\alpha}}\mathbf{m}) \quad (2.5.49)$$

или его можно записать иначе

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_b &= (\mu_b \mathbf{E} + (\lambda_b - \mu_b) \mathbf{m}' \otimes \mathbf{m}') \cdot (\boldsymbol{\omega} + \dot{\boldsymbol{\alpha}}\mathbf{m}') = \\ &= \mu_b (\boldsymbol{\omega} + \dot{\boldsymbol{\alpha}}\mathbf{m}') + (\lambda_b - \mu_b) \mathbf{m}' (\mathbf{m}' \cdot \boldsymbol{\omega} + \dot{\boldsymbol{\alpha}}) \end{aligned} \quad (2.5.50)$$

Второй закон динамики для ротора B можно записать в виде

$$\dot{\mathbf{K}}_b = \mathbf{M}_{дв} + \mathbf{M}_{аб}, \quad (2.5.51)$$

где $\mathbf{M}_{дв}$ — момент, развиваемый двигателем; $\mathbf{M}_{аб}$ — момент, действующий на ротор B со стороны тела A . Учтем теперь следующее. Момент $\mathbf{M}_{дв}$ очевидно направлен по оси ротора B , т. е. по вектору $\mathbf{m}' = \mathbf{P} \cdot \mathbf{m}$. Момент $\mathbf{M}_{аб}$, напротив, ортогонален оси ротора B , т. е. $\mathbf{M}_{аб} \cdot \mathbf{m}' = 0$. Спроецируем теперь уравнение (2.5.51) на вектор \mathbf{m}' и учтем равенства

$$\mathbf{M}_{дв} = M_{дв} \mathbf{m}' \quad \mathbf{M}_{аб} \cdot \mathbf{m}' = 0 \quad \mathbf{m}' \cdot \dot{\mathbf{K}}_b = (\mathbf{m}' \cdot \mathbf{K}_b) \dot{} - \dot{\mathbf{m}}' \cdot \mathbf{K}_b$$

Легко заметить, что

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{m}}' \cdot \mathbf{K}_b &= (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{m}') \cdot (\mu_b (\boldsymbol{\omega} + \dot{\boldsymbol{\alpha}}\mathbf{m}') + (\lambda_b - \mu_b) \mathbf{m}' (\mathbf{m}' \cdot \boldsymbol{\omega} + \dot{\boldsymbol{\alpha}})) = 0, \\ \mathbf{m}' \cdot \mathbf{K}_b &= \lambda_b (\omega_m + \dot{\boldsymbol{\alpha}}) \quad \omega_m = \mathbf{m}' \cdot \boldsymbol{\omega} = \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\Omega} \end{aligned} \quad (2.5.52)$$

Проекция уравнения (2.5.51) на вектор \mathbf{m}' записывается так

$$\lambda_b (\dot{\boldsymbol{\alpha}} + \omega_m) \dot{} = M_{дв} \quad \omega_m = \mathbf{m}' \cdot \boldsymbol{\omega} = \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\Omega} \quad (2.5.53)$$

Для момента, развиваемого двигателем, $M_{дв}$ примем простейшее выражение

$$M_{дв} = -\eta_b (\dot{\boldsymbol{\alpha}} - \omega_b) \quad \eta_b > 0, \quad (2.5.54)$$

где ω_b есть номинальная угловая скорость двигателя. Подставляя (2.5.54) в (2.5.53), получаем уравнение

$$\lambda_b (\dot{\boldsymbol{\alpha}} - \omega_b) \dot{} + \eta_b (\dot{\boldsymbol{\alpha}} - \omega_b) + \lambda_b \dot{\omega}_m = 0 \quad \omega_b = \text{const} \quad (2.5.55)$$

Здесь основной неизвестной является функция $\alpha(t)$, а угловая скорость тела A входит в уравнение (2.5.55) через величину $\omega_m = \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\Omega}$. Аналогичные рассуждения для ротора C приводят к уравнению

$$\lambda_c(\dot{\beta} - \omega_c) + \eta_c(\dot{\beta} - \omega_c) + \lambda_c \dot{\omega}_n = 0 \quad \omega_n = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\Omega} \quad (2.5.56)$$

где $\eta_c > 0$, ω_c есть номинальная угловая скорость двигателя, вращающего ротор C . Если считать, что двигатели, вращающие роторы B и C имеют бесконечную мощность, то следует принять

$$\eta_b \rightarrow \infty \quad \eta_c \rightarrow \infty \quad \implies \quad \dot{\alpha} = \omega_b \quad \dot{\beta} = \omega_c \quad (2.5.57)$$

Последние значения получаются после переходного процесса.

2.6 Полная система уравнений движения двухроторного гиростата на упругом основании

Выпишем полную систему уравнений, описывающих динамику двухроторного гиростата.

Второй закон динамики для гиростата-уравнение (2.4.43)

$$\dot{\mathbf{J}} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{J} + 2 \frac{\partial \Pi}{\partial (\theta^2)} \boldsymbol{\theta} + \frac{\partial \Pi}{\partial (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta})} \mathbf{Z}^{-1} \cdot \mathbf{k} + \mathbf{Z}^{-1} \cdot \frac{d\mathbf{U}}{d\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{M}_{\text{ex}} \quad (2.6.58)$$

$$\mathbf{J} = \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\Omega} + \lambda_b \dot{\alpha} \mathbf{m} + \lambda_c \dot{\beta} \mathbf{n} \quad \mathbf{D} = \mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} \quad (2.6.59)$$

Кинематическое уравнение (2.4.47)

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{\Omega} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\Omega} + \frac{1-g}{\theta^2} \boldsymbol{\theta} \times (\boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\Omega}) \quad g \equiv \frac{\theta \sin \theta}{2(1 - \cos \theta)}, \quad (2.6.60)$$

Уравнение, определяющее вращение ротора B

$$\lambda_b(\dot{\alpha} - \omega_b) + \eta_b(\dot{\alpha} - \omega_b) + \lambda_b \dot{\omega}_m = 0 \quad \omega_m = \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\Omega} \quad (2.6.61)$$

Уравнение, определяющее вращение ротора C

$$\lambda_c(\dot{\beta} - \omega_c) + \eta_c(\dot{\beta} - \omega_c) + \lambda_c \dot{\omega}_n = 0 \quad \omega_n = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\Omega} \quad (2.6.62)$$

Система уравнений (2.5.48)–(2.5.52) является замкнутой и содержит восемь неизвестных: вектор поворота $\boldsymbol{\theta}$, вектор правой угловой скорости $\boldsymbol{\Omega}$, углы относительных поворотов роторов $\alpha(t)$ и $\beta(t)$.

Система (2.5.48)–(2.5.52) весьма удобна для численного анализа. В частности, численные эксперименты с ней позволяют выбирать энергию деформации $\Pi(\boldsymbol{\theta})$, т.е. проектировать упругое основание, обеспечивающее заданное динамическое поведение гиростата. В данной работе анализ такого рода оставлен в стороне из-за недостаточной его завершенности.

Для практических приложений, например, для энергии деформации в виде квадратичной формы аналогично тому как это принято для так называемого полулинейного материала [92] в нелинейной теории упругости

$$\Pi(\theta^2, \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{2} C_1 (\theta^2 - (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta})^2) + \frac{1}{2} C_3 (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta})^2 \quad (2.6.63)$$

В этом случае упругий момент \mathbf{M}_e вычисляется по простейшей формуле

$$\mathbf{M}_e = -C_1\boldsymbol{\theta} - (C_3 - C_1)\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta} \mathbf{Z}^{-1}(\boldsymbol{\theta}) \cdot \mathbf{k}, \quad (2.6.64)$$

где $C_1 > 0$, $C_3 > 0$ называются жесткостями основания на изгиб и кручение соответственно. Обратим внимание, что выражение для упругого момента, соответствующее простейшей форме энергии, является нелинейным. В развернутом виде с учетом представления (2.2.15) выражение (2.6.64) имеет вид

$$\mathbf{M}_e = -C_1\boldsymbol{\theta} - (C_3 - C_1)(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta}) \left(\mathbf{k} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{k} + \frac{1-g}{\theta^2}\boldsymbol{\theta} \times (\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{k}) \right) \quad (2.6.65)$$

Иными словами, в отличие от нелинейной теории упругости, здесь мы имеем дело с физически нелинейной задачей, а не только с геометрической нелинейностью. Обоснованность принятых наименований для упругих постоянных C_1 и C_3 следует из линеаризованной записи выражения (2.6.65)

$$\mathbf{M}_e = -C_1(\boldsymbol{\theta} - \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta} \mathbf{k}) - C_3(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta})\mathbf{k} \quad (2.6.66)$$

Если вектор поворота направлен по \mathbf{k} , т.е. имеет место чистое кручение, то получаем

$$\mathbf{M}_e = -C_3 \boldsymbol{\theta} \quad (\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{k} = 0)$$

Отсюда понятно наименование жесткость на кручение для упругой постоянной C_3 . Если же вектор поворота ортогонален \mathbf{k} , то имеем

$$\mathbf{M}_e = -C_1 \boldsymbol{\theta} \quad (\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{k} = 0)$$

При этом мы имеем наклон гиростата, т.е. отклонение его оси от вертикали, и изгиб упругого основания.

2.7 Уравнения движения двухроторного гиростата при малых поворотах несущего тела

Несущее тело гиростата, упруго заземленное в упругое основание, во многих практически важных случаях не должно сильно отклоняться от исходного состояния, т.е. вектор поворота несущего тела должен быть малым

$$|\boldsymbol{\theta}| \ll 1$$

В этом случае основную систему уравнений (2.6.58)–(2.6.63) можно существенно упростить, сохранив в ней только линейные по $\boldsymbol{\theta}$ и его производным слагаемые. Наиболее значительное упрощение претерпевает кинематическое уравнение (2.6.60). Заметим, что справедлива оценка

$$\frac{1-g}{\theta^2} = \frac{1}{12} + O(\theta^2)$$

Поэтому в линейном приближении получаем, что правая угловая скорость $\boldsymbol{\Omega}$ совпадает с левой угловой скоростью и определяется простейшим выражением

$$\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega} = \dot{\boldsymbol{\theta}} \quad (2.7.67)$$

Примем, что внешние моменты отсутствуют. Для упругого момента имеем выражение (2.6.58). С учетом (2.7.67) и (2.6.59) уравнение (2.6.58) после линеаризации записываем в виде

$$\mathbf{D} \cdot \ddot{\boldsymbol{\theta}} + \lambda_b \ddot{\boldsymbol{\alpha}} \mathbf{m} + \lambda_c \ddot{\boldsymbol{\beta}} \mathbf{n} + C_1(\boldsymbol{\theta} - \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta} \mathbf{k}) + C_3(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta}) \mathbf{k} = \mathbf{0} \quad (2.7.68)$$

Уравнения (2.6.61) и (2.6.62) остаются почти без изменений

$$\lambda_b(\dot{\boldsymbol{\alpha}} - \boldsymbol{\omega}_b) + \eta_b(\dot{\boldsymbol{\alpha}} - \boldsymbol{\omega}_b) + \lambda_b \mathbf{m} \cdot \ddot{\boldsymbol{\theta}} = 0 \quad (2.7.69)$$

$$\lambda_c(\dot{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\omega}_c) + \eta_c(\dot{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\omega}_c) + \lambda_c \mathbf{n} \cdot \ddot{\boldsymbol{\theta}} = 0 \quad (2.7.70)$$

Система (2.7.68)–(2.7.70) есть система обыкновенных дифференциальных уравнений восьмого порядка с постоянными коэффициентами. В принципе, она допускает полное исследование.

3 Динамика однороторного гиростата на упругом основании

3.1 Уравнения движения однороторного гиростата с трансверсально изотропным тензором инерции

В этой главе будет рассматриваться частный случай уравнений, полученных во второй главе. При этом будут приняты дополнительные упрощающие предположения.

Первое. Тензор инерции несущего тела \mathbf{A} будем считать трансверсально изотропным с осью изотропии, направленной по вектору \mathbf{k}

$$\mathbf{A} = \lambda_a \mathbf{k} \otimes \mathbf{k} + \mu_a (\mathbf{E} - \mathbf{k} \otimes \mathbf{k}) \quad (3.1.1)$$

От этого предположения в дальнейшем мы откажемся и рассмотрим ситуацию, когда тензор инерции \mathbf{A} будет близок к выражению (3.1.1), но перестанет обладать осью симметрии.

Второе. Считаем, что ротор \mathbf{C} отсутствует, но полость, занимаемая ротором \mathbf{C} , заполнена материалом несущего тела \mathbf{A} .

Третье. Считаем, что ось ротора \mathbf{B} в исходном натуральном состоянии совпадает с осью симметрии несущего тела \mathbf{A} : $\mathbf{m} = \mathbf{k}$.

Четвертое. Для энергии упругого основания считаем справедливым выражение (2.5.53).

При принятых предположениях суммарный тензор инерции гиростата \mathbf{D} имеет вид

$$\mathbf{D} = \lambda \mathbf{k} \otimes \mathbf{k} + \mu (\mathbf{E} - \mathbf{k} \otimes \mathbf{k}) \quad \lambda = \lambda_a + \lambda_b \quad \mu = \mu_a + \mu_b \quad (3.1.2)$$

Тогда правый вектор кинематического момента \mathbf{J} выражается по формуле

$$\mathbf{J} = \mu \boldsymbol{\Omega} + ((\lambda - \mu) \boldsymbol{\omega}_k + \lambda_b \dot{\boldsymbol{\alpha}}) \mathbf{k} \quad \boldsymbol{\omega}_k = \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\Omega} \quad (3.1.3)$$

Уравнение движения гиростата (2.6.58) в данном случае переписывается в виде

$$\begin{aligned} \mu \mathbf{\Omega} + ((\lambda - \mu)\omega_k + \lambda_b \dot{\alpha}) \mathbf{k} - ((\lambda - \mu)\omega_k + \lambda_b \dot{\alpha}) \mathbf{k} \times \mathbf{\Omega} + \\ + c_1 \boldsymbol{\theta} + (c_3 - c_1)(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta}) \mathbf{Z}^{-1}(\boldsymbol{\theta}) \cdot \mathbf{k} = 0 \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

Кинематическое уравнение (2.6.60) остается без изменений

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{\Omega} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{\Omega} + \frac{1-g}{\theta^2} \boldsymbol{\theta} \times (\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{\Omega}) \quad g = \frac{\theta \sin \theta}{2(1 - \cos \theta)}, \quad (3.1.5)$$

Уравнение динамики для ротора так же остается почти без изменений

$$\lambda_b (\dot{\alpha} - \omega_b) + \eta_b (\dot{\alpha} - \omega_b) + \lambda_b \dot{\omega}_k = 0 \quad \omega_k = \mathbf{k} \cdot \mathbf{\Omega} \quad (3.1.6)$$

Система (3.1.4)–(3.1.6) являет собой замкнутую систему уравнений для одно-роторного гиростата, который в данном случае можно рассматривать как простейшую модель центрифуги. Чтобы закончить постановку задачи, необходимо задать начальные условия

$$t = 0: \quad \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0 \quad \mathbf{\Omega} = \mathbf{\Omega}_0 \quad \alpha = \alpha_0 \quad (3.1.7)$$

Полученная задача Коши оказывается сильно нелинейной и достаточно сложна для аналитического решения в общем случае. Традиционные методы анализа здесь не подходят, т. к. система существенно неконсервативна. Подвод или отвод энергии в этой системе осуществляется электрическим путем.

3.2 Крутильно-вращательные движения гиростата

Нелинейная система (3.1.4)–(3.1.6) имеет точное частное решение, которое реализуется, конечно, при частном случае начальных условий. А именно, допустим, что несущее тело \mathbf{A} совершает чисто крутильные колебания вокруг своей оси симметрии. Тогда ротор будет совершать крутильно-вращательное движение. Для центрифуги это нормальный рабочий режим движения, а все прочие движения являются паразитными и нежелательными. Итак, примем, что вектор поворота несущего тела \mathbf{A} имеет вид

$$\boldsymbol{\theta} = \theta(t) \mathbf{k} \quad \mathbf{k} = \text{const} \quad (3.2.8)$$

здесь $\theta(t)$ уже не является модулем вектора $\boldsymbol{\theta}$, как это было выше, что не имеет значения, т. к.

$$\frac{|\boldsymbol{\theta}| \sin |\boldsymbol{\theta}|}{2(1 - \cos |\boldsymbol{\theta}|)} = \frac{\theta \sin \theta}{2(1 - \cos \theta)}$$

Легко убедиться, что при принятии (3.2.8) левая и правая угловые скорости совпадают и определяются по простейшей формуле

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{\Omega} = \dot{\boldsymbol{\theta}} \mathbf{k} \quad (3.2.9)$$

Вектор кинетического момента \mathbf{J} определяется выражением

$$\mathbf{J} = (\lambda \dot{\boldsymbol{\theta}} + \lambda_b \dot{\alpha}) \mathbf{k} \quad \omega_k \equiv \dot{\theta}$$

Кроме того, имеем равенство

$$\mathbf{Z}^{-1}(\boldsymbol{\theta}) \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k}$$

Система (3.1.4)–(3.1.5) сводится к трем скалярным уравнениям

$$(\lambda\dot{\theta} + \lambda_b\dot{x})' + c_3\theta = 0 \quad \lambda_b\dot{x} + \eta_b\ddot{x} + \lambda_b\ddot{\theta} = 0 \quad \dot{\alpha} = \omega_b + x \quad (3.2.10)$$

Получили линейную систему четвертого порядка, но решать фактически надо систему третьего порядка, т.к. последнее уравнение системы (3.2.10) позволяет найти $\alpha(t)$ квадратурой. Решение ищем в виде

$$\boldsymbol{\theta} = \mathbf{A}e^{pt} \quad x = \mathbf{B}e^{pt}$$

Подставляя эти выражения в первые два уравнения системы (3.2.10), получаем однородную систему линейных алгебраических уравнений. Приравнявая нулю определитель этой системы, получаем характеристическое уравнение

$$\mathcal{F}(p) \equiv \lambda_b\lambda_a p^3 + \lambda\eta_b p^2 + c_3\lambda_b p + c_3\eta_b = 0 \quad (3.2.11)$$

Вводя стандартные обозначения, принимаем

$$a_0 = \lambda_b\lambda_a \quad a_1 = \lambda\eta_b \quad a_2 = c_3\lambda_b \quad a_3 = c_3\eta_b$$

Для того, чтобы все корни уравнения (3.2.11) имели бы отрицательные вещественные части необходимо и достаточно выполнение условий Рауса-Гурвица, которые в данном случае сводятся к неравенствам

$$\lambda_b\lambda_a > 0 \quad \lambda\eta_b > 0 \quad c_3\eta_b\lambda_b(\lambda - \lambda_a) > 0 \quad c_3^2\eta_b^2\lambda_b(\lambda - \lambda_a) > 0$$

Все эти неравенства строго выполняются, если выполняются строгие неравенства

$$\lambda_a > 0 \quad \lambda_b > 0 \quad c_3 > 0 \quad \eta_b > 0$$

Далее считаем эти неравенства выполненными. Итак, все корни уравнения (3.2.11) имеют отрицательные вещественные части. Один из этих корней заведомо вещественный, два других могут быть либо вещественными, либо комплексно сопряженными. С практической точки зрения выгодно, чтобы все корни были бы вещественными, ибо в этом случае идет плавный (без крутильных колебаний) разгон центрифуги. Выясним при каких условиях все корни (3.2.11) будут вещественны. Очевидно, что для этого необходимо, чтобы функция $\mathcal{F}(p)$ имела бы два экстремума, т.е. уравнение

$$\mathcal{F}'(p) \equiv 3\lambda_b\lambda_a p^2 + 2\lambda\eta_b p + c_3\lambda_b = 0 \quad (3.2.12)$$

имело бы два вещественных решения. Для этого, в свою очередь необходима положительность дискриминанта этого уравнения

$$4\lambda^2\eta_b^2 - 12\lambda_b^2\lambda_a c_3 > 0 \quad \implies \quad \eta_b^2 > \frac{3c_3\lambda_a\lambda_b^2}{(\lambda_a + \lambda_b)^2} \quad (3.2.13)$$

Условие (3.2.13) является только необходимым, но не достаточным. Тем не менее, оно все же любопытно. Разработчикам центрифуг хорошо известно, что для улучшения качества работы центрифуги надо по возможности увеличивать мощность двигателя, которая характеризуется параметром η_b . Значение $\eta_b = \infty$ соответствует двигателю неограниченной мощности. Вместе с тем, никаких неравенств типа (3.2.13) разработчикам, по всей вероятности, не известно. Кроме того, известно, что нужно стремиться увеличивать осевой момент инерции несущего тела, на котором закреплен статор двигателя. Но количественных ограничений до сих пор не было установлено. И увеличение мощности двигателя, и увеличение осевого момента инерции λ_a несущего тела связаны с ростом веса центрифуги. Последний показатель очень важен для переносных медицинских центрифуг, используемых для очистки крови. Например, при землетрясении в Спитаке погибли свыше тысячи людей, большинство из которых погибло в результате токсикации крови. Если бы после извлечения их из-под развалин удалось бы немедленно произвести очистку их крови с помощью центрифуги, то многие и многие остались бы в живых. Нередко медицинские центрифуги приходится поднимать, например, на шестой этаж к нетранспортабельному больному. Короче говоря, вес нельзя увеличивать без уменьшения потребительских свойств центрифуги и, следовательно неравенства типа (3.2.13), увязывающие между собой основные параметры центрифуги s_3 , η_b , λ_a очень важны при проектировании центрифуг. Отсутствие неравенств типа (3.2.13) в традиционных методиках расчета центрифуг объясняется тем, что методы динамики твердого тела в этих методиках практически не используются. Более того, применение этих методов в их классической трактовке без применения вектора поворота ведет к чрезвычайно громоздким уравнениям и вычислениям, на которые авторы потратили очень много времени и не сумели довести их до обозримых результатов. Правда, это относится не к случаю крутильно вращательных движений гиростата. Впрочем, мы отвлеклись, ибо вопросы проектирования реальных центрифуг выходят за рамки данной работы.

Условия (3.2.13) будут достаточными для существования трех отрицательных корней уравнения (3.2.11), если для отрицательных корней уравнения (3.2.12) $-p_1 > -p_2 > 0$ будут справедливы неравенства

$$\mathcal{F}(p_2) < 0 \quad \mathcal{F}(p_1) > 0$$

С теоретической точки зрения для нас важен только факт убывания переменных x и θ с ростом времени

$$t \rightarrow \infty \implies |\theta| \rightarrow 0 \quad |x| \rightarrow 0 \quad (3.2.14)$$

Условие (3.2.14) выполняется благодаря указанным выше условиям Рауса-Гурвица. При больших временах в силу (3.2.14) из последнего уравнения системы (3.2.10) следует, что ротор вращается с постоянной угловой скоростью

$$\dot{\alpha} = \omega_b \quad (3.2.15)$$

Этот режим стационарного вращения является основным рабочим режимом, например, центрифуги. Теперь необходимо исследовать устойчивость стационарных вращений.

3.3 Устойчивость стационарных вращений ротора гиростата на упругом основании

При стационарных вращениях вектор поворота θ равен нулю, а угловая скорость вращения ротора $\dot{\alpha} = \omega_b$ постоянна. Рассмотрим возмущенное движение гиростата, в котором вектор θ мал, а угловая скорость $\dot{\alpha} = \omega_b + \chi$, где χ мало по модулю. Линеаризуем систему (3.1.4)–(3.1.6) по θ и χ . При этом возмущенная Ω также мала. Тогда из (3.1.4)–(3.1.6) вытекает следующая система уравнений в вариациях

$$\mu \ddot{\theta} + \left((\lambda - \mu) \mathbf{k} \cdot \dot{\theta} + \lambda_b \chi \right) \mathbf{k} - \lambda_b \omega_b \mathbf{k} \times \dot{\theta} + c_1 (\theta - \mathbf{k} \cdot \theta \mathbf{k}) + c_3 (\mathbf{k} \cdot \theta) \mathbf{k} = \mathbf{0}, \quad (3.3.16)$$

$$\lambda_b \dot{\chi} + \eta_b \chi + \lambda_b \mathbf{k} \cdot \dot{\theta} = 0 \quad (3.3.17)$$

Вектор θ представим в виде суммы

$$\theta = \gamma + y \mathbf{k} \quad \gamma \cdot \mathbf{k} = 0 \quad (3.3.18)$$

Тогда система (3.3.16)–(3.3.17) распадается на две независимых системы

$$\mu \ddot{\gamma} - \lambda_b \omega_b \mathbf{k} \times \dot{\gamma} + c_1 \gamma = \mathbf{0} \quad \gamma \cdot \mathbf{k} = 0, \quad (3.3.19)$$

$$\lambda \ddot{y} + c_3 y + \lambda_b \dot{\chi} = 0,$$

$$\lambda_b \ddot{y} + \lambda_b \dot{\chi} + \eta_b \chi = 0 \quad (3.3.20)$$

Что касается системы (3.3.20), то она уже была исследована в предыдущем пункте, где было показано, что с ростом времени функции χ и y экспоненциально затухают. Поэтому остается исследовать уравнение (3.3.19). Оно линейно и потому для построения общего решения достаточно найти два линейно независимых частных решения. Последние будем искать в виде

$$\gamma = \mathbf{Q}(p \mathbf{k}) \cdot \mathbf{a} \quad \mathbf{a} = \text{const} \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{k} = 0 \quad (3.3.21)$$

Напомним, что тензор поворота допускает представление (2.1.8). Поэтому в развернутом виде выражение (3.3.21) имеет вид

$$\gamma = \cos p t \mathbf{a} + \sin p t \mathbf{k} \times \mathbf{a}$$

Геометрически (3.3.21) означает, что γ ищется в виде вектора, вращающегося вокруг \mathbf{k} с угловой скоростью p . Вычислим производные

$$\dot{\gamma} = p \mathbf{k} \times \gamma \quad \ddot{\gamma} = p \mathbf{k} \times (p \mathbf{k} \times \gamma) = -p^2 \gamma$$

Подставляя эти выражения в (3.3.19), получаем

$$(-\mu p^2 + \lambda_b \omega_b p + c_1) \gamma = 0,$$

т. е. пришли к характеристическому уравнению

$$\mu p^2 - \lambda_b \omega_b p - c_1 = 0 \quad (3.3.22)$$

Корни этого уравнения находятся по формулам

$$p_{1,2} = \frac{\lambda_b \omega_b \pm \sqrt{\lambda_b^2 \omega_b^2 + 4c_1 \mu}}{2\mu} \quad (3.3.23)$$

Отсюда видим, что p_1 и p_2 вещественны, но имеют разные знаки. Общее решение уравнения (3.3.19) имеет вид

$$\boldsymbol{\gamma} = Q(p_1 t \mathbf{k}) \cdot \mathbf{a}_1 + Q(p_2 t \mathbf{k}) \cdot \mathbf{a}_2 \quad \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{k} = 0 \quad \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{k} = 0 \quad (3.3.24)$$

Отсюда видим, что вектор $\boldsymbol{\gamma}$ есть суперпозиция двух вращающихся векторов, причем они вращаются в разных направлениях. Постоянные векторы \mathbf{a}_1 и \mathbf{a}_2 находятся по начальным условиям. При любых начальных условиях решение (3.3.24) остается ограниченным, т. е. режим стационарного вращения ротора гиростата является устойчивым. Заметим, однако, что этот вывод получен в предположении идеальной сбалансированности гиростата как статической (центр инерции расположен на оси симметрии гиростата), так и динамической, когда главная ось инерции несущего тела направлена по оси вращения. Полученное решение позволяет удовлетворить произвольным начальным условиям при условии малости начальных отклонений. Полный анализ решения будет проведен ниже.

3.4 Движения гиростата с неуравновешенным ротором при малых углах поворота несущего тела

Если гиростат рассматривать как простейшую модель центрифуги, то необходимо учитывать возможную неуравновешенность ротора. В этом случае рассматриваемую систему уже, строго говоря, нельзя назвать гиростатом, поскольку распределение масс в ней зависит от движения. С другой стороны, можно считать, что неуравновешенность возникает при подвешивании к ротору системы грузов, которые неуравновешены. При проектировании центрифуг важнейшей характеристикой является допустимый дисбаланс подвешиваемого груза. Чем больший дисбаланс допускает центрифуга, тем выше ее качество и потребительские свойства. В данной работе в качестве дисбаланса закрепим на роторе сосредоточенный груз массой M .

Тогда для вектора кинетического момента будем иметь выражение

$$\mathbf{K} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}^T \cdot \boldsymbol{\omega} + \mathbf{P}_b \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{P}_b^T \cdot \boldsymbol{\omega}_b + \mathbf{P}_b \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{P}_b^T \cdot \boldsymbol{\omega}_b \quad (3.4.25)$$

где

$$\mathbf{C} = Ml^2(\mathbf{E} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}), \quad (3.4.26)$$

причем \mathbf{n} является ортом вектора, направленного от неподвижного ротора, к сосредоточенному грузу, l есть расстояние от неподвижной точки до дисбаланса. Считаем, что вектор \mathbf{n} мало отличается от вектора \mathbf{k} . Представим вектор $l\mathbf{n}$ в виде

$$l\mathbf{n} = l_1 \mathbf{k} + l_2 \boldsymbol{\delta} \quad l_1^2 + l_2^2 = l^2 \quad |\boldsymbol{\delta}| = 1 \quad l_2^2 \ll l_1^2 \quad (3.4.27)$$

В дальнейшем тензор \mathbf{C} будем считать малым. Согласно (2.3.28) и (2.3.30) имеем

$$\mathbf{P}_b = \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}(\alpha \mathbf{k}) \quad \boldsymbol{\omega}_b = \boldsymbol{\omega} + \dot{\alpha} \mathbf{P} \cdot \mathbf{k} \quad (3.4.28)$$

Примем, что вектор поворота $\boldsymbol{\theta}$ несущего тела мал. Тогда

$$\mathbf{P} = \mathbf{E} + \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{E} \quad \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\gamma} + \gamma \mathbf{k} \quad \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{k} = 0 \quad (3.4.29)$$

Наиболее существенным отличием данного случая от предыдущего состоит в том, что тензор $\mathbf{Q}(\alpha \mathbf{k})$ не уходит из выражения для кинетического момента. Однако, при сделанных предположениях этот тензор попадет только в правую часть уравнений движения.

Угловые скорости несущего тела и ротора вычисляются по формулам

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\boldsymbol{\theta}} \quad \boldsymbol{\omega}_b = \dot{\boldsymbol{\theta}} + \dot{\alpha} \mathbf{k} + \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{k} \quad (3.4.30)$$

т. е. вектор $\boldsymbol{\omega}$ мал, а вектор $\boldsymbol{\omega}_b$ таковым не является. С учетом того, что последнее слагаемое в выражении (3.4.25) для кинетического момента мало из-за малости тензора \mathbf{C} , то в нем оставим только главную (не малую) часть вектора угловой скорости $\boldsymbol{\omega}_b$. Тогда линеаризованное по $\boldsymbol{\theta}$ выражение для кинематического момента после несложных выкладок принимает вид

$$\mathbf{K} = \lambda_b \dot{\alpha} \mathbf{k} + \mu \dot{\boldsymbol{\gamma}} + \lambda \dot{\gamma} \mathbf{k} - \lambda_b \dot{\alpha} \mathbf{k} \times \boldsymbol{\theta} + \mathbf{Q}(\alpha \mathbf{k}) \cdot \mathbf{C} \cdot \dot{\alpha} \mathbf{k} \quad (3.4.31)$$

Необходимо еще немного преобразовать последнее слагаемое в (3.4.31). Тензор \mathbf{C} , определенный формулой (3.4.26), перепишем в другом виде. Для этого вектор \mathbf{n} представим в виде разложения

$$\mathbf{n} = l_1 \mathbf{k} + l_2 \mathbf{m} \quad \mathbf{m} \cdot \mathbf{k} = 0 \quad l_1 = \cos u \quad l_2 = \sin u, \quad (3.4.32)$$

где u — угол между векторами \mathbf{n} и \mathbf{k} , $|u| \ll 1$. Тогда получим

$$\mathbf{C} \cdot \mathbf{k} = M l^2 (\mathbf{k} - \cos u (\cos u \mathbf{k} + \sin u \mathbf{m})) = -M l^2 (\cos u \sin u \mathbf{m} - \sin^2 u \mathbf{k}) \simeq -u M l^2 \mathbf{m}$$

Итак, в линейном приближении для вектора кинетического момента имеем выражение

$$\mathbf{K} = \lambda_b \dot{\alpha} \mathbf{k} + \mu \dot{\boldsymbol{\gamma}} + \lambda \dot{\gamma} \mathbf{k} - \lambda_b \dot{\alpha} \mathbf{k} \times \boldsymbol{\gamma} - u \dot{\alpha} M l^2 \mathbf{Q}(\alpha \mathbf{k}) \cdot \mathbf{m}, \quad (3.4.33)$$

где единичный вектор \mathbf{m} ортогонален \mathbf{k} . Примем дополнительно предположение, что двигатель имеет неограниченную мощность и в состоянии поддерживать заданную угловую скорость вращения ротора вокруг собственной оси. Тогда справедливо равенство

$$\dot{\alpha} = \omega_b = \text{const} \quad \alpha = \omega_b t \quad (3.4.34)$$

Запишем второй закон динамики

$$\dot{\mathbf{K}} + c_1 \boldsymbol{\gamma} + c_3 \gamma \mathbf{k} = 0$$

или в проекциях на ось \mathbf{k} и плоскость, ортогональную \mathbf{k} ,

$$\mu \ddot{\boldsymbol{\gamma}} - \lambda_b \omega_b \mathbf{k} \times \dot{\boldsymbol{\gamma}} + c_1 \boldsymbol{\gamma} = u M l^2 \omega_b^2 \mathbf{Q}(\alpha \mathbf{k}) \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{m}), \quad (3.4.35)$$

$$\lambda \ddot{y} + c_3 y = 0 \quad (3.4.36)$$

В качестве начальных условий принимаем

$$t = 0: \quad \boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma}_0 \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \dot{\boldsymbol{\gamma}}_0 \quad (3.4.37)$$

$$t = 0: \quad y = y_0 \quad \dot{y} = \dot{y}_0 \quad (3.4.38)$$

Решение задачи (3.4.36), (3.4.38) очевидно и имеет вид

$$y = y_0 \cos pt + \frac{\dot{y}_0}{p} \sin pt \quad p = \sqrt{c_3/\lambda} \quad (3.4.39)$$

Задача (3.4.35), (3.4.37) немногим сложнее. Частное решение неоднородного уравнения (3.4.36) ищем в виде

$$\boldsymbol{\gamma}_* = A \mathbf{Q}(\alpha \mathbf{k}) \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{m}) \implies \dot{\boldsymbol{\gamma}}_* = \omega_b \mathbf{k} \times \boldsymbol{\gamma}_* \quad \ddot{\boldsymbol{\gamma}}_* = -\omega_b^2 \boldsymbol{\gamma}_*$$

Подставляя эти выражения в (3.4.35), получаем

$$(c_1 - (\mu - \lambda_b) \omega_b^2) A \mathbf{Q}(\alpha \mathbf{k}) \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{m}) = u M l^2 \omega_b^2 \mathbf{Q}(\alpha \mathbf{k}) \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{m})$$

Таким образом, частное решение уравнения (3.4.35) дается выражением

$$\boldsymbol{\gamma}_* = \frac{u M l^2 \omega_b^2}{c_1 - (\mu - \lambda_b) \omega_b^2} \mathbf{Q}(\alpha \mathbf{k}) \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{m}) \quad (3.4.40)$$

Общее решение однородного уравнения, соответствующего (3.4.35) уже было найдено в п. 3.3. Таким образом, общее решение (3.4.35) имеет вид

$$\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{Q}(p_1 t \mathbf{k}) \cdot \mathbf{a}_1 + \mathbf{Q}(p_2 t \mathbf{k}) \cdot \mathbf{a}_2 + \frac{u M l^2 \omega_b^2}{c_1 - (\mu - \lambda_b) \omega_b^2} \mathbf{Q}(\omega_b t \mathbf{k}) \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{m}) \quad (3.4.41)$$

где величины p_1 и p_2 определены выражением (3.3.23). По (3.4.41) вычисляем

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}} = p_1 \mathbf{k} \times \mathbf{Q}(p_1 t \mathbf{k}) \cdot \mathbf{a}_1 + p_2 \mathbf{k} \times \mathbf{Q}(p_2 t \mathbf{k}) \cdot \mathbf{a}_2 + \omega_b \mathbf{k} \times \frac{u M l^2 \omega_b^2}{c_1 - (\mu - \lambda_b) \omega_b^2} \mathbf{Q}(\omega_b t \mathbf{k}) \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{m})$$

Теперь мы можем найти постоянные векторы \mathbf{a}_1 и \mathbf{a}_2 по начальным условиям (3.4.37)

$$\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \frac{u M l^2 \omega_b^2}{c_1 - (\mu - \lambda_b) \omega_b^2} \mathbf{k} \times \mathbf{m} = \boldsymbol{\gamma}_0, \quad (3.4.42)$$

$$p_1 \mathbf{k} \times \mathbf{a}_1 + p_2 \mathbf{k} \times \mathbf{a}_2 + \mathbf{k} \times \frac{u M l^2 \omega_b^2}{c_1 - (\mu - \lambda_b) \omega_b^2} (\mathbf{k} \times \mathbf{m}) = \dot{\boldsymbol{\gamma}}_0$$

Последнее условие удобнее переписать в другой форме, которая получается после векторного умножения обеих частей этого условия на вектор \mathbf{k}

$$p_1 \mathbf{a}_1 + p_2 \mathbf{a}_2 + \frac{u M l^2 \omega_b^2}{c_1 - (\mu - \lambda_b) \omega_b^2} \mathbf{k} \times \mathbf{m} = -\mathbf{k} \times \dot{\boldsymbol{\gamma}}_0 \quad (3.4.43)$$

Решение системы (3.4.42) и (3.4.43) выписывается стандартным образом, но здесь оно не приводится. Из решения (3.4.41) видим, что в неуравновешенном гиростате могут возникать резонансы при $\mu > \lambda$, но могут и не возникать, если $\lambda \geq \mu$. В реальных центрифугах, как правило, экваториальный момент инерции μ в несколько раз превышает значение осевого момента инерции λ . Поэтому в реальных центрифугах все-таки приходится проходить через резонанс, что приводит к возникновению крайне нежелательных поперечных колебаний. Амплитудно-частотная характеристика системы имеет достаточно стандартный вид с одним пиком на резонансной частоте

$$\omega_b^2 = \frac{c_1}{\mu - \lambda_b} \quad (3.4.44)$$

Экспериментальные данные показывают, что характер амплитудно-частотной характеристики несколько иной. А именно, вблизи частоты (3.4.44) имеется два ярко выраженных пика. Причина этого явления в том, что, как будет показано позднее, тензор инерции несущего тела нельзя считать трансверсально-изотропным.

3.5 Определение углов Эйлера

В предыдущем пункте задача решалась в терминах вектора поворота. В динамике твердого тела значительно более распространенными являются углы Эйлера. Различие этих двух подходов весьма значительны. Даже для малого вектора поворота углы Эйлера оказываются немалыми. Более того, даже при малых углах нутации подход, основанный на применении углов Эйлера, приводит к нелинейному уравнению для угла нутации. В этом пункте будет показано, как определить углы Эйлера по заданному вектору поворота.

Представим тензор поворота несущего тела через углы Эйлера

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q}(\psi \mathbf{k}) \cdot \mathbf{Q}(\vartheta \mathbf{e}) \cdot \mathbf{Q}(\varphi \mathbf{k}) = \mathbf{Q}(\vartheta \mathbf{e}') \cdot \mathbf{Q}(\beta \mathbf{k}), \quad (3.5.45)$$

где

$$\beta = \varphi + \psi \quad \mathbf{e}' = \mathbf{Q}(\psi \mathbf{k}) \cdot \mathbf{e} \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{e} = 0 \quad (3.5.46)$$

Найдем вектор поворота, отвечающий композиции (3.5.45) с учетом того, что угол нутации ϑ и угол $\beta = \varphi + \psi$ являются малыми, хотя ни угол прецессии ψ , ни угол собственного вращения φ малыми не являются. Для малых ϑ и β имеем

$$\mathbf{P} = (\mathbf{E} + \vartheta \mathbf{e}' \times \mathbf{E}) \cdot (\mathbf{E} + \beta \mathbf{k} \times \mathbf{E}) = \mathbf{E} + (\vartheta \mathbf{e}' + \beta \mathbf{k}) \times \mathbf{E} + \text{малые 2-го порядка}$$

Отсюда видим, что в обозначениях п. 3.4

$$\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\gamma} + \mathbf{y} \mathbf{k} = \vartheta \mathbf{e}' + \beta \mathbf{k} \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{\gamma} = \vartheta \mathbf{Q}(\psi \mathbf{k}) \cdot \mathbf{e} \quad \mathbf{y} = \beta \quad (3.5.47)$$

Вращающийся вектор нутации $\boldsymbol{\gamma}$ был найден в предыдущем пункте — выражение (3.4.41). Согласно (3.4.41) и (3.5.47) имеем

$$\vartheta \mathbf{Q}(\psi \mathbf{k}) \cdot \mathbf{e} = \mathbf{Q}(p_1 t \mathbf{k}) \cdot \mathbf{a}_1 + \mathbf{Q}(p_2 t \mathbf{k}) \cdot \mathbf{a}_2 + \frac{u M l^2 \omega_b^2}{c_1 - (\mu - \lambda_b) \omega_b^2} \mathbf{Q}(\omega_b t \mathbf{k}) \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{m})$$

или после умножения этого равенства на $\mathbf{Q}^T(\psi\mathbf{k})$ слева

$$\vartheta\mathbf{m} = \mathbf{Q}((p_1t - \psi)\mathbf{k}) \cdot \mathbf{a}_1 + \mathbf{Q}((p_2t - \psi)\mathbf{k}) \cdot \mathbf{a}_2 + \frac{uMl^2\omega_b^2}{c_1 - (\mu - \lambda_b)\omega_b^2} \mathbf{Q}((\omega_b t - \psi)\mathbf{k}) \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{m}) \quad (3.5.48)$$

Здесь принято $\mathbf{e} = \mathbf{m}$, т. к. выбор единичного вектора \mathbf{e} в (3.5.45) безразличен при условии, что $\mathbf{e} \cdot \mathbf{k} = 0$. Регулярной прецессией называют движение, при котором угол нутации сохраняет постоянное значение. Из выражения (3.5.48) видно, что регулярная прецессия возможна в следующих трех случаях

- а) $\psi = p_1t$, $\mathbf{a}_2 = \mathbf{0}$, $M = 0$ (дисбаланс отсутствует);
- б) $\psi = p_2t$, $\mathbf{a}_1 = \mathbf{0}$, $M = 0$ (дисбаланс отсутствует);
- в) $\psi = \omega_b t$, $\mathbf{a}_1 = \mathbf{0}$, $\mathbf{a}_2 = \mathbf{0}$ (чисто вынужденное вращение).

Все три случая реализуются только при специальных начальных условиях.

Вернемся к определению углов Эйлера. Угол нутации ϑ и угол прецессии ψ находятся из неравенства (3.5.48). Конкретное определение углов Эйлера проведем для частного случая начальных условий. Кроме того, будем считать, что дисбаланс отсутствует $M = 0$. С принципиальной точки зрения принимаемые упрощения совершенно несущественны, но они сильно упрощают конкретные вычисления.

Итак, принимаем

$$t = 0: \quad \boldsymbol{\gamma} = \vartheta_0\mathbf{m} \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \mathbf{0} \quad (3.5.49)$$

Условия (3.4.42)–(3.4.43) при принятых ограничениях записываются в виде

$$\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 = \vartheta_0\mathbf{m} \quad p_1\mathbf{a}_1 + p_2\mathbf{a}_2 = \mathbf{0} \quad (3.5.50)$$

Решение этой системы дается выражениями

$$\mathbf{a}_1 = -\frac{\vartheta_0 p_2}{p_1 - p_2} \mathbf{m} \quad \mathbf{a}_2 = \frac{\vartheta_0 p_1}{p_1 - p_2} \mathbf{m} \quad (3.5.51)$$

Выражение (3.5.48) с учетом (3.5.51) и условия $M = 0$ переписывается в виде

$$\vartheta\mathbf{m} = \frac{\vartheta_0}{p_1 - p_2} \left[-p_2\mathbf{Q}((p_1t - \psi)\mathbf{k}) + p_1\mathbf{Q}((p_2t - \psi)\mathbf{k}) \right] \cdot \mathbf{m} \quad (3.5.52)$$

Равенство (3.5.52) эквивалентно двум скалярным уравнениям, которые можно записать в виде

$$\vartheta = \frac{\vartheta_0}{p_1 - p_2} \left[(p_1 \cos p_2t - p_2 \cos p_1t) \cos \psi + (p_1 \sin p_2t - p_2 \sin p_1t) \sin \psi \right] \quad (3.5.53)$$

$$0 = (p_1 \sin p_2t - p_2 \sin p_1t) \cos \psi - (p_1 \cos p_2t - p_2 \cos p_1t) \sin \psi \quad (3.5.54)$$

Рассмотрим сначала равенство (3.5.54). Введем обозначения

$$A \stackrel{\text{def}}{=} p_1 \cos p_2t - p_2 \cos p_1t \quad B \stackrel{\text{def}}{=} p_1 \sin p_2t - p_2 \sin p_1t \quad (3.5.55)$$

Тогда нетрудно получить, что

$$A^2 + B^2 = (p_1 - p_2)^2 + 2p_1p_2(1 - \cos(p_1 - p_2)t) \quad (3.5.56)$$

Согласно (3.3.23) имеем

$$\begin{aligned} p_1 - p_2 &= \frac{1}{\mu} \sqrt{\lambda_b^2 \omega_b^2 + 4c_1 \mu} > 0, \\ p_1 p_2 &= c_1 / \mu < 0 \quad p_1 + p_2 = \lambda_b \omega_b / \mu > 0 \end{aligned} \quad (3.5.57)$$

С учетом этих неравенств получаем

$$A^2 + B^2 \geq (p_1 - p_2)^2 + 4p_1 p_2 = (p_1 + p_2)^2$$

Если $\omega_b \neq 0$, то $A^2 + B^2 > 0$. Рассмотрим два случая: 1) $\omega_b = 0$ и 2) $\omega_b \neq 0$.

В первом случае $p_2 = -p_1$ и уравнение (3.5.54) дает

$$2 \cos p_1 t \sin \psi = 0 \implies \sin \psi = 0 \implies \psi(t) = 0$$

Других значений ψ быть не может, если допустить, что функция $\psi(t)$ непрерывна. На самом деле это допущение окажется неверным, но об этом речь пойдет ниже.

Если $\psi = 0$, то равенство (3.5.53) дает выражение для угла нутации

$$\vartheta = \vartheta_0 \cos p_1 t, \quad (3.5.58)$$

т. е. получили обычное колебание физического маятника. Обратим внимание, что угол нутации по (3.5.58) знакопеременная функция.

Рассмотрим второй случай, когда $\omega_b \neq 0$. В этом случае $A^2 + B^2$ строго больше нуля и уравнение (3.5.54) можно переписать в виде

$$\frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \cos \psi - \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \sin \psi = 0$$

Введем функцию $\alpha(t)$ такую, что

$$\sin \alpha = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad \cos \alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad (3.5.59)$$

Поскольку $B(0) = 0$, $A(0) = p_1 - p_2 > 0$, то $\alpha(0) = 0$. В обозначениях (3.5.59) уравнению (3.5.54) придаем вид

$$\sin(\psi - \alpha) = 0 \implies \psi(t) = \alpha(t) \quad (3.5.60)$$

Здесь использованы начальные условия $\psi(0) = \alpha(0) = 0$. Итак, получили, что

$$\cos \psi = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{p_1 \cos p_2 t - p_2 \cos p_1 t}{\sqrt{(p_1 - p_2)^2 + 2p_1 p_2 (1 - \cos(p_1 - p_2)t)}} \quad (3.5.61)$$

$$\sin \psi = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{p_1 \sin p_2 t - p_2 \sin p_1 t}{\sqrt{(p_1 - p_2)^2 + 2p_1 p_2 (1 - \cos(p_1 - p_2)t)}} \quad (3.5.62)$$

Подставляя (3.5.62) и (3.5.61) в (3.5.53), получаем выражение для угла нутации ϑ

$$\vartheta(t) = \frac{\vartheta_0}{p_1 - p_2} \sqrt{(p_1 - p_2)^2 + 2p_1 p_2 (1 - \cos(p_1 - p_2)t)} \quad (3.5.63)$$

Это выражение получено в предположении, что ω_b не равно нулю, но величина $\omega_b > 0$ может быть сколь угодно малой. Поэтому естественно думать, что выражение (3.5.63) не потеряет смысл и в пределе при $\omega_b \rightarrow 0$.

Устремляя в (3.5.63) величину ω_b к нулю, получаем

$$\vartheta_*(t) = \vartheta_0 |\cos p_1 t| \quad (3.5.64)$$

Сравнивая (3.5.64) с (3.5.58), замечаем, что они существенно различаются между собой. Следовательно, где-то была допущена ошибка или принято неверное допущение. Возвращаясь к выводу соотношения (3.5.58), обращаем внимание, что оно было получено в предположении, что функция $\psi(t)$ непрерывна. Действительно ли это так? Проанализируем выражения (3.5.61) и (3.5.62) при $\omega_b \rightarrow 0$, т. е. при $p_2 \rightarrow -p_1$. Выражение (3.5.62) при $\omega_b \rightarrow 0$ дает, что

$$\sin \psi = 0 \quad (3.5.65)$$

Выражение (3.5.61) при $\omega_b \rightarrow 0$, т. е. при $p_2 \rightarrow -p_1$, приводит к соотношению

$$\cos \psi = \frac{2p_1 t \cos p_1 t}{2p_1 t |\cos p_1 t|} = \text{sign}(\cos p_1 t) \quad (3.5.66)$$

Из (3.5.65) и (3.5.66) следует, что функция $\psi(t)$ в пределе при $\omega_b \rightarrow 0$ является периодической с периодом 2π , но при этом она оказывается разрывной

$$\psi(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq p_1 t < \pi/2; \\ \pi, & \pi/2 < p_1 t < 3\pi/2; \\ 0, & 3\pi/2 < p_1 t \leq 2\pi \end{cases} \quad (3.5.67)$$

Появление разрывных функций при описании поворотов в ситуациях, когда физический процесс непрерывен, есть особенность, которую следует помнить. Впервые на факт появления разрывов у углов Эйлера, видимо, было указано в дипломной работе С.А.Сорокина. Угол прецессии по заданному вектору поворота γ можно найти другим способом. А именно, по (3.5.47) имеем

$$\gamma(t) = \vartheta(t) \mathbf{Q}(\psi(t) \mathbf{k}) \cdot \mathbf{e} \quad \mathbf{e} = \text{const}$$

Дифференцируя это выражение по времени, получаем

$$\dot{\gamma}(t) = \dot{\vartheta} \mathbf{Q}(\psi \mathbf{k}) \cdot \mathbf{e} + \dot{\psi} \mathbf{k} \times \vartheta \mathbf{Q}(\psi \mathbf{k}) \cdot \mathbf{e} = \frac{\dot{\vartheta}}{\vartheta} \gamma + \dot{\psi} \mathbf{k} \times \gamma$$

Умножая обе части этого равенства векторно на γ , получаем

$$\dot{\psi} = \frac{1}{|\gamma|^2} \gamma \times \dot{\gamma} \quad |\gamma|^2 = \vartheta^2$$

После несложных вычислений это выражение принимает вид

$$\dot{\psi} = \frac{p_1 p_2 (p_1 + p_2) (1 - \cos(p_1 - p_2)t)}{(p_1 - p_2)^2 + 2p_1 p_2 (1 - \cos(p_1 - p_2)t)} \quad (3.5.68)$$

Это выражение, конечно, можно получить из (3.5.61) и (3.5.62), продифференцировав, например, (3.5.62) и затем воспользовавшись (3.5.61).

Скорость прецессии $\dot{\psi}(t)$, определенная выражением (3.5.68), непрерывна, если знаменатель в (3.5.68) не может обращаться в нуль. Последнее возможно только при $\omega_b = 0$, т. е. при $p_1 + p_2 = 0$. При этом скорость прецессии $\dot{\psi}$ равна нулю при всех t , при которых знаменатель в (3.5.68) не обращается в нуль. Запишем выражение (3.5.68) в момент времени $t = \pi/(2p_1)$

$$\dot{\psi} = \frac{p_1 p_2 (p_1 + p_2) \left(1 - \sin \frac{p_2 \pi}{p_1} \frac{\pi}{2}\right)}{(p_1 - p_2)^2 + 2p_1 p_2 \left(1 - \sin \frac{p_2 \pi}{p_1} \frac{\pi}{2}\right)}$$

Раскрывая здесь неопределенность получаем, что при $p_2 \rightarrow -p_1$ скорость прецессии равна ∞ . Если же $t \neq \pi/(2p_1)$, то скорость прецессии при $p_2 \rightarrow -p_1$ обращается в нуль. Найдем траекторию апекса, т. е. точки, лежащей на верхнем конце оси ротора. Если расстояние от неподвижной точки до апекса обозначить через l , то вектор положения \mathbf{R}_a апекса определяется выражением

$$\mathbf{R}_a = l\mathbf{P}_b \cdot \mathbf{k} = l\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}(\alpha\mathbf{k}) \cdot \mathbf{k} = l\mathbf{P} \cdot \mathbf{k}$$

Вектор положения \mathbf{R}_a определяется только тензором поворота несущего тела. Для малых поворотов имеем

$$\mathbf{R}_a = l\mathbf{P} \cdot \mathbf{k} = l(\mathbf{E} + \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{k} = l(\mathbf{k} + \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{k}) = l(\mathbf{k} + \boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{k})$$

Поскольку для вращающегося вектора нутации имеем выражение (3.5.47), то вектор \mathbf{R}_a можно представить в виде

$$\mathbf{R}_a = l \left[\mathbf{k} + (\boldsymbol{\vartheta} \mathbf{Q}(\psi \mathbf{k}) \cdot \mathbf{m}) \times \mathbf{k} \right] = l \mathbf{Q}(\psi \mathbf{k}) \cdot (\mathbf{k} + \boldsymbol{\vartheta} \mathbf{m} \times \mathbf{k})$$

Введем ортонормированную тройку векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{k}$ так, чтобы

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{m} \quad \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{k}$$

Тогда вектор \mathbf{R}_a можно переписать в форме

$$\mathbf{R}_a = l \mathbf{Q}(\psi \mathbf{k}) \cdot (\mathbf{k} - \boldsymbol{\vartheta} \mathbf{e}_2) = l (\mathbf{k} - \boldsymbol{\vartheta} (\cos \psi \mathbf{e}_2 - \sin \psi \mathbf{e}_1)) = l (\mathbf{k} + x \mathbf{e}_1 + y \mathbf{e}_2) \quad (3.5.69)$$

где

$$\begin{aligned} x &= \boldsymbol{\vartheta} \sin \psi = \frac{\vartheta_0}{p_1 - p_2} (p_1 \sin p_2 t - p_2 \sin p_1 t), \\ y &= -\boldsymbol{\vartheta} \cos \psi = -\frac{\vartheta_0}{p_1 - p_2} (p_1 \cos p_2 t - p_2 \cos p_1 t) \end{aligned} \quad (3.5.70)$$

Этими выражениями определяется проекция траектории апекса на плоскость, ортогональную \mathbf{k} . Введем обозначения

$$p_2 = -p_1(1 - \varepsilon) \quad \varepsilon = \frac{p_1 + p_2}{p_1} = \frac{2\lambda_b \omega_b}{\lambda_b \omega_b + \sqrt{\lambda_b^2 \omega_b^2 + 4c_1 \mu}} \quad \tau = p_1 t \quad (3.5.71)$$

Тогда параметрическое задание траектории апекса (3.5.70) можно представить в виде

$$\begin{aligned}x &= -\frac{\vartheta_0}{2-\varepsilon} (\sin(1-\varepsilon)\tau - (1-\varepsilon)\sin\tau), \\y &= -\frac{\vartheta_0}{2-\varepsilon} (\cos(1-\varepsilon)\tau + (1-\varepsilon)\cos\tau)\end{aligned}\tag{3.5.72}$$

Параметр ε , как это видно из (3.5.71) меняется в пределах $0 < \varepsilon < 1$, причем с ростом скорости двигателя ω_b параметр ε приближается к единице. Траектории (3.5.72) при разных значениях параметра ε представлены на рис. 3.5.1–3.5.9. На рисунках множитель $(-\vartheta_0)$ принят равным единице.

Интересно оценить порядок параметра ε для каких-либо реальных значений ω_b и моментов инерции λ и μ . Примем следующие значения параметров, взятые для реально действующей медицинской низкооборотной центрифуги со скоростями $500 \text{ об/мин} < \omega_b < 5000 \text{ об/мин}$.

$$\lambda_b = 350 \text{ кг} \cdot \text{см}^2 \quad \mu = 300 \text{ кг} \cdot \text{см}^2 \quad c_1 = 17500 \text{ кг} \cdot \text{см}$$

Примем $\omega_b = 100 \text{ рад/сек}$, т.е. ω_b равна примерно 1000 об/мин . Тогда $\varepsilon \simeq 0.25$

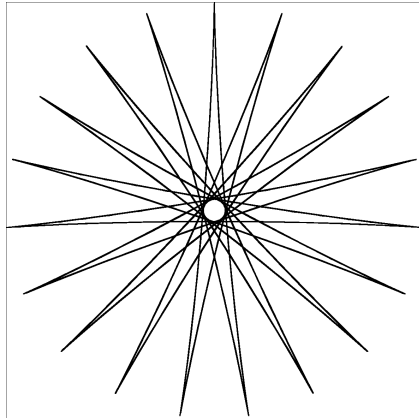


Рис. 3.5.1: Траектория апекса ротора при $\epsilon = 0.1$

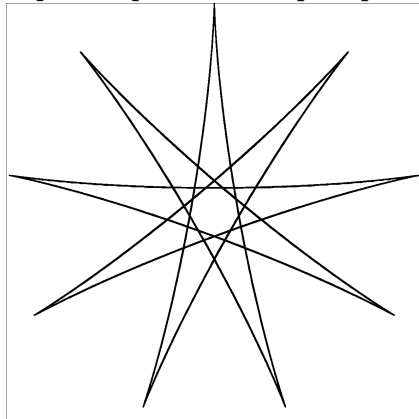


Рис. 3.5.2: Траектория апекса ротора при $\epsilon = 0.2$

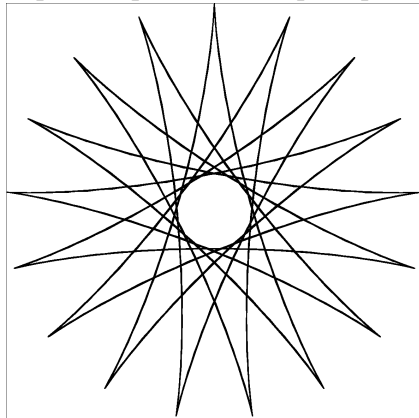


Рис. 3.5.3: Траектория апекса ротора при $\epsilon = 0.3$

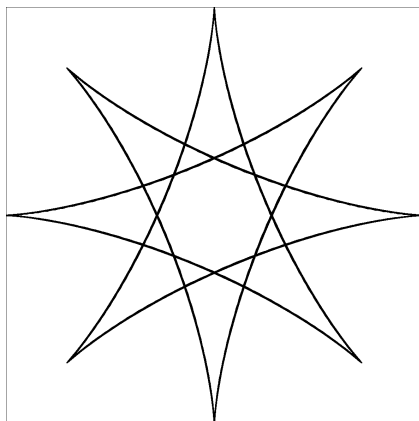


Рис. 3.5.4: Траектория апекса ротора при $\epsilon = 0.4$

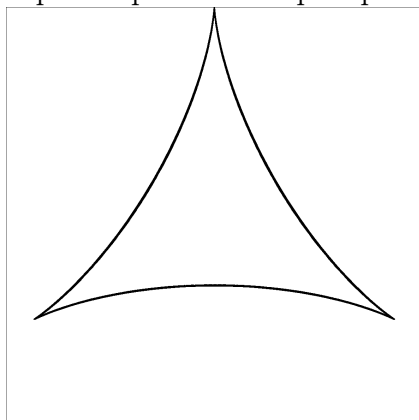


Рис. 3.5.5: Траектория апекса ротора при $\epsilon = 0.5$

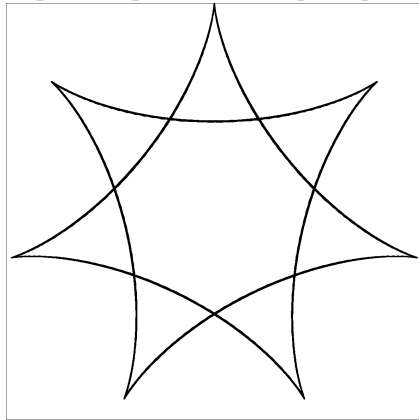


Рис. 3.5.6: Траектория апекса ротора при $\epsilon = 0.6$

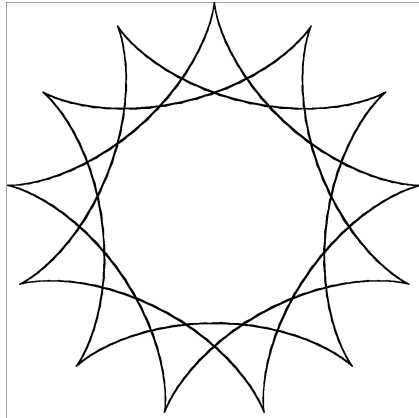


Рис. 3.5.7: Траектория апекса ротора при $\varepsilon = 0.7$

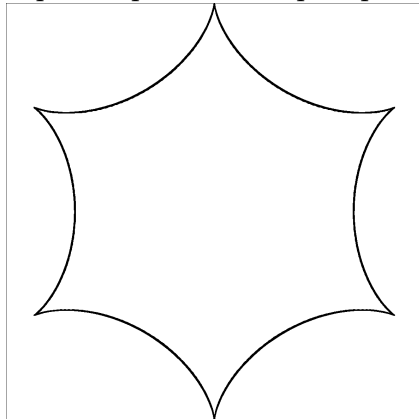


Рис. 3.5.8: Траектория апекса ротора при $\varepsilon = 0.8$

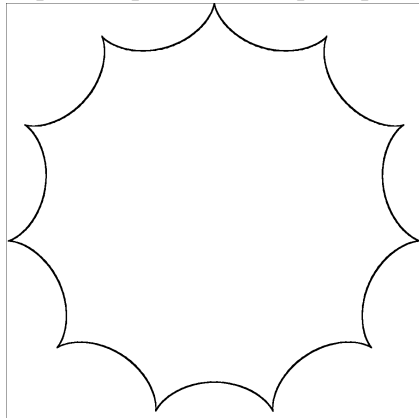


Рис. 3.5.9: Траектория апекса ротора при $\varepsilon = 0.9$

3.6 Движения гиростата на упругом основании при малых поворотах несущего тела с произвольным тензором инерции

При изготовлении центрифуг точности исполнения ротора и его балансировке уделяется особое внимание. Дисбаланс возникает из-за неточного распределения располагаемых на планшайбе (верхней части ротора) сепарируемых масс. Поэтому тензор инерции ротора вполне допустимо считать трансверсально изотропным с осью изотропии, направленной по оси ротора. Иначе обстоит дело с тензором инерции несущего тела, в котором закрепляется статор электродвигателя. Как правило, трансверсальную изотропию несущего тела обеспечить не удается. Впрочем к этому, видимо, никто и не стремится. Характерным при этом является то, что одна из главных осей тензора инерции несущего тела мало отличается от оси изотропного ротора. Это обстоятельство будет учтено ниже.

Тензор инерции несущего тела в соответствии со сказанным представим в виде спектрального разложения

$$\mathbf{A} = \lambda_a \mathbf{k} \otimes \mathbf{k} + A_1 \mathbf{d}_1 \otimes \mathbf{d}_1 + A_2 \mathbf{d}_2 \otimes \mathbf{d}_2 \quad (3.6.73)$$

Повторяя рассуждения п. 3.4, для вектора кинетического момента получаем выражения

$$\mathbf{K} = \mathbf{D} \cdot \dot{\boldsymbol{\gamma}} + (\lambda \dot{y} + \lambda_b \dot{\alpha}) \mathbf{k} - \lambda_b \dot{\alpha} \mathbf{k} \times \boldsymbol{\gamma} - u \dot{\alpha} M l^2 \mathbf{Q}(\alpha \mathbf{k}) \cdot \mathbf{m}, \quad (3.6.74)$$

где помимо обозначений, принятых в п. 3.4, введен тензор

$$\mathbf{D} = (A_1 + \mu_b) \mathbf{d}_1 \otimes \mathbf{d}_1 + (A_2 + \mu_b) \mathbf{d}_2 \otimes \mathbf{d}_2 \quad \mathbf{d}_\alpha \cdot \mathbf{k} = 0 \quad (\alpha = 1, 2) \quad (3.6.75)$$

Теперь вместо уравнений (3.4.35), (3.4.36) имеем следующие

$$\mathbf{D} \cdot \ddot{\boldsymbol{\gamma}} - \lambda_b \omega_b \mathbf{k} \times \dot{\boldsymbol{\gamma}} + c_1 \boldsymbol{\gamma} = u M l^2 \omega_b^2 \mathbf{Q}(\alpha \mathbf{k}) \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{m}), \quad (3.6.76)$$

$$\lambda \ddot{y} + c_3 y = 0 \quad (3.6.77)$$

Как видим изменение произошло только в уравнении (3.6.76) — оно несколько усложнилось. Решение (3.6.76) уже нельзя построить столь же красиво как для уравнения (3.4.35). Решение однородного уравнения (3.6.76) ищем в стандартном виде

$$\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{a} e^{i p t} \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{k} = 0 \quad (3.6.78)$$

Подставляя (3.6.78) с отброшенной правой частью, получаем

$$(-p^2 \mathbf{D} \cdot \mathbf{a} - i \lambda_b \omega_b p \mathbf{k} \times \mathbf{a} + c_1 \mathbf{a}) e^{i p t} = 0$$

Получили однородную систему линейных уравнений для плоского ($\mathbf{k} \cdot \mathbf{a} = 0$) комплексного вектора \mathbf{a} . Определитель этой системы должен равняться нулю

$$\det (c_1 (\mathbf{E} - \mathbf{k} \otimes \mathbf{k}) - i \lambda_b \omega_b p \mathbf{k} \times \mathbf{E} - p^2 \mathbf{D}) = 0$$

В явном виде это уравнение записывается так

$$\theta_1 \theta_2 p^4 - S p^2 + c_1^2 = 0, \quad (3.6.79)$$

где

$$S = c_1(\theta_1 + \theta_2) + \lambda_b^2 \omega_b^2 \quad \theta_1 = A_1 + \mu_b \quad \theta_2 = A_2 + \mu_b \quad (3.6.80)$$

Корни уравнения (3.6.79) имеют вид

$$p^2 = \frac{S \pm \sqrt{S^2 - 4\theta_1 \theta_2 c_1^2}}{2\theta_1 \theta_2} > 0 \quad (3.6.81)$$

Положительность и вещественность p^2 следует из положительности подкоренного выражения

$$S^2 - 4c_1^2 \theta_1 \theta_2 = c_1^2 (\theta_1 - \theta_2)^2 + 2c_1^2 (\theta_1 + \theta_2) \lambda_b^2 \omega_b^2 + \lambda_b^4 \omega_b^4 > 0$$

Таким образом, имеем колебательный характер движения. Осталось построить частное решение уравнения (3.6.76). Для этого спроецируем уравнение (3.6.76) на главные оси тензора \mathbf{D} , при этом вектор $\boldsymbol{\gamma}$ представим в виде разложения

$$\boldsymbol{\gamma} = \gamma_1 \mathbf{d}_1 + \gamma_2 \mathbf{d}_2 \quad \mathbf{m} = m_1 \mathbf{d}_1 + m_2 \mathbf{d}_2$$

Векторное уравнение (3.6.76) эквивалентно двум скалярным

$$\begin{aligned} \theta_1 \ddot{\gamma}_1 + \lambda_b \omega_b \dot{\gamma}_2 + c_1 \gamma_1 &= -u M l^2 \omega_b^2 (\cos \alpha m_2 + \sin \alpha m_1), \\ \theta_2 \ddot{\gamma}_2 - \lambda_b \omega_b \dot{\gamma}_1 + c_1 \gamma_2 &= u M l^2 \omega_b^2 (\cos \alpha m_1 - \sin \alpha m_2), \end{aligned} \quad (3.6.82)$$

где $\alpha = \omega_b t$.

Частные решения можно искать для двух случаев:

$$\text{а) } m_1 \neq 0, \quad m_2 = 0 \quad \text{и} \quad \text{б) } m_1 = 0, \quad m_2 \neq 0$$

Рассмотрим первый случай, когда $m_1 \neq 0, m_2 = 0$. Частное решение ищем в виде

$$\gamma_1 = \Gamma_1 \sin \omega_b t \quad \gamma_2 = \Gamma_2 \cos \omega_b t$$

Подставляя эти выражения в (3.6.82) получаем

$$\begin{aligned} (c_1 - \omega_b^2 \theta_1) \Gamma_1 - \lambda_b \omega_b^2 \Gamma_2 &= -u M l^2 \omega_b^2 m_1, \\ -\lambda_b \omega_b^2 \Gamma_1 + (c_1 - \omega_b^2 \theta_2) \Gamma_2 &= u M l^2 \omega_b^2 m_1 \end{aligned} \quad (3.6.83)$$

Резонансные частоты определяются как нули определителя этой системы. Решая последнюю, получаем

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= -u M l^2 \omega_b^2 m_1 \frac{c_1 - (\theta_2 + \lambda_b) \omega_b^2}{(c_1 - \omega_b^2 \theta_1)(c_1 - \omega_b^2 \theta_2) - \lambda_b^2 \omega_b^4}, \\ \Gamma_2 &= u M l^2 \omega_b^2 m_1 \frac{c_1 - (\theta_1 + \lambda_b) \omega_b^2}{(c_1 - \omega_b^2 \theta_1)(c_1 - \omega_b^2 \theta_2) - \lambda_b^2 \omega_b^4} \end{aligned} \quad (3.6.84)$$

Из (3.6.84) видно, что в данном случае имеются два резонанса, частоты которых определяются по формулам

$$\omega_b^2 = \frac{c_1}{2(\theta_1\theta_2 - \lambda_b^2)} \left((\theta_1 + \theta_2) \pm \sqrt{(\theta_1 - \theta_2)^2 + 4\lambda_b^2} \right) \quad (3.6.85)$$

Если в (3.6.85) положить $\theta_1 = \theta_2 = \theta$, т. е. принять трансверсальную изотропию, то получим два значения для ω_b^2

$$\omega_{b,1}^2 = \frac{c_1}{\theta - \lambda_b} \quad \omega_{b,2}^2 = \frac{c_1}{\theta + \lambda_b} \quad (3.6.86)$$

Случай трансверсальной изотропии был рассмотрен в п. 3.4. Там было показано, что имеется всего один резонанс на частоте (3.4.44), совпадающий с правой из величин (3.6.86). Вторая частота в (3.6.86), казалось бы дает дополнительный резонанс, что находится в противоречии с анализом п. 3.4. На самом деле никакого противоречия нет, а вторая частота в (3.6.86) не является резонансной, в чем легко убедиться по формулам (3.6.84), числители которых при $\theta_1 = \theta_2$ начальной частоте $\omega_{b,2}^2$ также обращаются в нули.

Рассмотрим случай, близкий к трансверсальной изотропии, когда

$$\theta_1 = \theta \quad \theta_2 = \theta + \varepsilon\theta \quad 0 < \varepsilon \ll 1 \quad (3.6.87)$$

Тогда вместо (3.6.86) получаем с точностью до членов первого порядка малости

$$\omega_{b,1}^2 = \frac{c_1}{\theta - \lambda_b} \left(1 - \frac{\varepsilon\theta}{\theta - \lambda_b} \right) \quad \omega_{b,2}^2 = \frac{c_1}{\theta + \lambda_b} \left(1 - \frac{\varepsilon\theta}{\theta + \lambda_b} \right) \quad (3.6.88)$$

Эти частоты уже обе являются резонансными. Обратим внимание на следующее обстоятельство. Осевой момент ротора λ_b , как правило, значительно меньше экваториального момента $\theta = \mu_a + \mu_b$ всего гиростата $\lambda \ll \theta$. Поэтому на самом деле частоты (3.6.88) оказываются близкими.

На рис. 3.6.1 показана типичная амплитудно-частотная характеристика центрифуги, снятая экспериментально.

В п. 3.4 было показано, что для трансверсально изотропного тензора инерции амплитудно-частотная характеристика имеет один пик на частоте (3.4.42), совпадающей при $\varepsilon = 0$ с частотой $\omega_{b,1}$. Характерное раздвоение пика на осциллограмме на предварительном этапе (до решения задачи аналитически) объяснялось следующим образом. Для трансверсально изотропного тензора инерции имеем кратную собственную частоту и один пик. При малом отклонении от трансверсальной изотропии эти кратные частоты слегка раздвигаются и возникают два пика, показанные на рис. 3.6.1.

Однако уже первые расчеты, приведенные в п. 3.4, показали, что это объяснение является неправильным. При трансверсально изотропном тензоре инерции малые колебания гиростата с жестко закрепленным ротором действительно имеют кратную собственную частоту. Но при вращающемся роторе, как это видно из выражения (3.6.81), частоты раздвигаются и перестают быть кратными. Поэтому даже в этом случае амплитудно-частотная характеристика могла бы иметь два пика, если бы не особенность внешнего воздействия, отмеченная в

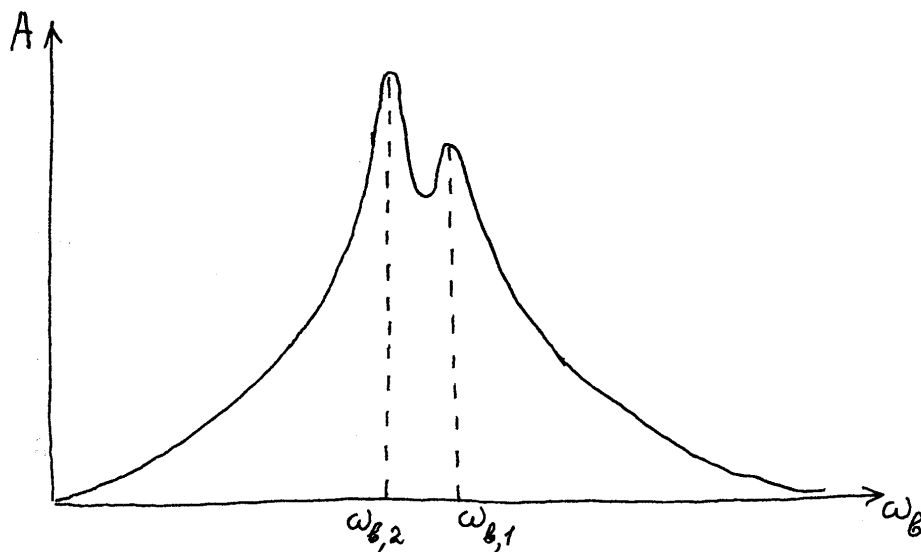


Рис. 3.6.1: Амплитудно-частотная характеристика реальной центрифуги.

рассуждении, следующим за формулами (3.4.38). Теоретическая амплитудно-частотная характеристика, вытекающая из (3.4.36) представлена на рис. 3.6.2.

Существующее трение ограничивает пики, а на частоте $\omega_{b,2}^0$ имеется антирезонанс. Поскольку частоты $\omega_{b,1}$ и $\omega_{b,2}$ близки, то антирезонансный провал в характеристике очень узкий и в эксперименте оказался незамеченным. После указанных трансформаций и получается кривая, очень похожая на экспериментальную кривую, представленную на рис. 3.6.1. Приведенное выше теоретическое объяснение наличия двух близких пиков на амплитудно-частотной характеристике, видимо, ранее не встречалось.

4 Вращение твердого тела на гибком стержне

4.1 Вводные замечания

В данной главе рассмотренный выше аппарат будет применен к анализу классического случая вращения твердого тела на безынерционном стержне. Хотя этот случай рассмотрен во многих работах, обзор которых можно найти в книге В.В.Болотина “Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости” [12], тем не менее многое здесь остается невыясненным. В то же время эта задача является одной из важнейших в практическом отношении, поскольку она моделирует динамическое поведение валов, которые играют центральную роль во многих машинах. Эксперименты далеко не всегда отвечают результатам известных теорий. В частности, в 1924 г. Ньюкирк обнаружил самовозбуждение поперечных колебаний вращающегося вала на частотах, отличных от критических. Тогда же Кимболл объяснил это явление наличием внутреннего трения в материале вала. Эта ситуация в 1937 г. была подробно изучена и описана в работе Е.Н.Николаи [105]. С тех пор утвердилось мнение о дестабилизирующей роли внутреннего трения [107]. Теоретические результаты проведенного

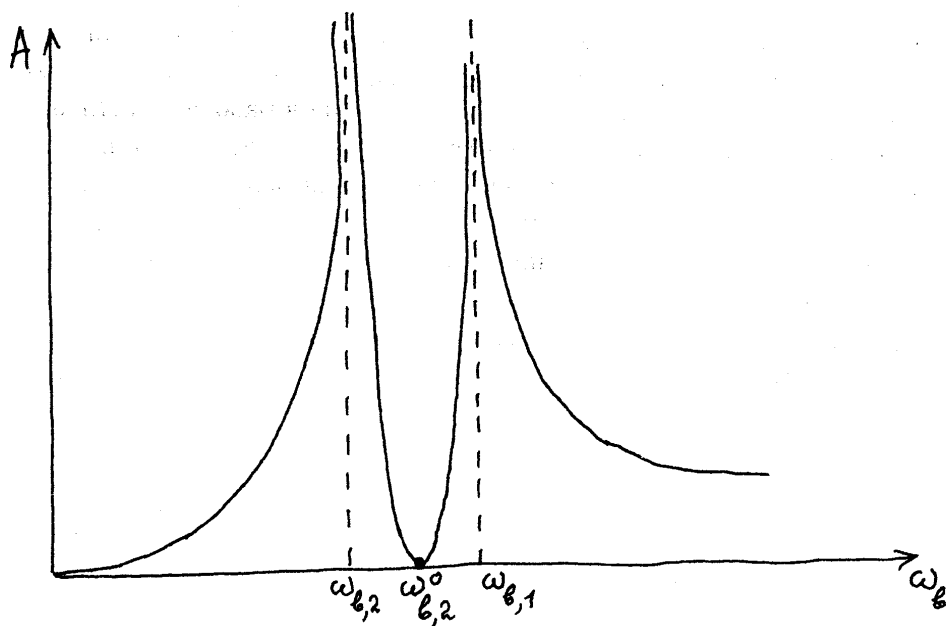


Рис. 3.6.2: Теоретическая амплитудно-частотная характеристика, $\omega_{b,2}^0 = \omega_{b,2}(\varepsilon = 0)$.

Е.Л.Николаи и многими другими авторами анализа, разумеется, не могут быть оспорены. Тем не менее, тот факт, что внутреннее трение способствует накачке энергии в систему, вместо того, чтобы ее рассеивать, все-таки вызывает некоторое удивление. Сомнения связаны, главным образом, с принятой моделью внутреннего трения. В самом деле, использование определяющего уравнения типа

$$\tau = C \cdot \cdot \varepsilon + B \cdot \cdot \dot{\varepsilon}$$

приводит к дифференциальным уравнениям параболического типа, что многими рассматривается как серьезный недостаток в фундаментальном плане. В 1947 г. появилась большая работа И.Б.Баргера [6], в которой экспериментально показано, что, несмотря на качественное совпадение результатов анализа Е.Л.Николаи с экспериментом, количественное несовпадение весьма значительно. Чтобы добиться количественного совпадения, И.Б.Баргер предложил использовать модель нелинейного внутреннего трения. После этого при высоких скоростях вращения удалось добиться хорошего количественного совпадения теории И.Б.Баргера с экспериментом. Однако эксперимент был недостаточно точным для того, чтобы судить о поведении системы при малых угловых скоростях, включая и область вблизи критической частоты вращения. Между тем, фотографии, приведенные в работе И.Б.Баргера, дают основание думать, что нарастание амплитуд поперечных колебаний начинается еще до первой критической частоты. Поэтому естественно предположить, что существуют и другие механизмы самовозбуждения поперечных колебаний во вращающихся валах, помимо внутреннего трения. Один такой механизм будет рассмотрен в данной главе.

4.2 Постановка задачи и основные уравнения

Рассмотрим твердое тело с трансверсально изотропным центральным тензором инерции

$$\mathbf{A} = \lambda \mathbf{k} \otimes \mathbf{k} + \mu (\mathbf{E} - \mathbf{k} \otimes \mathbf{k})$$

Будем считать, что центр масс тела расположен на оси симметрии тела. К центру масс тела жестко прикреплен гибкий стержень, так что поворот конечного поперечного стержня совпадает с поворотом тела. Второй конец стержня закреплен в подшипниках, которые допускают свободное вращение стержня вокруг собственной оси.

Стержень будем считать безынерционным и нерастяжимым, как это общепринято в литературе. Будем считать, что в недеформированном состоянии стержень прямолинеен и его ось направлена по единичному вектору \mathbf{k} . Положение поперечного сечения стержня в отсчетной (недеформированной) конфигурации будем определять координатой s : $0 \leq s \leq l$. Вектор положения точек стержня в отсчетной конфигурации будем обозначать вектором $\mathbf{r}(s) = s\mathbf{k}$. Вектор положения точек стержня в актуальной конфигурации будем обозначать символом $\mathbf{R}(s, t)$. Пусть векторы $\mathbf{N}(s, t)$ и $\mathbf{M}(s, t)$ обозначают векторы внутренних усилий и моментов в стержне.

Запишем уравнения движения безынерционного стержня, т.е. уравнения квазиравновесия

$$\mathbf{N}'(s, t) = \mathbf{0} \quad \mathbf{M}'(s, t) + \mathbf{R}'(s, t) \times \mathbf{N}(s, t) = \mathbf{0}; \quad \dot{\mathbf{f}} \stackrel{\text{def}}{=} \partial \mathbf{f} / \partial s \quad (4.2.1)$$

Соотношения упругости имеют вид [44]

$$\mathbf{M}(s, t) = \mathbf{P} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{P}^\top \cdot \Phi, \quad (4.2.2)$$

где $\mathbf{P}(s, t)$ есть тензор поворота поперечного сечения стержня, $\Phi(s, t)$ есть вектор изгиба-кручения, тензор жесткости \mathbf{C} считается трансверсально изотропным

$$\mathbf{C} = C_1 (\mathbf{E} - \mathbf{k} \otimes \mathbf{k}) + C_2 \mathbf{k} \otimes \mathbf{k}, \quad (4.2.3)$$

где C_1 и C_2 суть жесткости стержня на изгиб и кручение соответственно.

Вектор изгиба-кручения $\Phi(s, t)$ связан с тензором поворота уравнением Пуассона

$$\mathbf{P}'(s, t) = \Phi(s, t) \times \mathbf{P}(s, t) \quad \mathbf{R}' = \mathbf{P} \cdot \mathbf{k}, \quad (4.2.4)$$

где второе равенство выражает условие нерастяжимости. Векторы трансляционной $\mathbf{v}(s, t)$ и угловой $\boldsymbol{\omega}(s, t)$ скоростей определяются по формулам

$$\mathbf{v}(s, t) = \dot{\mathbf{R}}(s, t) \quad \dot{\mathbf{P}}(s, t) = \boldsymbol{\omega}(s, t) \times \mathbf{P}(s, t) \quad \dot{\mathbf{f}} \stackrel{\text{def}}{=} \partial \mathbf{f} / \partial t \quad (4.2.5)$$

Дифференцируя (4.2.4) по времени и учитывая (4.2.5), получаем

$$(\mathbf{P}')' = \dot{\Phi} \times \mathbf{P} + \Phi \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{P})$$

Дифференцируя второе уравнение в (4.2.5) и учитывая 424, получим

$$(\dot{\mathbf{P}})' = \boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{P} + \boldsymbol{\omega} \times (\Phi \times \mathbf{P})$$

Поскольку дифференцирования по координатам и времени перестановочны, то из последних двух уравнений следует равенство их правых частей

$$\dot{\Phi} \times \mathbf{P} + \Phi \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{P}) = \boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{P} + \boldsymbol{\omega} \times (\Phi \times \mathbf{P})$$

Умножая это равенство справа на \mathbf{P}^T , получаем

$$\dot{\Phi} \times \mathbf{E} + \Phi \times \mathbf{E} \times \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{E} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{E} \times \Phi$$

Вычисляя векторные инварианты от обеих частей этого равенства, получаем

$$-2\dot{\Phi} + \boldsymbol{\omega} \times \Phi = -2\boldsymbol{\omega}' + \Phi \times \boldsymbol{\omega}$$

или в другой форме

$$\dot{\Phi}(s, t) = \boldsymbol{\omega}'(s, t) + \boldsymbol{\omega} \times \Phi(s, t) \quad (4.2.6)$$

Уравнение (4.2.6) в геометрии известно под названием уравнений структуры Э.Картана. У нас они позволяют вычислять производные от вектора изгиба-кручения по времени. Уравнения (4.2.6) в механике принято называть кинематическими уравнениями совместности деформаций. Обратимся к формулировке краевых условий. Будем считать, что конец стержня $s = 0$ закреплен в подшипниках. Тогда имеем условия

$$s = 0: \quad \mathbf{R}(0, t) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{P}(0, t) = (1 - \cos \alpha) \mathbf{k} \otimes \mathbf{k} + \cos \alpha \mathbf{E} + \sin \alpha \mathbf{k} \times \mathbf{E} \quad (4.2.7)$$

т. е. поворот закрепленного торца стержня происходит строго вокруг вектора \mathbf{k} . Для угла $\alpha(t)$ имеем уравнение

$$\dot{\alpha}(t) = \boldsymbol{\omega}(0, t) \cdot \mathbf{k}, \quad (4.2.8)$$

т. е. угол α , вообще говоря, заранее не определен. К концу стержня $s = 0$ приложен момент, развиваемый двигателем $\mathbf{M}_{\text{дв}}$

$$\mathbf{M}_{\text{дв}} = M_{\text{дв}} \mathbf{k} \quad (4.2.9)$$

Тогда для угла α , т. е. угла поворота начального сечения стержня, имеем дополнительное уравнение

$$\mathbf{M}_{\text{дв}} = -\mathbf{k} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{M}(0, t)) \implies M_{\text{дв}} = -\mathbf{k} \cdot \mathbf{M}(0, t) \quad (4.2.10)$$

Кроме того, примем для двигателя простейшую характеристику

$$M_{\text{дв}} = -\eta(\dot{\alpha} - \omega_0) \quad \eta > 0, \quad (4.2.11)$$

где параметр η характеризует мощность двигателя: $\eta = \infty$ — идеальный двигатель неограниченной мощности; ω_0 — номинальная частота двигателя.

Таким образом, окончательно краевые условия при $s = 0$ имеют вид

$$s = 0: \quad \begin{cases} \mathbf{R}(0, t) = \mathbf{0} & \eta(\dot{\alpha} - \omega_0) = \mathbf{k} \cdot \mathbf{M}(0, t), \\ \mathbf{P}(0, t) = (1 - \cos \alpha) \mathbf{k} \otimes \mathbf{k} + \cos \alpha \mathbf{E} + \sin \alpha \mathbf{k} \times \mathbf{E} \end{cases} \quad (4.2.12)$$

Чтобы получить краевые условия на торце $s = l$, необходимо записать уравнения динамики для твердого тела, прикрепленного к этому торцу стержня. При этом считаем, что тензор поворота твердого тела равен тензору поворота торцевого сечения $s = l$. Тогда, очевидно, имеем уравнения

$$s = l: \begin{cases} m\ddot{\mathbf{R}}(l, t) = -\mathbf{N}(l, t), \\ (\mathbf{P}(l, t) \cdot \boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{P}^T(l, t) \cdot \boldsymbol{\omega}(l, t))' = -\mathbf{M}(l, t) + \mathbf{M}_{\text{ex}}, \end{cases} \quad (4.2.13)$$

где m — масса тела, \mathbf{M}_{ex} есть внешний момент (нагрузка), приложенный к твердому телу; $\boldsymbol{\theta}$ — есть тензор инерции твердого тела, считающийся трансверсально-изотропным

$$\boldsymbol{\theta} = \mu(\mathbf{E} - \mathbf{k} \otimes \mathbf{k}) + \lambda \mathbf{k} \otimes \mathbf{k} \quad (4.2.14)$$

Для внешнего момента можно предложить много различных представлений, которые существенно зависят от конкретных условий задачи. В данной работе будет рассмотрен простейший случай следящего момента

$$\mathbf{M}_{\text{ex}} = LP(l, t) \cdot \mathbf{k} \quad (4.2.15)$$

Чтобы закончить постановку задачи необходимо сформулировать начальные условия. Однако в данной работе нас интересует устойчивость стационарного режима вращения, а не конкретное поведение системы при заданных начальных условиях. Поэтому вопрос о начальных условиях оставим в стороне.

4.3 Стационарное вращение твердого тела

Решение задачи (4.2.1)–(4.2.4), (4.2.12)–(4.2.15) будем искать в виде стационарного вращения, при котором стержень остается прямолинейным, а тело вращается вокруг своей оси изотропии \mathbf{k} .

Тензор поворота при этом имеет вид

$$\mathbf{P} = (1 - \cos \varphi) \mathbf{k} \otimes \mathbf{k} + \cos \varphi \mathbf{E} + \sin \varphi \mathbf{k} \times \mathbf{E}, \quad (4.3.16)$$

где угол поворота поперечного сечения стержня есть функция s и t , т. е. $\varphi = \varphi(s, t)$. В этом случае вектор изгиба-кручения и угловая скорость вычисляются по простейшим формулам

$$\Phi(s, t) = \varphi'(s, t)\mathbf{k} \quad \boldsymbol{\omega}(s, t) = \dot{\varphi}(s, t)\mathbf{k} \quad (4.3.17)$$

Поскольку стержень остается прямолинейным и нерастяжимым, то получим

$$\mathbf{R}(s, t) = \mathbf{r}(s) = s\mathbf{k} \quad (4.3.18)$$

Первое уравнение системы (4.2.1) и первое условие из (4.2.13) дают с учетом (4.3.18), что вектор внутренних усилий равен нулю $\mathbf{N} = \mathbf{0}$. Тогда второе уравнение системы (4.2.1) дает

$$\mathbf{M}(s, t) = \mathbf{M}(t) \quad (4.3.19)$$

С другой стороны из (4.2.2), (4.2.3) и (4.3.17) следует

$$\mathbf{M}(s, t) = \mathbf{C} \cdot \varphi' \mathbf{k} = C_3 \varphi'(s, t) \mathbf{k} \quad (4.3.20)$$

Сравнение (4.3.19) и (4.3.20) дает, что

$$\mathbf{M}(s, t) = M(t) \mathbf{k} \quad \varphi(s, t) = sM(t)/c_3 + \alpha(t) \quad (4.3.21)$$

Здесь учтено, что $\alpha(t) = \varphi(0, t)$. Подставляя (4.3.21) в (4.2.12), получаем

$$\eta(\dot{\alpha} - \omega_0) = M(t) \quad (4.3.22)$$

Теперь рассмотрим второе из условий (4.2.13). Подставляя в него (4.3.16) при

$$\varphi(l, t) = lM(t)/c_3 + \alpha(t)$$

и учитывая второе из равенств (4.3.17), получаем

$$\boldsymbol{\theta} \cdot \ddot{\varphi}(l, t) \mathbf{k} = -M(t) \mathbf{k} + L \mathbf{k}$$

или

$$\lambda \left(l \ddot{M}(t)/c_3 + \ddot{\alpha}(t) \right) = -M(t) + L \quad (4.3.23)$$

Исключая отсюда момент $M(t)$ с помощью уравнения (4.3.22), получаем уравнение для угла α

$$\frac{\eta \lambda l}{C_3} (\dot{\alpha} - \omega_0)'' + \lambda \ddot{\alpha} = -\eta(\dot{\alpha} - \omega_0) + L \quad (4.3.24)$$

Введем новую переменную

$$\beta(t) = \dot{\alpha}(t) - \omega_0 \quad \omega_0 = \text{const} \quad (4.3.25)$$

Тогда уравнение (4.3.24) примет вид

$$\gamma \ddot{x} + \lambda \dot{x} + \eta x = L \quad \gamma \equiv \eta \lambda l / C_3 \quad (4.3.26)$$

Как легко видеть при любых начальных условиях решения уравнение (4.3.26) стремится к стационарному решению

$$x = L/\eta \quad \alpha = (\omega_0 + L/\eta)t \quad (4.3.27)$$

Обычно $L < 0$ (момент “трения” или другая нагрузка), так что угловая скорость стационарного вращения оказывается несколько меньше, чем номинальная угловая скорость двигателя.

Подчеркнем, что построенное частное решение (частный режим вращения) является точным решением исходной и сильно нелинейной задачи. Вопрос о реализации такого решения в действительности тесно связан с проблемой устойчивости этого решения. Именно это и является основной целью данной главы.

4.4 Уравнения в вариациях

Выше было показано, что задача (4.2.1)–(4.2.4), (4.2.12)–(4.2.15) допускает точное решение, описываемое функциями

$$\mathbf{R}(s, t) = s\mathbf{k} \quad \mathbf{N} = \mathbf{0},$$

$$\mathbf{P}(s, t) = \mathbf{Q}(\varphi\mathbf{k}) = (1 - \cos \varphi) \mathbf{k} \otimes \mathbf{k} + \cos \varphi \mathbf{E} + \sin \varphi \mathbf{k} \times \mathbf{E}, \quad (4.4.28)$$

$$\mathbf{M} = L\mathbf{k} \quad \varphi = sl/C_3 + \alpha(t) \quad \alpha = \omega t \quad \omega = \omega_0 + L/\eta$$

Чтобы исследовать устойчивость решения (4.4.28) необходимо рассмотреть возмущенное движение

$$\mathbf{R}_\varepsilon(s, t) = s\mathbf{k} + \varepsilon\mathbf{u}(s, t) \quad \mathbf{N}_\varepsilon = \varepsilon\mathbf{n}(s, t) \quad |\varepsilon| \ll 1 \quad (4.4.29)$$

$$\mathbf{P}_\varepsilon(s, t) = (\mathbf{E} + \varepsilon\boldsymbol{\zeta}(s, t) \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{Q}(\varphi\mathbf{k}) \quad (4.4.30)$$

Для возмущенного вектора изгиба-кручения справедлива формула

$$\Phi_\varepsilon = \varepsilon\boldsymbol{\zeta}' + \frac{L}{C_3}(\mathbf{k} + \varepsilon\boldsymbol{\zeta} \times \mathbf{k}) \quad (4.4.31)$$

Для возмущенной угловой скорости имеем аналогичное представление

$$\boldsymbol{\omega}_\varepsilon = \varepsilon\dot{\boldsymbol{\zeta}} + \boldsymbol{\omega}(\mathbf{k} + \varepsilon\boldsymbol{\zeta} \times \mathbf{k}) \quad (4.4.32)$$

где $\boldsymbol{\omega}$ определено выражением (4.4.28). Подставляя (4.4.30) и (4.4.31) в (4.2.2), получаем выражение для возмущенного вектора момента

$$\mathbf{M}_\varepsilon = L\mathbf{k} + \varepsilon(C_1\boldsymbol{\gamma}' - L\mathbf{k} \times \boldsymbol{\gamma} + C_3\beta'\mathbf{k}), \quad (4.4.33)$$

где для вариации $\boldsymbol{\zeta}$ вектора поворота принято разложение

$$\boldsymbol{\zeta} = \boldsymbol{\gamma} + \beta\mathbf{k} \quad \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{k} = 0 \quad (4.4.34)$$

Подставляя вышеприведенные представления в уравнения квазистатики стержня (4.2.1), (4.2.2), получаем

$$\mathbf{n}' = 0 \quad C_1\boldsymbol{\gamma}'' - L\mathbf{k} \times \boldsymbol{\gamma}' + C_3\beta''\mathbf{k} + \mathbf{k} \times \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad (4.4.35)$$

Второе из равенств (4.2.4) дает

$$\mathbf{u}' = \boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{k} \quad (4.4.36)$$

Краевые условия (4.2.14) для стационарного движения принимают вид

$$s = 0: \quad \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \beta' = 0 \quad \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{0} \quad (4.4.37)$$

Краевые условия (4.2.13) после несложных преобразований сводятся к следующим

$$s = l: \quad m\ddot{\mathbf{u}}(l, t) = -\mathbf{n}, \quad (4.4.38)$$

$$\mu \ddot{\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{l}, t) - \lambda \omega \mathbf{k} \times \dot{\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{l}, t) + C_1 \boldsymbol{\gamma}'(\mathbf{l}, t) = \mathbf{0}, \quad (4.4.39)$$

$$\lambda \ddot{\beta}(\mathbf{l}, t) + C_3 \beta'(\mathbf{l}, t) = 0, \quad (4.4.40)$$

Задача (4.4.35)–(4.4.40) является системой уравнений в вариациях. Если она имеет только ограниченные на всем временном интервале решения, то исследуемое стационарное вращение твердого тела на гибком стержне считается устойчивым.

Проецируя второе из уравнений (4.4.35) на орт \mathbf{k} , получаем

$$\beta''(s, t) = 0 \implies \beta' = 0 \implies \beta(s, t) = \beta(t)$$

Условие $\beta' = 0$ следует из (4.4.37). Теперь уравнение (4.4.40) принимает вид

$$\ddot{\beta} = 0 \implies \beta(t) = \mathbf{a} + \mathbf{b}t$$

Иными словами, имеем неустойчивость по углу β , но этот вид неустойчивости не опасен, а в инженерном плане, как правило, не интересен. Поэтому в дальнейшем будем заниматься только поперечными колебаниями, причем вектор перемещения \mathbf{u} будем считать ортогональным \mathbf{k} , как это видно из уравнения (4.4.36).

4.5 Анализ устойчивости при отсутствии внешнего момента

Полная система уравнений в вариациях является весьма громоздкой и целесообразно сначала рассмотреть классический случай $L = 0$.

Из уравнений (4.4.35) при $L = 0$ следует

$$\mathbf{n} = \mathbf{n}(t) \quad C_1 \boldsymbol{\gamma}'' = -\mathbf{k} \times \mathbf{n}(t) \quad \mathbf{u}' = \mathbf{k} \times \boldsymbol{\gamma}$$

Интегрируя эту систему и проводя некоторые вычисления, получаем

$$\mathbf{n}(t) = \frac{12C_1}{l^3} \mathbf{u}(\mathbf{l}, t) + \frac{6C_1}{l^2} \mathbf{k} \times \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{l}, t)$$

$$\boldsymbol{\gamma}'(\mathbf{l}, t) = -\frac{6}{l^2} \mathbf{k} \times \mathbf{u}(\mathbf{l}, t) + \frac{4}{l} \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{l}, t)$$

Подставляя эти выражения в уравнения (4.4.38) и (4.4.29), получаем систему двух уравнений для определения функций $\mathbf{u}(\mathbf{l}, t)$ и $\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{l}, t)$, аргументы которых в нижеприводимых уравнениях опускаются

$$m \ddot{\mathbf{u}} + \frac{12C_1}{l^3} \mathbf{u} + \frac{6C_1}{l^2} \mathbf{k} \times \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{0}, \quad (4.5.41)$$

$$-\frac{6C_1}{l^2} \mathbf{k} \times \mathbf{u} + \mu \ddot{\boldsymbol{\gamma}} - \lambda \omega \mathbf{k} \times \dot{\boldsymbol{\gamma}} + \frac{4C_1}{l} \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{0} \quad (4.5.42)$$

Исключая переменную $\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{l}, t)$ из уравнения (4.5.42) с помощью уравнения (4.5.41), получаем разрешающее уравнение для функции $\mathbf{u}(\mathbf{l}, t)$, т. е. для вектора поперечного смещения торца стержня с твердым телом

$$\frac{\mu m l^2}{6C_1} \ddot{\mathbf{u}} - \frac{\lambda \omega m l^2}{6C_1} \mathbf{k} \times \dot{\mathbf{u}} + \left(\frac{2\mu}{l} + \frac{2ml}{3} \right) \ddot{\mathbf{u}} - \frac{2\lambda \omega}{l} \mathbf{k} \times \dot{\mathbf{u}} + \frac{2C_1}{l^2} \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (4.5.43)$$

Частные решения этого уравнения ищем в виде вращающихся вокруг \mathbf{k} постоянных векторов \mathbf{a} , которые ортогональны \mathbf{k}

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{Q}(pt\mathbf{k}) \cdot \mathbf{a} \quad (4.5.44)$$

Тогда имеем

$$\dot{\mathbf{u}} = p\mathbf{k} \times \mathbf{u} \quad \ddot{\mathbf{u}} = -p^2\mathbf{u} \quad \dot{\mathbf{u}} = -p^3\mathbf{k} \times \mathbf{u} \quad \ddot{\mathbf{u}} = p^4\mathbf{u}$$

Подставляя эти представления в (4.5.43), получаем

$$\frac{\mu ml^2}{6C_1} p^4 - \frac{\lambda \omega ml^2}{6C_1} p^3 - \left(\frac{2\mu}{l} + \frac{2ml}{3} \right) p^2 + \frac{2\lambda \omega}{l} p + \frac{2C_1}{l^2} = 0 \quad (4.5.45)$$

Если корни этого уравнения вещественны, то вращения устойчивы, если появляются комплексные корни, то тригонометрические функции комплексного аргумента будут содержать в себе гиперболические функции, т. е. растущие по модулю решения. Для уравнения (4.5.45) вещественность всех его корней показывается элементарно. В самом деле, обозначим левую часть уравнения (4.5.45) через $F(p)$, которую запишем в виде

$$F(p) \equiv \frac{\mu ml^2}{6C_1} p^4 - \frac{2\lambda \omega}{l} p \left(\frac{ml^2}{12C_1} p^2 - 1 \right) - \left(\frac{2\mu}{l} + \frac{2ml}{3} \right) p^2 + \frac{2C_1}{l^2}$$

Вычислим значения этой функции в точках

$$p = \pm \sqrt{\frac{12C_1}{ml^3}}$$

Нетрудно посчитать, что

$$F\left(\pm \sqrt{\frac{12C_1}{ml^3}}\right) = -\frac{6C_1}{l^2} < 0,$$

причем это неравенство справедливо при всех значениях ω . Учтем теперь очевидные неравенства

$$F(\pm\infty) = +\infty > 0 \quad F(0) = 2C_1/l^2 > 0$$

Нарисовав график функции $F(p)$, сразу убедимся, что $F(p)$ имеет два отрицательных и два положительных корня, а других корней быть не может

Итак, при $L = 0$ вращения твердого тела на гибком стержне устойчивы относительно малых возмущений. Этот результат давно и хорошо известен. Здесь просто показано, что используемый в работе подход полностью соответствует классическому.

4.6 Вывод разрешающего уравнения при действии внешнего момента.

Если внешний момент, действующий на тело, отличен от нуля, то задача в сравнении с предыдущим пунктом значительно усложняется. Предварительно рассмотрим вспомогательную задачу, состоящую в интегрировании второго уравнения из системы (4.4.35)

$$C_1 \boldsymbol{\gamma}'' - L \mathbf{k} \times \boldsymbol{\gamma}' + C_3 \beta'' \mathbf{k} = -\mathbf{k} \times \mathbf{n} \quad \mathbf{n}(s, t) = \mathbf{n}(t) \quad (4.6.46)$$

В качестве краевых условий примем следующие

$$s = 0: \quad \boldsymbol{\gamma}(0, t) = \mathbf{0} \quad s = l: \quad \boldsymbol{\gamma}(l, t) = \boldsymbol{\gamma}_1(t) \quad (4.6.47)$$

Нашей конечной целью на этом предварительном этапе является выражение функций $\boldsymbol{\gamma}'(l, t)$ и $\mathbf{n}(t)$ через функции $\boldsymbol{\gamma}_1(t)$ и $\mathbf{u}(l, t)$. Если это будет сделано, то уравнения (4.4.38) и (4.4.29) составят систему двух обыкновенных уравнений для функций $\boldsymbol{\gamma}(l, t)$ и $\mathbf{u}(l, t)$, решение которых позволит сделать вывод об устойчивости или неустойчивости стационарного режима вращения твердого тела на гибком стержне. Обратимся к решению задачи (4.6.46)–(4.6.47). Умножая обе части уравнения (4.6.46) векторно на \mathbf{k} слева, получаем

$$C_1 \mathbf{k} \times \boldsymbol{\gamma}'' + L \boldsymbol{\gamma}' = \mathbf{n}$$

Интегрируя это уравнение один раз, получаем

$$C_1 \mathbf{k} \times \boldsymbol{\gamma}' + L \boldsymbol{\gamma} = C_1 \mathbf{k} \times \boldsymbol{\gamma}'(0, t) + s \mathbf{n}$$

Исключая с помощью этого уравнения вектор $\mathbf{k} \times \boldsymbol{\gamma}'$ из уравнения (4.6.46), приходим к уравнению

$$\boldsymbol{\gamma}'' + \frac{\alpha^2}{l^2} \boldsymbol{\gamma} = -\frac{1}{C_1} \mathbf{k} \times \mathbf{n} + \frac{\alpha s}{l C_1} \mathbf{n} + \frac{\alpha}{l} \mathbf{k} \times \boldsymbol{\gamma}'_0 \quad \alpha \equiv \frac{Ll}{C_1} \quad (4.6.48)$$

Получили линейное дифференциальное уравнение с правой частью. Его общее решение, казалось бы, можно представить в виде суммы любого частного решения неоднородного уравнения и общего решения однородного уравнения. Одно из частных решений (4.6.48) имеет вид

$$\boldsymbol{\gamma}_* = \frac{l^2}{\alpha^2} \left(-\frac{1}{C_1} \mathbf{k} \times \mathbf{n} + \frac{\alpha s}{l C_1} \mathbf{n} + \frac{\alpha}{l} \mathbf{k} \times \boldsymbol{\gamma}'_0 \right)$$

Однако использовать это частное решение нельзя, поскольку при $\alpha \rightarrow 0$ оно перестает существовать. Поэтому общее решение также должно содержать особенности, которые должны компенсировать особенности в частном решении. В результате получается очень сложная и громоздкая форма представления решения. Поэтому кажется предпочтительным воспользоваться методом вариации произвольных постоянных. Хотя этот путь быстрее приводит к цели, но все же он очень длинен и едва ли имеет смысл воспроизводить его в данной работе. Поэтому здесь мы воспользуемся приближенным решением уравнения

(4.6.48), которое в точности совпадает с главными членами асимптотического разложения точного решения уравнения (4.6.48) при малых α .

В дальнейшем будем считать справедливым сильное неравенство

$$|\alpha| = \left| \frac{l_1}{C_1} \right| \ll 1 \quad (4.6.49)$$

С практической точки зрения это ограничение несущественно, т. к. даже для значений крутящего момента, приводящих к возникновению пластических деформаций в стержне, модуль α не превосходит значения $|\alpha| = 0.01$. Если принять (4.6.48), то с точностью до малых второго порядка вместо (4.6.48) можем записать

$$\gamma'' = -\frac{1}{C_1} \mathbf{k} \times \mathbf{n} + \frac{\alpha s}{l C_1} \mathbf{n} + \frac{\alpha}{l} \mathbf{k} \times \gamma'_0 \quad (4.6.50)$$

Это уравнение интегрируется уже элементарно

$$\gamma' = -\frac{s}{C_1} \mathbf{k} \times \mathbf{n} + \frac{\alpha s^2}{2l C_1} \mathbf{n} + \frac{\alpha s}{l} \mathbf{k} \times \gamma'_0 + \mathbf{a} \quad (4.6.51)$$

Полагая здесь $s = 0$, получаем

$$\gamma'_0 = \mathbf{a}$$

Таким образом, имеем

$$\gamma' = -\frac{s}{C_1} \mathbf{k} \times \mathbf{n} + \frac{\alpha s^2}{2l C_1} \mathbf{n} + \frac{\alpha s}{l} \mathbf{k} \times \gamma'_0 + \gamma'_0 \quad (4.6.52)$$

Интегрируя это соотношение, находим

$$\gamma(s, t) = -\frac{s^2}{2C_1} \mathbf{k} \times \mathbf{n} + \frac{\alpha s^3}{6l C_1} \mathbf{n} + \frac{\alpha s^2}{2l} \mathbf{k} \times \gamma'_0 + s \gamma'_0 \quad (4.6.53)$$

Полагая здесь $s = l$, получаем

$$\gamma_l = -\frac{l^2}{2C_1} \mathbf{k} \times \mathbf{n} + \frac{\alpha l^2}{6C_1} \mathbf{n} + \frac{\alpha l}{2} \mathbf{k} \times \gamma'_0 + l \gamma'_0 \quad (4.6.54)$$

Подставляя (4.6.53) в (4.6.54) и интегрируя получившееся равенство, находим выражение для вектора поперечных смещений

$$\mathbf{u}(s, t) = -\frac{s^3}{6C_1} \mathbf{n} - \frac{\alpha s^4}{24l C_1} \mathbf{k} \times \mathbf{n} + \frac{\alpha s^3}{6l} \gamma'_0 - \frac{s^2}{2} \mathbf{k} \times \gamma'_0 \quad (4.6.55)$$

Отсюда получаем

$$\mathbf{u}_l(t) = -\frac{l^3}{6C_1} \mathbf{n} - \frac{\alpha l^3}{24C_1} \mathbf{k} \times \mathbf{n} + \frac{\alpha l^2}{6} \gamma'_0 - \frac{l^2}{2} \mathbf{k} \times \gamma'_0 \quad (4.6.56)$$

Равенства (4.6.54) и (4.6.56) позволяют выразить векторы $\mathbf{n}(t)$ и $\gamma'_0(t)$ через векторы $\mathbf{u}_l(t)$ и $\gamma_l(t)$

$$\mathbf{n} = \frac{12C_1}{l^3} \mathbf{u}_l + \frac{6C_1}{l^2} \mathbf{k} \times \gamma_l - \frac{\alpha C_1}{l^2} \gamma_l \quad (4.6.57)$$

$$\gamma'_0 = -\frac{2}{l} \gamma_l - \frac{\alpha}{2l} \mathbf{k} \times \gamma_l + \frac{\alpha}{l^2} \mathbf{u}_l + \frac{6}{l^2} \mathbf{k} \times \mathbf{u}_l \quad (4.6.58)$$

В этих выражениях также отброшены слагаемые порядка $O(\alpha l^2)$. Наконец, используя (4.6.57) и (4.6.58), легко получаем выражение для γ'_l

$$\gamma'_l = \frac{4}{l} \gamma_l - \frac{6}{l^2} \mathbf{k} \times \mathbf{u}_l + \frac{3\alpha}{2l} \mathbf{k} \times \gamma_l + \frac{\alpha}{l^2} \mathbf{u}_l \quad (4.6.59)$$

Теперь уже можно выписать разрешающие уравнения, описывающие динамическое поведение твердого тела на гибком стержне вблизи стационарного вращения. Они получаются после подстановки выражений (4.6.57) и (4.6.59) в уравнения (4.4.38) и (4.4.39). В результате указанной подстановки имеем

$$m\ddot{\mathbf{u}}_l + \frac{12C_1}{l^3} \mathbf{u}_l + \frac{6C_1}{l^2} \mathbf{k} \times \gamma_l - \frac{\alpha C_1}{l^2} \gamma_l = \mathbf{0}, \quad (4.6.60)$$

$$-\frac{6C_1}{l^2} \mathbf{k} \times \mathbf{u}_l + \frac{\alpha C_1}{l^2} \mathbf{u}_l + \mu \ddot{\boldsymbol{\gamma}} - \lambda \omega \mathbf{k} \times \dot{\boldsymbol{\gamma}} + \frac{4C_1}{l} \gamma_l + \frac{3\alpha C_1}{2l} \mathbf{k} \times \gamma_l = \mathbf{0}, \quad (4.6.61)$$

Полагая здесь $\alpha = 0$, приходим к уравнениям, уже рассмотренным в п. 4.5, где было показано, что их решения ограничены во времени, т. е. там мы имели устойчивость стационарных вращений. Если в (4.6.60), (4.6.61) положить равными нулю моменты инерции μ и λ , то получим уравнение

$$m\ddot{\mathbf{u}}_l + \frac{3C_1}{l^3} \mathbf{u}_l + \frac{3L}{8l^2} \mathbf{k} \times \mathbf{u}_l = \mathbf{0} \quad (4.6.62)$$

Это уравнение также очень хорошо известно: оно возникает при анализе устойчивости положений равновесия стержня, скрученного моментом L . Известно, что при любых сколь угодно малых значениях L решения уравнения (4.6.62) неограниченно возрастают во времени. Иными словами, равновесие консольного стержня, скрученного сколь угодно малым следящим моментом, неустойчиво.

Вопрос, ответ на который нам необходимо найти, заключается в следующем: как повлияет малый следящий момент на стационарные вращения, не возникнет ли и здесь явление, аналогичное парадоксу Е.Л.Николаи.

4.7 Анализ устойчивости стационарных вращений при действии малого следящего момента

Введем в рассмотрение обыкновенные дифференциальные операторы

$$L_m = m \frac{d^2}{dt^2} + \frac{12C_1}{l^3} \quad L_\mu = \mu \frac{d^2}{dt^2} + \frac{4C_1}{l} \quad L_\omega = \lambda \omega \frac{d}{dt} - \frac{3\alpha C_1}{2l} \quad (4.7.63)$$

Все эти операторы перестановочны. Введем плоские тензоры

$$\mathbf{a} = \mathbf{E} - \mathbf{k} \otimes \mathbf{k} \quad \mathbf{c} = -\mathbf{k} \times \mathbf{E} = -\mathbf{k} \times \mathbf{a} \quad \mathbf{c}^2 = -\mathbf{a} \quad (4.7.64)$$

Введем, наконец, плоские тензорные операторы

$$\mathbf{A} = \mathbf{a}L_m \quad \mathbf{B} = \frac{6C_1}{l^2} \mathbf{c} + \frac{\alpha C_1}{l^2} \mathbf{a} \quad \mathbf{C} = \mathbf{a}L_\mu + \mathbf{c}L_\omega \quad (4.7.65)$$

Как легко убедиться, эти операторы перестановочны. Систему уравнений (4.6.60), (4.6.61) перепишем в виде

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{u} - \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{0} \quad \mathbf{B} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{0} \quad (4.7.66)$$

Подействовав оператором \mathbf{C} на первое уравнение и затем исключив $\boldsymbol{\gamma}$ с помощью второго уравнения (4.7.66), получим следующее уравнение для вектора \mathbf{u}

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C} + \mathbf{B}^2) \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (4.7.67)$$

В развернутом виде последнее уравнение имеет вид

$$\left(L_\mu L_m - \frac{36C_1^2}{l^4} \right) \mathbf{u} - \left(L_m L_\omega + \frac{12\alpha C_1^2}{l^4} \right) \mathbf{k} \times \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (4.7.68)$$

Перепишем это уравнение, выделив в нем слагаемые, пропорциональные α

$$\left(L_m L_\mu - \frac{36C_1^2}{l^4} \right) \mathbf{u} - \lambda \omega L_m \mathbf{k} \times \dot{\mathbf{u}} + \frac{3\alpha C_1}{2l} \left(m \frac{d^2}{dt^2} + \frac{4C_1}{l^3} \right) \mathbf{k} \times \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (4.7.69)$$

где $\mathbf{u} = \mathbf{u}(l, t)$. Если здесь принять $\alpha = 0$, то получим уравнение (4.5.43), решение которого было построено в п. 4.5. Там было показано, что общее решение является суперпозицией четырех вращающихся вокруг \mathbf{k} векторов, модули которых постоянны. Легко убедиться, что при $\alpha \neq 0$ уравнение (4.7.69) решений такого типа не допускает. Амплитуда вращений (расстояние от апекса до оси \mathbf{k}) не может быть постоянной ни при каких начальных условиях. Следовательно, твердое тело будет либо уклоняться от оси \mathbf{k} , либо, напротив, стремиться к оси. Во втором случае имеем устойчивость стационарных вращений, а в первом случае — неустойчивость. Общий анализ устойчивости сводится к определению корней полинома восьмой степени, что можно, конечно, сделать, но это выливается в довольно большие вычисления. По этой причине в данной работе ограничимся приближенным (асимптотическим) анализом, который тем более уместен, что само уравнение (4.7.69) выведено с точностью до членов порядка $O(\alpha^2)$. Будем рассуждать следующим образом. При $\alpha = 0$ каждое частное решение уравнения (4.7.69) являлось вращением с постоянной амплитудой. Естественно думать, что при малых α мы будем иметь вращение с медленно меняющейся амплитудой. Используем это обстоятельство и будем искать частные решения уравнения (4.7.69) в виде

$$\mathbf{u} = \mathbf{Q}(p\mathbf{k}) \cdot \mathbf{v}(t) \quad p = \text{const} \quad (4.7.70)$$

При $\alpha = 0$ вектор $\mathbf{v}(t)$ постоянен, как это было показано в п. 4.5. Примем, что при малых α имеет место асимптотическое соответствие

$$\dot{\mathbf{v}} \sim \alpha \mathbf{v} \quad (4.7.71)$$

Вычислим производные от \mathbf{u} с учетом соотношения (4.7.71) и при этом ограничимся только членами до первого порядка по α включительно.

Будем иметь

$$\dot{\mathbf{u}} = p\mathbf{k} \times \mathbf{u} + \mathbf{Q} \cdot \dot{\mathbf{v}} \quad \ddot{\mathbf{u}} = -p^2 \mathbf{u} + 2p\mathbf{k} \times \mathbf{Q} \cdot \dot{\mathbf{v}},$$

$$\dot{\mathbf{u}} = -p^3 \mathbf{k} \times \mathbf{u} - 3p^2 \mathbf{Q} \cdot \dot{\mathbf{v}} \quad \ddot{\mathbf{u}} = p^4 \mathbf{u} - 4p^3 \mathbf{k} \times \mathbf{Q} \cdot \dot{\mathbf{v}}$$

Подставляя эти выражения в (4.7.69), получаем уравнение

$$F(p)\mathbf{u} - F'(p)\mathbf{k} \times \mathbf{Q} \cdot \dot{\mathbf{v}} + \frac{3\alpha C_1}{2l} \left(\frac{4C_1}{l^3} - mp^2 \right) \mathbf{k} \times \mathbf{Q} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad (4.7.72)$$

где $F'(p) = dF/dp$, а полином $F(p)$ имеет вид

$$F(p) \equiv \frac{\mu ml^2}{6C_1} p^4 - \frac{\lambda \omega ml^2}{6C_1} p^3 - \left(\frac{2\mu}{l} + \frac{2ml}{3} \right) p^2 + \frac{2\lambda \omega}{l} p + \frac{2C_1}{l^2} \quad (4.7.73)$$

Для того, чтобы уравнение (4.7.72) было выполнено достаточно принять

$$F(p) = 0 \quad F'(p)\dot{\mathbf{v}} + \frac{3\alpha C_1}{2l} \left(mp^2 - \frac{4C_1}{l^3} \right) \mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad (4.7.74)$$

Как было показано выше, функция $F(p)$ имеет ровно четыре вещественных нуля. Перенумеруем их в следующем порядке

$$p_1 < p_2 < p_3 < p_4$$

Корни p_1 и p_2 отрицательны, а корни p_3 и p_4 положительны. Кроме того, справедливы неравенства

$$p_{1,4}^2 > \frac{12C_1}{ml^3} \quad p_{2,3}^2 < \frac{12C_1}{ml^3} \quad (4.7.75)$$

Решение второго из уравнений (4.7.74) имеет вид

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{A}e^{-qt} \quad q = \frac{2\alpha C_1}{2l} \frac{mp^2 - 4C_1/l^3}{F'(p)} \quad (4.7.76)$$

При положительных q “амплитуды” стремятся к нулю, т. е. ось симметрии твердого тела стремится к оси \mathbf{k} , т. е. такое частное решение устойчиво. Рассмотрим последовательно все четыре значения корня p_1, p_2, p_3, p_4 .

Рассмотрим корень p_1 . В силу (4.7.75) числитель в (4.7.76) положителен (без учета знака α). Значение функции $F'(p)$ в точке $p = p_1$, очевидно, отрицательно. Следовательно, знак q противоположен знаку α . Таким образом, частное решение, отвечающее корню p_1 , убывает при $\alpha < 0$ и растет при $\alpha > 0$.

Рассмотрим корень p_4 . В этом случае значение функции $F'(p)$ в точке $p = p_4$ положительно. Следовательно, $q > 0$ при $\alpha > 0$ и $q < 0$ при $\alpha < 0$. Иными словами, для частного решения, отвечающего корню $p = p_4$, имеем ситуацию, противоположную случаю $p = p_1$. Это означает, что в любом случае при любом значении угловой скорости и при любом значении α , т. е. внешнего момента L , имеем неустойчивость.

Итак, при действии сколь-угодно малого внешнего следящего момента L стационарные вращения твердого тела на гибком стержне неустойчивы.

4.8 Обсуждение

Как было показано выше, сколь угодно малый следящий момент порождает неустойчивость вращения твердого тела на гибком вале. Можно убедиться, что мертвый внешний момент также приводит к развитию неустойчивости. Более того, внешние (сколь угодно малые) воздействия, как правило, ведут к неустойчивостям. Малое трение, внешнее или внутреннее, может также порождать неустойчивость, но может и стабилизировать движение тела. Создается впечатление, что вращающиеся валы оказываются работоспособными не потому, что ликвидированы причины, вызывающие неустойчивость, а, наоборот, вследствие избытка этих причин. В результате, одна неустойчивость гасит другую. Именно так обстоит дело при совокупном действии следящего и мертвого моментов. При раздельном действии каждый из них ведет к неустойчивости, но если их величины одинаковы, то поведение системы устойчиво.

Обратимся к экспериментальной работе И.Б.Баргера [6]. Анализ, насколько он возможен по приводимым фотографиям, показывает, что характер неустойчивости значительно лучше описывается типом неустойчивости, предсказываемым результатами предыдущего пункта, нежели типом неустойчивости, определяемым внутренним трением. Действительно, нарастание отклонения от вертикальной оси имеет место как для $\omega < \omega_{кр}$, так и при $\omega > \omega_{кр}$. Впрочем, данные, приводимые в [6] явно недостаточны для того, чтобы давать какие бы то ни было окончательные суждения.

Все, на что претендуют результаты данной главы, состоит в утверждении, что внутреннее трение далеко не обязательно является единственным объяснением наблюдаемых на практике неустойчивостей.

5 Динамика двухроторного гиростата на упругом основании

5.1 Основные уравнения при соосных роторах

Примем следующие ограничения

- роторы будем считать соосными, т. е. в выражении (2.6.59) примем, что $\mathbf{m} = \mathbf{n} = \mathbf{k}$;
- энергия упругого основания имеет вид квадратичной формы (2.6.63)

$$\Pi(\theta^2, \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{2} C_1 (\theta^2 - (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta})^2) + \frac{1}{2} C_3 (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta})^2;$$

- внешний момент примем в виде

$$\mathbf{M}_{\text{ex}} = -b \boldsymbol{\omega}_c + LP \cdot \mathbf{k} \quad b > 0, \quad (5.1.1)$$

где $\boldsymbol{\omega}_c$ — угловая скорость “основного” ротора С, причем ротор В будем называть вспомогательным.

Первое слагаемое в правой части (5.1.1) соответствует случаю, когда на основной ротор действует момент трения. Напомним, что согласно (2.3.30) справедливо представление

$$\boldsymbol{\omega}_c = \boldsymbol{\omega} + \dot{\beta} \mathbf{P} \cdot \mathbf{k}, \quad (5.1.2)$$

где $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость несущего тела A .

Наконец, примем еще одно допущение: будем считать, что двигатели имеют неограниченную мощность, так что относительные угловые скорости роторов $\dot{\alpha}$ и $\dot{\beta}$ являются наперед заданными функциями. При принятых допущениях основная система уравнений динамики двухроторного гиростата на упругом основании принимает вид

$$\dot{\mathbf{J}} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{J} + \mathbf{b}\boldsymbol{\Omega} + \mathbf{b}\dot{\beta}\mathbf{k} + C_1\boldsymbol{\theta} + (C_3 - C_1)\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta} \mathbf{Z}(\boldsymbol{\theta})^{-1} \cdot \mathbf{k} = L\mathbf{k} \quad (5.1.3)$$

Правый вектор кинетического момента \mathbf{J} согласно (2.6.59) имеет вид

$$\mathbf{J} = \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\Omega} + (\lambda_b \dot{\alpha} + \lambda_c \dot{\beta}) \mathbf{k} \quad \mathbf{D} = \mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} \quad \mathbf{m} = \mathbf{n} = \mathbf{k} \quad (5.1.4)$$

К этим уравнениям следует добавить следует добавить кинематическое уравнение (2.6.60)

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{\Omega} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\Omega} + \frac{1-g}{\theta^2}\boldsymbol{\theta} \times (\boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\Omega}) \quad g \equiv \frac{\theta \sin \theta}{2(1 - \cos \theta)} \quad (5.1.5)$$

Система (5.1.3)–(5.1.5) содержит два неизвестных вектора $\boldsymbol{\theta}$ и $\boldsymbol{\Omega}$ и является замкнутой. В эту систему входит большое число конструктивных характеристик, которыми можно распоряжаться при проектировании и выбирать их на основе каких-либо соображений. Пример такого выбора-проектирования будет рассмотрен в следующем пункте.

5.2 Двухроторный гиростат с шаровым тензором инерции на изотропном основании

В этом пункте будет рассмотрена предельно упрощенная ситуация. Примем, что на гиростат не действуют внешних моментов, кроме реакции упругого основания, и внешнее трение отсутствует

$$\mathbf{b} = 0 \quad L = 0 \quad (5.2.6)$$

Далее примем, что вспомогательный ротор B вращается так, что проекция суммарного кинетического момента обеих роторов равна нулю

$$\lambda_b \dot{\alpha} + \lambda_c \dot{\beta} = 0 \quad (5.2.7)$$

Упругое основание будем считать изотропным

$$C_1 = C_3 = c \quad (5.2.8)$$

Наконец, примем, что суммарный тензор инерции гиростата является шаровым

$$\mathbf{D} = DE \quad (5.2.9)$$

хотя ни один из составляющих тензоров инерции \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} шаровым не является.

При сделанных допущениях система (5.1.3)–(5.1.5) предельно упрощается и сводится к следующей

$$D\boldsymbol{\Omega} + c\boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}, \quad (5.2.10)$$

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{\Omega} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\Omega} + \frac{1-g}{\theta^2}\boldsymbol{\theta} \times (\boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\Omega}) \quad g \equiv \frac{\theta \sin \theta}{2(1 - \cos \theta)} \quad (5.2.11)$$

Несмотря на огромные упрощения, система (5.2.10)–(5.2.11) остается достаточно сложной в силу существенной нелинейности уравнения (5.2.11). Как анализировать эту систему? Ее можно несколько усложнить и считать упругое основание нелинейным, но изотропным. В этом случае жесткость c является функцией от θ

$$c = c(\theta) \quad c' > 0 \quad c(0) > 0 \quad (5.2.12)$$

Первоначально мы пытались проанализировать систему (5.2.10)–(5.2.11) используя представление тензора поворота через углы Эйлера

$$\mathbf{P}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{Q}(\psi\mathbf{k}) \cdot \mathbf{Q}(\vartheta\mathbf{p}) \cdot \mathbf{Q}(\varphi\mathbf{k}) = \mathbf{Q}(\vartheta\mathbf{p}') \cdot \mathbf{Q}(\beta\mathbf{k}), \quad (5.2.13)$$

где

$$\beta = \varphi + \psi \quad \mathbf{p}' = \mathbf{Q}(\psi\mathbf{k}) \cdot \mathbf{p} \quad \mathbf{p}' \cdot \mathbf{k} = \mathbf{p} \cdot \mathbf{k} = 0 \quad (5.2.14)$$

Нетрудно показать, что вектор поворота $\boldsymbol{\theta}$, отвечающий тензору поворота (5.2.13), определяется формулами ($\boldsymbol{\theta} = \theta\mathbf{n}$)

$$1 + 2 \cos \theta = \cos \vartheta + \cos \beta + \cos \alpha \cos \beta, \quad (5.2.15)$$

$$2 \sin \theta \mathbf{n} = \sin \vartheta(1 + \cos \beta)\mathbf{p}' + \sin \beta(1 + \cos \vartheta)\mathbf{k} + \sin \vartheta \sin \beta \mathbf{p}' \times \mathbf{k} \quad (5.2.16)$$

С помощью кинематического уравнения Эйлера можно выразить и угловую скорость через производные от углов Эйлера. В результате уравнение (5.2.11) превращается в тождество, а векторное уравнение (5.2.10) становится эквивалентным следующим трем скалярным уравнениям

$$\begin{aligned} D\left(\dot{\beta} - \dot{\psi}(1 - \cos \vartheta)\right) + \frac{c(\theta)\theta}{2 \sin \theta} \sin \beta(1 + \cos \vartheta) &= 0, \\ D\left(\ddot{\theta} + \dot{\psi}\dot{\varphi} \sin \vartheta\right) + \frac{c(\theta)\theta}{2 \sin \theta} \sin \vartheta(1 + \cos \beta) &= 0, \\ D\left((\dot{\psi} \sin \vartheta)' - \dot{\varphi}\dot{\vartheta}\right) + \frac{c(\theta)\theta}{2 \sin \theta} \sin \beta \sin \vartheta &= 0 \end{aligned} \quad (5.2.17)$$

К этой системе добавляется условие $\beta = \varphi + \psi$ и уравнение (5.2.15).

Система (5.2.17) оказалась достаточно трудной для нас. Несмотря на значительные усилия и большие временные затраты, нам не удалось построить ее решение непосредственно, хотя, как будет показано ниже, это было возможно. Итак, использование углов Эйлера приводит в этой задаче к трудно преодолимым проблемам. К счастью оказалось, что существует другой путь, найденный до некоторой степени случайно, но, тем не менее, весьма простой.

Перепишем уравнение (5.2.10) в двух эквивалентных формах

$$D\dot{\boldsymbol{\omega}} + c(\theta^2) \boldsymbol{\theta} = \mathbf{0} \quad D\boldsymbol{\Omega} + c(\theta^2) \boldsymbol{\theta} = \mathbf{0} \quad (5.2.18)$$

Второе уравнение этой системы следует из первого после умножения его на \mathbf{P}^T слева и учета равенств

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Omega} &= (\mathbf{P}^T \cdot \boldsymbol{\omega})' = \mathbf{P}^T \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}} + \dot{\mathbf{P}}^T \cdot \boldsymbol{\omega} = \mathbf{P}^T \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}} - (\mathbf{P}^T \times \boldsymbol{\omega}) \cdot \boldsymbol{\omega} = \mathbf{P}^T \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}}, \\ \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\theta} &= \mathbf{P}^T \cdot \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta} \end{aligned}$$

Таким образом, оба уравнения в (5.2.18) совершенно равноправны и по существу тождественны. Но, тем не менее, из них вытекает нетривиальное следствие: после вычитания из первого уравнения второго легко получаются три интеграла

$$(\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\Omega})' = \mathbf{0} \quad \boldsymbol{\omega}(t) - \boldsymbol{\Omega}(t) = \boldsymbol{\omega}_0 - \boldsymbol{\Omega}_0 \quad (5.2.19)$$

Выпишем кинематические уравнения, с помощью которых производная $\dot{\boldsymbol{\theta}}$ выражается через левую $\boldsymbol{\omega}$ и правую $\boldsymbol{\Omega}$ угловые скорости

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{\omega} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\omega} + \frac{1-g}{\theta^2}\boldsymbol{\theta} \times (\boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\omega}) = \boldsymbol{\Omega} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\Omega} + \frac{1-g}{\theta^2}\boldsymbol{\theta} \times (\boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\Omega}) \quad (5.2.20)$$

Из последнего равенства получаем тождество

$$\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\Omega} + \frac{1-g}{\theta^2}\boldsymbol{\theta} \times (\boldsymbol{\theta} \times (\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\Omega})) = \frac{1}{2}\boldsymbol{\theta} \times (\boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\omega}) \quad (5.2.21)$$

Раскрывая здесь двойное векторное произведение получаем

$$\boldsymbol{\theta} \times (\boldsymbol{\theta} \times (\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\Omega})) = \boldsymbol{\theta} \boldsymbol{\theta} \cdot (\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\Omega}) - \theta^2(\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\Omega})$$

Первое слагаемое в правой части равно нулю, т. к.

$$\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\Omega} \quad \boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{P} = \boldsymbol{\theta}$$

С учетом сказанного равенство (5.2.21) переписывается в виде

$$g(\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\Omega}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{\theta} \times (\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\Omega}) \quad (5.2.22)$$

С учетом интеграла (5.2.19) этому равенству придаем вид

$$g(\boldsymbol{\omega}_0 - \boldsymbol{\Omega}_0) = \frac{1}{2}\boldsymbol{\theta} \times (\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\Omega}) \implies \boldsymbol{\theta} \cdot (\boldsymbol{\omega}_0 - \boldsymbol{\Omega}_0) = 0 \quad (5.2.23)$$

Итак, получили важный вывод о том, что вектор поворота $\boldsymbol{\theta}$ лежит в плоскости, ортогональной вектору \mathbf{e}

$$\mathbf{e} = (\boldsymbol{\omega}_0 - \boldsymbol{\Omega}_0)/|\boldsymbol{\omega}_0 - \boldsymbol{\Omega}_0| \quad (5.2.24)$$

Конечно, здесь предполагается, что вектор $\boldsymbol{\omega}_0 - \boldsymbol{\Omega}_0$ не равен нулевому вектору, причем в последнем случае задача интегрируется элементарно, поскольку из (5.2.19) следует

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\Omega} \implies \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Omega}$$

Это означает, что вектор $\mathbf{\Omega}$ является неподвижным вектором тензора поворота, т. е. имеет место равенство

$$\mathbf{\Omega} = \lambda \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\omega}$$

Напомним, что неподвижный вектор тензора поворота определяется с точностью до скалярного множителя, а вектор поворота является неподвижным вектором тензора поворота. Для вектора $\boldsymbol{\omega}$ имеем равенство ($\boldsymbol{\theta} = \theta \mathbf{m}$):

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\theta} \mathbf{m} + \sin \theta \dot{\mathbf{m}} + (1 - \cos \theta) \mathbf{m} \times \dot{\mathbf{m}} = \lambda \theta \mathbf{m}$$

Из этого равенства следует, что $\dot{\mathbf{m}} = \mathbf{0}$, т. е. вектор поворота имеет фиксированное направление. Это самый простой случай. Для угла поворота θ из (5.2.10) немедленно получаем уравнение

$$D\ddot{\theta} + c(\theta) \boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}, \quad (5.2.25)$$

которое интегрируется в квадратурах при произвольном виде функции $c(\theta)$.

Вернемся к общему случаю, когда $\boldsymbol{\omega}_0 - \mathbf{\Omega}_0 \neq \mathbf{0}$. Любой вектор, в том числе и вектор поворота, лежащий в плоскости, ортогональной вектору \mathbf{e} , можно представить в виде

$$\boldsymbol{\theta}(t) = \theta(t) \mathbf{C}(\psi \mathbf{e}) \cdot \mathbf{m} \quad \mathbf{m} = \boldsymbol{\theta}_0 / |\boldsymbol{\theta}_0| \quad \mathbf{m} \cdot \mathbf{e} = 0, \quad (5.2.26)$$

где \mathbf{e} согласно (5.2.24) есть орт вектора $\boldsymbol{\omega}_0 - \mathbf{\Omega}_0$. Из равенства (5.2.26) получаем

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = \frac{\dot{\theta}(t)}{\theta} \boldsymbol{\theta} + \dot{\psi} \mathbf{e} \times \boldsymbol{\theta}$$

Умножая обе части этого равенства векторно на вектор $\boldsymbol{\theta}$, получаем

$$\boldsymbol{\theta} \times \dot{\boldsymbol{\theta}} = \dot{\psi} \theta^2 \mathbf{e} \quad (5.2.27)$$

Справедливо тождество, вытекающее из формул (2.2.18), (2.2.19) и (2.2.21),

$$\frac{1}{2} \boldsymbol{\theta} \times (\boldsymbol{\omega} + \mathbf{\Omega}) = \frac{\sin \theta}{\theta} \boldsymbol{\theta} \times \dot{\boldsymbol{\theta}} \quad (5.2.28)$$

С учетом тождества (5.2.28) и представления (5.2.27) из равенства (5.2.22) получаем

$$\dot{\psi} = \frac{|\boldsymbol{\omega}_0 - \mathbf{\Omega}_0|}{2(1 - \cos \theta)} = \frac{1 - \cos \theta_0}{1 - \cos \theta} \dot{\psi}_0 \quad \dot{\psi}_0 > 0 \quad (5.2.29)$$

Таким образом, если известен угол нутации θ , то угол прецессии ψ находится квадратурой. Используемые названия для θ и ψ оправдываются следующим образом. Тензор поворота \mathbf{P} связан с вектором поворота $\boldsymbol{\theta}$ формулой

$$\mathbf{P} = \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} \boldsymbol{\theta} \otimes \boldsymbol{\theta} + \cos \theta \mathbf{E} + \frac{\sin \theta}{\theta} \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{E}$$

Подставляя сюда выражение (5.2.26) для вектора поворота $\boldsymbol{\theta}$ и проводя несложные преобразования, получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \mathbf{Q}(\psi \mathbf{e}) \cdot ((1 - \cos \theta) \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + \cos \theta \mathbf{E} + \sin \theta \mathbf{m} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{Q}^T(\psi \mathbf{e}) = \\ &= \mathbf{Q}(\psi \mathbf{e}) \cdot \mathbf{Q}(\theta \mathbf{m}) \cdot \mathbf{Q}(-\psi \mathbf{e}) \quad \mathbf{m} \cdot \mathbf{e} = 0 \end{aligned} \quad (5.2.30)$$

В этом выражении легко узнается представление Эйлера для тензора поворота, где θ — угол нутации, ψ — угол прецессии, а угол собственного вращения φ равен $\varphi = -\psi$. По кинематическому уравнению Эйлера находим

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\psi}\mathbf{e} + \dot{\theta}\mathbf{Q}(\psi\mathbf{e}) \cdot \mathbf{m} - \dot{\psi}\mathbf{Q}(\psi\mathbf{e}) \cdot \mathbf{Q}(\theta\mathbf{m}) \cdot \mathbf{e}$$

Подставляя это выражение в первое из уравнений (5.2.18), получаем

$$D \left(\dot{\psi}\mathbf{e} + \dot{\theta}\mathbf{Q}(\psi\mathbf{e}) \cdot \mathbf{m} - \dot{\psi}\mathbf{Q}(\psi\mathbf{e}) \cdot \mathbf{Q}(\theta\mathbf{m}) \cdot \mathbf{e} \right) + c(\theta)\theta \mathbf{Q}(\psi\mathbf{e}) \cdot \mathbf{m} = \mathbf{0} \quad (5.2.31)$$

Проецируя это уравнение на \mathbf{e} получаем

$$D \left(\dot{\psi} - \cos \theta \dot{\psi} \right) = 0$$

Отсюда следует уже известный интеграл (5.2.29). Спроецируем уравнение (5.2.31) на вектор $\boldsymbol{\theta}$. Для этого умножим его скалярно на вектор $\boldsymbol{\theta}$. После некоторых преобразований получаем уравнение

$$D \left(\ddot{\theta} - \sin \theta \dot{\psi}^2 \right) + c(\theta)\theta = 0 \quad (5.2.32)$$

Подставляя сюда выражение (5.2.29) для $\dot{\psi}$, получаем уравнения для определения угла нутации θ

$$D \left(\ddot{\theta} - \sin \theta \frac{(1 - \cos \theta_0)^2}{(1 - \cos \theta)^2} \dot{\psi}_0^2 \right) + c(\theta)\theta = 0 \quad (5.2.33)$$

Хотя это уравнение имеет сложный вид, оно интегрируется в квадратурах стандартным образом. Отметим, что уравнение (5.2.33) остается нелинейным для сколь-угодно малых углов нутации θ . Если же использовать вектор поворота $\boldsymbol{\theta}$, при малых углах нутации $|\boldsymbol{\theta}|$, то для $\boldsymbol{\theta}$ сразу получаем линейное уравнение

$$D\ddot{\boldsymbol{\theta}} + c(0)\boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}$$

В этом проявляется одно из преимуществ использования вектора поворота, а не углов Эйлера. Наконец, если уравнение (5.2.31) спроецировать на вектор $\mathbf{e} \times \boldsymbol{\theta}$, то также получим тождество.

5.3 Регулярная прецессия гиростата на упругом основании и ее устойчивость

Выше было показано, что при некоторых упрощающих допущениях, которые в принципе реализуемы на практике, динамика гиростата на упругом основании сводится к полностью интегрируемой задаче. Здесь будет подробно рассмотрен один частный случай движения, а именно регулярная прецессия гиростата. Регулярной прецессией называют движение твердого тела при постоянном угле нутации. В этом случае имеем

$$\theta(t) = \theta_0 = \text{const} \quad (5.3.34)$$

Согласно уравнению (5.2.33) находится постоянная скорость прецессии $\dot{\psi}_0$

$$\dot{\psi}_0^2 = \frac{c(\theta_0)\theta_0}{D \sin \theta_0} \implies \psi(t) = \dot{\psi}_0 t + \psi_0 \quad (5.3.35)$$

Выпишем все основные характеристики регулярной прецессии.

Вектор поворота по (5.2.26) и (5.3.34) имеет вид

$$\boldsymbol{\theta}(t) = \mathbf{C}(\psi \mathbf{e}) \cdot \boldsymbol{\theta}_0 \quad \mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\theta} = 0 \quad (5.3.36)$$

Отсюда для $\dot{\boldsymbol{\theta}}$ имеем выражение

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = \dot{\psi}_0 \mathbf{e} \times \boldsymbol{\theta}(t) \quad (5.3.37)$$

Для угловой скорости имеем выражение (2.2.18), которое в развернутом виде записывается так

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} \boldsymbol{\theta} \times \dot{\boldsymbol{\theta}} + \frac{\theta - \sin \theta}{\theta^3} \boldsymbol{\theta} \times (\boldsymbol{\theta} \times \dot{\boldsymbol{\theta}})$$

Подставляя сюда выражение (5.3.37), получаем

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\psi}_0 \left((1 - \cos \theta_0) \mathbf{e} + \frac{\sin \theta_0}{\theta_0} \mathbf{e} \times \boldsymbol{\theta}(t) \right) \quad (5.3.38)$$

Из выражений (5.3.36) и (5.3.38) видим, что при регулярной прецессии вектор поворота $\boldsymbol{\theta}(t)$ и угловая скорость $\boldsymbol{\omega}(t)$ ортогональны между собой, т. е. тело поворачивается вокруг одной оси, но вращается вокруг другой оси, ортогональной оси поворота. Заметим, что тело вращается с постоянной по модулю угловой скоростью

$$|\boldsymbol{\omega}|^2 = 2(1 - \cos \theta_0) \dot{\psi}_0^2$$

Исследуем устойчивость регулярной прецессии. Для этого на исследуемое движение необходимо наложить малое возмущение общего вида и вывести так называемые уравнения в вариациях. Вывод последних, к сожалению, наталкивается на сравнительно громоздкие вычисления. Здесь возможны три различных подхода, приводящих к одним и тем же уравнениям.

Первый подход. Возмущение накладывается на вектор поворота. Рассмотрим возмущенный вектор поворота

$$\boldsymbol{\theta}_\varepsilon = \boldsymbol{\theta} + \varepsilon \boldsymbol{\varphi} \quad |\varepsilon| \ll 1$$

где вектор $\boldsymbol{\varphi}$ называется первой вариацией. Возмущенный вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}_\varepsilon$ вычисляется по формуле

$$\boldsymbol{\omega}_\varepsilon = \mathbf{Z}(\boldsymbol{\theta}_\varepsilon) \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}}_\varepsilon \quad \boldsymbol{\omega}_\varepsilon = \boldsymbol{\omega} + \varepsilon \boldsymbol{\zeta}$$

где $\boldsymbol{\zeta}$ — первая вариация $\boldsymbol{\omega}$. Дифференцируя данное выражение по ε и полагая ε равным нулю, получаем

$$\boldsymbol{\zeta} = \mathbf{Z}(\boldsymbol{\theta}) \cdot \dot{\boldsymbol{\varphi}} + \left. \frac{d}{d\varepsilon} \mathbf{Z}(\boldsymbol{\theta}_\varepsilon) \right|_{\varepsilon=0} \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}} \quad (5.3.39)$$

Этот подход неприятен тем, что получаются уравнения сложного вида. Действительно, возмущенное уравнение движения имеет вид

$$D\dot{\boldsymbol{\omega}}_\varepsilon + c \boldsymbol{\theta}_\varepsilon = \mathbf{0} \quad (5.3.40)$$

Пусть даже для простоты $c = \text{const}$. Дифференцируя это уравнение по ε и полагая $\varepsilon = 0$, получаем уравнения в вариациях

$$D\dot{\boldsymbol{\zeta}} + c \boldsymbol{\varphi} = \mathbf{0}$$

Сюда надо подставить выражение (5.3.39) и учесть, что вектор $\boldsymbol{\theta}$ зависит от времени.

Второй подход. Малое возмущение накладывается на тензор поворота

$$\mathbf{P}_\varepsilon = (\mathbf{E} + \varepsilon \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{P}(\boldsymbol{\theta}) \quad (5.3.41)$$

Тогда возмущенная угловая скорость вычисляется легко

$$\boldsymbol{\omega}_\varepsilon = \varepsilon \dot{\boldsymbol{\varphi}} + \boldsymbol{\omega} + \varepsilon \boldsymbol{\varphi} \times \boldsymbol{\omega}$$

Однако достаточно громоздко вычисляется вектор поворота $\boldsymbol{\theta}_\varepsilon$, отвечающий тензору поворота (5.3.41). Поэтому здесь будет использован третий подход, который короче первых двух.

Запишем возмущенные уравнения движения

$$D\dot{\boldsymbol{\omega}}_\varepsilon + c \boldsymbol{\theta}_\varepsilon = \mathbf{0}, \quad (5.3.42)$$

$$\dot{\boldsymbol{\theta}}_\varepsilon = g_\varepsilon \boldsymbol{\omega}_\varepsilon - \frac{1}{2} \boldsymbol{\theta}_\varepsilon \times \boldsymbol{\omega}_\varepsilon + \frac{1 - g_\varepsilon}{\theta_\varepsilon} \dot{\theta}_\varepsilon \boldsymbol{\theta}_\varepsilon \quad g_\varepsilon = \frac{\theta_\varepsilon \sin \theta_\varepsilon}{2(1 - \cos \theta_\varepsilon)}, \quad (5.3.43)$$

Жесткость упругого основания будем считать постоянной, что немного упрощает вычисления.

Примем разложения

$$\boldsymbol{\omega}_\varepsilon = \boldsymbol{\omega} + \varepsilon \boldsymbol{\zeta} \quad \boldsymbol{\theta}_\varepsilon = \boldsymbol{\theta} + \varepsilon \boldsymbol{\varphi}, \quad (5.3.44)$$

где $\boldsymbol{\zeta}$ и $\boldsymbol{\varphi}$ называются первыми вариациями $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\theta}$ соответственно. Для модуля вектора поворота получаем

$$\theta_\varepsilon = \theta + \varepsilon \frac{1}{\theta} \boldsymbol{\varphi} \cdot \boldsymbol{\theta}, \quad (5.3.45)$$

Дифференцируя (5.3.42) и (5.3.43) по ε и полагая затем $\varepsilon = 0$, получаем искомые уравнения в вариациях

$$D\dot{\boldsymbol{\zeta}} + c \boldsymbol{\varphi} = \mathbf{0}, \quad (5.3.46)$$

$$\dot{\boldsymbol{\varphi}} = g \boldsymbol{\zeta} - \frac{\theta - \sin \theta}{2(1 - \cos \theta)} \frac{1}{\theta} (\boldsymbol{\varphi} \cdot \boldsymbol{\theta}) \boldsymbol{\omega} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\varphi} \times \boldsymbol{\omega} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\zeta} + \frac{1 - g}{\theta} \frac{D}{c} (\dot{\boldsymbol{\zeta}} \cdot \boldsymbol{\theta}) \boldsymbol{\theta} \quad (5.3.47)$$

В последнем уравнении учтено, что модуль невозмущенного вектора поворота, то есть угол нутации, постоянен $\dot{\theta} = 0$.

Исключая из (5.3.47) вектор $\boldsymbol{\varphi}$ с помощью уравнения (5.3.46), получаем уравнение для первой вариации вектора угловой скорости

$$\begin{aligned} \frac{D}{c} \ddot{\boldsymbol{\zeta}} + g\boldsymbol{\zeta} + \frac{\theta - \sin \theta}{2\theta(1 - \cos \theta)} \frac{D}{c} (\dot{\boldsymbol{\zeta}} \cdot \boldsymbol{\theta}) \boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2} \frac{D}{c} \dot{\boldsymbol{\zeta}} \times \boldsymbol{\omega} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\zeta} - \\ - \frac{1-g}{\theta^2} \frac{D}{c} (\dot{\boldsymbol{\zeta}} \cdot \boldsymbol{\theta}) \boldsymbol{\theta} = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (5.3.48)$$

Получившееся уравнение имеет переменные коэффициенты, что затрудняет его анализ. Однако заменой переменных оно может быть сведено к уравнению с постоянными коэффициентами. При этом преобразовании следует использовать тождество

$$\mathbf{Q} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{a}) \times (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{b}) \quad \forall \mathbf{Q}: \quad \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^T = \mathbf{E}, \quad \det \mathbf{Q} = 1$$

Перепишем векторы $\boldsymbol{\theta}$ и $\boldsymbol{\omega}$ невозмущенного движения в виде

$$\boldsymbol{\theta} = \mathbf{Q}(\boldsymbol{\psi}\mathbf{e}) \cdot \boldsymbol{\theta}_0 \quad \boldsymbol{\theta}_0 = \text{const} \quad \mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\theta}_0 = 0 \quad \dot{\boldsymbol{\psi}} = \text{const}, \quad (5.3.49)$$

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\boldsymbol{\psi}} \mathbf{Q}(\boldsymbol{\psi}\mathbf{e}) \cdot \left((1 - \cos \theta) \mathbf{e} + \frac{\sin \theta}{\theta} \mathbf{e} \times \boldsymbol{\theta}_0 \right) = \mathbf{Q}(\boldsymbol{\psi}\mathbf{e}) \cdot \boldsymbol{\omega}_0 \quad (5.3.50)$$

Вместо первой вариации $\boldsymbol{\zeta}$ введем вектор $\boldsymbol{\eta}$ по формуле

$$\boldsymbol{\zeta}(t) = \mathbf{Q}(\boldsymbol{\psi}\mathbf{e}) \cdot \boldsymbol{\eta} \quad (5.3.51)$$

Отсюда получаем выражения

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\zeta}} &= \mathbf{Q}(\boldsymbol{\psi}\mathbf{e}) \cdot (\dot{\boldsymbol{\eta}} + \dot{\boldsymbol{\psi}}\mathbf{e} \times \boldsymbol{\eta}), \\ \ddot{\boldsymbol{\zeta}} &= \mathbf{Q}(\boldsymbol{\psi}\mathbf{e}) \cdot (\ddot{\boldsymbol{\eta}} + 2\dot{\boldsymbol{\psi}}\mathbf{e} \times \dot{\boldsymbol{\eta}} + \dot{\boldsymbol{\psi}}^2\mathbf{e} \times (\mathbf{e} \times \boldsymbol{\eta})), \\ \dot{\boldsymbol{\zeta}} \cdot \boldsymbol{\theta} &= \boldsymbol{\theta}_0 \cdot (\dot{\boldsymbol{\eta}} + \dot{\boldsymbol{\psi}}\mathbf{e} \times \boldsymbol{\eta}) \end{aligned} \quad (5.3.52)$$

После подстановки выражений (5.3.49)–(5.3.52) в уравнение (5.3.48) и последующего умножения получившегося уравнения на \mathbf{Q}^T слева, приходим к уравнению с постоянными коэффициентами

$$\begin{aligned} \frac{D}{c} (\ddot{\boldsymbol{\eta}} + 2\dot{\boldsymbol{\psi}}\mathbf{e} \times \dot{\boldsymbol{\eta}} + \dot{\boldsymbol{\psi}}^2\mathbf{e} \times (\mathbf{e} \times \boldsymbol{\eta})) + g\boldsymbol{\eta} + \frac{D}{c} \frac{\theta - \sin \theta}{2\theta(1 - \cos \theta)} \boldsymbol{\theta}_0 \cdot (\dot{\boldsymbol{\eta}} + \dot{\boldsymbol{\psi}}\mathbf{e} \times \boldsymbol{\eta}) \boldsymbol{\omega}_0 + \\ + \frac{1}{2} \frac{D}{c} (\dot{\boldsymbol{\eta}} + \dot{\boldsymbol{\psi}}\mathbf{e} \times \boldsymbol{\eta}) \times \boldsymbol{\omega}_0 - \frac{1}{2} \boldsymbol{\theta}_0 \times \boldsymbol{\eta} - \frac{1-g}{\theta^2} \frac{D}{c} \boldsymbol{\theta}_0 \cdot (\ddot{\boldsymbol{\eta}} + \dot{\boldsymbol{\psi}}\mathbf{e} \times \dot{\boldsymbol{\eta}}) \boldsymbol{\theta}_0 = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (5.3.53)$$

Уравнение (5.3.53) выглядит весьма громоздко, но оно имеет постоянные коэффициенты и потому допускает полное исследование. Введем в рассмотрение ортогональный базис из постоянных векторов

$$\mathbf{e}, \boldsymbol{\theta}_0, \mathbf{e} \times \boldsymbol{\theta}_0; \quad \mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\theta}_0 = 0 \quad (5.3.54)$$

Вектор $\boldsymbol{\eta}$ представим в виде разложения

$$\boldsymbol{\eta} = S\mathbf{e} + T\boldsymbol{\theta}_0 + R\mathbf{e} \times \boldsymbol{\theta}_0, \quad (5.3.55)$$

где

$$\mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\eta} = S \quad \boldsymbol{\theta}_0 \cdot \boldsymbol{\eta} = \theta^2 T \quad (\mathbf{e} \times \boldsymbol{\theta}_0) \cdot \boldsymbol{\eta} = \theta^2 R$$

Проецируя уравнение (5.3.53) на базисные векторы (5.3.54), получаем систему трех скалярных уравнений

$$\ddot{S} + \frac{1 + \cos \theta}{2} \dot{\psi}^2 S + \frac{\theta^2}{2} \dot{\psi} \dot{T} - \frac{c}{2D} \left(1 + \frac{\theta}{\sin \theta}\right) \theta^2 R = 0, \quad (5.3.56)$$

$$-\frac{\dot{\psi} \sin \theta}{2\theta} \dot{S} + g\ddot{T} - \frac{1 + \cos \theta}{2} \left(1 + \frac{\theta}{\sin \theta}\right) \dot{\psi} \dot{R} = 0, \quad (5.3.57)$$

$$\frac{1}{2} \dot{\psi}^2 \frac{\sin \theta}{\theta} S + \ddot{R} - \frac{\sin \theta (\theta - \sin \theta)}{2(1 - \cos \theta)} \dot{\psi}^2 R + \left(\frac{3 + \cos \theta}{2} + \frac{\sin \theta (\theta - \sin \theta)}{2(1 - \cos \theta)}\right) \dot{\psi} \dot{T} = 0 \quad (5.3.58)$$

Напомним, что скорость прецессии в этих уравнениях определена формулой (5.3.35). Оставляя за рамками работы полный анализ уравнений (5.3.56)–(5.3.58) ограничимся рассмотрением малых углов нутации. Отбрасывая величины порядка $O(\theta^2)$ в сравнении с единицей, вместо (5.3.56)–(5.3.58) получаем упрощенную систему

$$\ddot{S} + \frac{c}{D} S = 0, \quad (5.3.59)$$

$$\ddot{T} - 2\dot{\psi} \dot{R} = \frac{1}{2} \dot{\psi} \dot{S}, \quad (5.3.60)$$

$$\ddot{R} + 2\dot{\psi} \dot{T} = -\frac{1}{2} \frac{c}{D} S \quad (5.3.61)$$

Из уравнения (5.3.60) получаем

$$\dot{T} = -2\dot{\psi}(R + A) + \frac{1}{2} \dot{\psi} S \quad (5.3.62)$$

Тогда (5.3.61) может быть переписано в виде

$$(R + A)'' + 4\dot{\psi}^2(R + A) = -\frac{3}{2} \frac{c}{D} S \quad (5.3.63)$$

Из этой системы устойчивость регулярной прецессии при малых углах нутации вполне очевидна. Обратим внимание, что в левой части уравнения (5.3.62) стоит гармоническая функция времени. Кроме того, резонансы в уравнении (5.3.63) невозможны.

5.4 Динамика двухроторного гиростата на упругом основании при действии внешнего следящего момента

Выше было показано, как можно распорядиться вспомогательным ротором, чтобы максимально упростить задачу. Ниже будет рассмотрен вопрос о возможности использования вспомогательного ротора (не меняя режима работы основного ротора) для стабилизации движения гиростата при действии внешнего малого следящего момента. Роторы будем считать соосными, а их оси направим по оси \mathbf{k} . Напомним, что при недеформированном основании ось \mathbf{k} несущего тела направлена вертикально вверх. Основные уравнения были выведены в главе II — это уравнения (2.6.58)-(2.6.62), в которых следует принять $\mathbf{m} = \mathbf{n} = \mathbf{k}$. В качестве внешнего момента выбираем следящий момент.

$$\mathbf{M}_{\text{ex}} = \mathbf{L}\mathbf{P} \cdot \mathbf{k} \quad \mathbf{U} = 0 \quad (5.4.64)$$

Упругое основание будем считать изотропным, а суммарный тензор инерции \mathbf{D} шаровым. С практической точки зрения эти упрощения нерациональны и ухудшают рабочие параметры гиростата (используемого в качестве центрифуги). С технической точки зрения они упрощают вычисления. С теоретической точки зрения они не принципиальны, поскольку все основные проблемы, связанные с возможными неустойчивостями, остаются и даже усиливаются.

При принятых допущениях уравнения (2.6.58)-(2.6.62) принимают вид

$$\mathbf{D}\boldsymbol{\Omega} + (\lambda_b \dot{\alpha} + \lambda_c \dot{\beta}) \mathbf{k} + (\lambda_b \dot{\alpha} + \lambda_c \dot{\beta}) \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{k} + c(\theta)\boldsymbol{\theta} = \mathbf{L}\mathbf{k}, \quad (5.4.65)$$

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{\Omega} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\Omega} + \frac{1-g}{\theta^2}\boldsymbol{\theta} \times (\boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\Omega}) \quad g \equiv \frac{\theta \sin \theta}{2(1 - \cos \theta)}, \quad (5.4.66)$$

$$\lambda_b(\dot{\alpha} - \omega_b) + \eta_b(\dot{\alpha} - \omega_b) + \lambda_b \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\Omega} = 0, \quad (5.4.67)$$

$$\lambda_c(\dot{\beta} - \omega_c) + \eta_c(\dot{\beta} - \omega_c) + \lambda_c \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\Omega} = 0 \quad (5.4.68)$$

Напомним, что здесь вектор поворота $\boldsymbol{\theta}$ и правая угловая скорость $\boldsymbol{\Omega}$ относятся к несущему телу, заделанному в упругое основание.

Основной режим работы гиростата характеризуется тем, что несущее тело не совершает поперечных колебаний, т. е. имеем

$$\dot{\boldsymbol{\theta}}(t) = \theta(t)\mathbf{k} \quad \boldsymbol{\Omega} = \dot{\boldsymbol{\theta}}(t)\mathbf{k} \quad (5.4.69)$$

В этом случае уравнение (5.4.66) обращается в тождество, а оставшиеся уравнения принимают вид

$$\mathbf{D}(\theta + \lambda_b \alpha + \lambda_c \beta)'' + c(\theta)\boldsymbol{\theta} = \mathbf{L},$$

$$\lambda_b(\dot{\alpha} - \omega_b) + \eta_b(\dot{\alpha} - \omega_b) + \lambda_b \ddot{\theta} = 0, \quad (5.4.70)$$

$$\lambda_c(\dot{\beta} - \omega_c) + \eta_c(\dot{\beta} - \omega_c) + \lambda_c \ddot{\theta} = 0$$

Если энергия упругого основания выбрана в виде квадратичной формы, то жесткость $c = \text{const}$. Введем обозначения

$$x = \dot{\alpha} - \omega_b \quad y = \dot{\beta} - \omega_c$$

Тогда (5.4.70) переписывается в виде

$$\begin{aligned} D\ddot{\theta} + \lambda_b \dot{x} + \lambda_c \dot{y} + c\theta &= L, \\ \lambda_b \dot{x} + \eta_b x + \lambda_b \ddot{\theta} &= 0, \\ \lambda_c \dot{y} + \eta_c y + \lambda_c \ddot{\theta} &= 0 \end{aligned} \quad (5.4.71)$$

Получили систему линейных дифференциальных уравнений. Ее частное решение имеет вид

$$x = y = 0 \quad \theta_* = L/c \quad (5.4.72)$$

Характеристический полином для однородной системы (5.4.71) имеет вид

$$F(p) = a_0 p^4 + a_1 p^3 + a_2 p^2 + a_3 p + a_4,$$

где

$$\begin{aligned} a_0 &= \lambda_b \lambda_c (D - \lambda_b - \lambda_c) > 0 & a_1 &= \lambda_c \eta_b (D - \lambda_c) + \lambda_b \eta_c (D - \lambda_b) > 0, \\ a_2 &= D \eta_b \eta_c + c \lambda_b \lambda_c > 0 & a_3 &= c(\lambda_c \eta_b + \lambda_b \eta_c) > 0 & a_4 &= c \eta_b \eta_c > 0 \end{aligned} \quad (5.4.73)$$

По правилу Декарта в силу неравенств (5.4.73) сразу определяем, что полином $F(p)$ не имеет нулей при вещественных положительных p , но может иметь четыре нуля при отрицательных действительных p . Выписывая критерии Рауса-Гурвица, убеждаемся, что все нули полинома $F(p)$ имеют отрицательную действительную часть. Следовательно, при больших временах все частные решения однородной системы (5.4.71) стремятся по модулю к нулю и остается только частное решение (5.4.72). Итак, после завершения этапа разгона гиростат выходит на следующий режим работы

$$\theta = L/c \mathbf{k} \quad \dot{\alpha} = \omega_b \quad \dot{\beta} = \omega_c, \quad (5.4.74)$$

т.е. несущее тело находится в положении равновесия, а роторы вращаются с постоянными угловыми скоростями. Так будет в идеальном случае при отсутствии возмущений, вызывающих поперечные колебания несущего тела. Чтобы идеальный режим (5.4.74) осуществился в реальности, необходимо, чтобы он был устойчив по отношению к малым возмущениям.

Рассмотрим возмущенное движение

$$\theta_\varepsilon = (L/c) \mathbf{k} + \varepsilon \boldsymbol{\varphi} \quad \boldsymbol{\Omega}_\varepsilon = \varepsilon \boldsymbol{\zeta} \quad \dot{\alpha}_\varepsilon = \omega_b + \varepsilon u \quad \dot{\beta}_\varepsilon = \omega_c + \varepsilon v \quad (5.4.75)$$

Записывая возмущенные уравнения движения (5.4.65)–(5.4.68) и подставляя в них представления (5.4.75), получаем систему уравнений в вариациях

$$D\dot{\boldsymbol{\zeta}} + (\lambda_b \dot{u} + \lambda_c \dot{v}) \mathbf{k} + (\lambda_b \omega_b + \lambda_c \omega_c) \boldsymbol{\zeta} \times \mathbf{k} + c \boldsymbol{\varphi} = \mathbf{0}, \quad (5.4.76)$$

$$\dot{\boldsymbol{\varphi}} = \boldsymbol{\zeta} + \frac{1}{2} \frac{L}{c} \mathbf{k} \times \boldsymbol{\zeta} + (1 - g) \mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \boldsymbol{\zeta}) \quad g = \frac{\theta \sin \theta}{2(1 - \cos \theta)} \quad \theta = \frac{L}{c}, \quad (5.4.77)$$

$$\lambda_b \dot{u} + \eta_b u + \lambda_b \mathbf{k} \cdot \dot{\boldsymbol{\zeta}} = 0 \quad \lambda_c \dot{v} + \eta_c v + \lambda_c \mathbf{k} \cdot \dot{\boldsymbol{\zeta}} = 0 \quad (5.4.78)$$

Система (5.4.76)–(5.4.78) разбивается на две независимых подсистемы, если ввести разложения

$$\boldsymbol{\varphi} = \chi \mathbf{k} + \mathbf{y} \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{y} = 0 \quad \boldsymbol{\zeta} = \psi \mathbf{k} + \mathbf{z} \quad \mathbf{z} \cdot \mathbf{k} = 0$$

Тогда вместо (5.4.76)–(5.4.78) получим

$$D\ddot{\mathbf{x}} + c\mathbf{x} + \lambda_b \dot{\mathbf{u}} + \lambda_c \dot{\mathbf{v}} = 0, \quad (5.4.79)$$

$$\lambda_b \dot{\mathbf{u}} + \eta_b \mathbf{u} + \lambda_b \ddot{\mathbf{x}} = 0 \quad \lambda_c \dot{\mathbf{v}} + \eta_c \mathbf{v} + \lambda_c \ddot{\mathbf{x}} = 0$$

$$D\dot{\mathbf{z}} - (\lambda_b \omega_b + \lambda_c \omega_c) \mathbf{k} \times \mathbf{z} + c\mathbf{y} = 0, \quad (5.4.80)$$

$$\dot{\mathbf{y}} = g\mathbf{z} + \frac{1}{2} \frac{L}{c} \mathbf{k} \times \mathbf{z}$$

Система (5.4.79) была проанализирована в предыдущем пункте, где было показано, что ее решения стремятся к нулю. Поэтому осталось исследовать систему (5.4.80), которую удобнее записать в виде одного уравнения. Для этого достаточно продифференцировать первое из уравнений (5.4.80) и исключить $\dot{\mathbf{y}}$ с помощью второго уравнения из (5.4.80). В результате приходим к уравнению

$$D\ddot{\mathbf{z}} - (\lambda_b \omega_b + \lambda_c \omega_c) \mathbf{k} \times \dot{\mathbf{z}} + cg\mathbf{z} + \frac{1}{2} L \mathbf{k} \times \mathbf{z} = 0 \quad (5.4.81)$$

Частные решения этого уравнения будем искать в виде

$$\mathbf{z} = e^{qt} \mathbf{Q}(p\mathbf{k}) \cdot \mathbf{A} \quad \mathbf{A} = \text{const} \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{k} = 0 \quad (5.4.82)$$

Вычисляя производные, получаем

$$\dot{\mathbf{z}} = q\mathbf{z} + p\mathbf{k} \times \mathbf{z} \quad \mathbf{k} \times \dot{\mathbf{z}} = q\mathbf{k} \times \mathbf{z} - p\mathbf{z}$$

$$\ddot{\mathbf{z}} = (q^2 - p^2)\mathbf{z} + 2pq\mathbf{k} \times \mathbf{z}$$

Подставляя эти выражения в (5.4.81) и полагая коэффициенты при \mathbf{z} и $\mathbf{k} \times \mathbf{z}$ равными нулю, получаем систему уравнений

$$q^2 - p^2 + ap + b = 0 \quad q = l/(a - 2p), \quad (5.4.83)$$

где введены обозначения

$$a = \frac{\lambda_b \omega_b + \lambda_c \omega_c}{D} \quad b = \frac{cg}{D} \quad l = \frac{L}{2D}$$

Считая внешний момент L малым, из (5.4.83) видим, что и величина q мала. Отбрасывая из первого уравнения системы (5.4.83) величину q^2 , находим значения p

$$a - 2p = \pm \sqrt{a^2 + 4b}$$

Теперь из второго уравнения системы (5.4.83) видим, что при любом знаке l одно из значений q будет положительным. Иными словами, одно из двух частных решений (5.4.81) будет расти по модулю, т. е. имеем неустойчивость.

5.5 Обсуждение

Постановка второго ротора имеет своей целью борьбу с резонансами и разного рода неустойчивостями. Результаты данной главы не подтверждают данную точку зрения. Впрочем, это не удивительно. Выше рассматривались только стационарные режимы, в которых вспомогательный ротор ведет себя пассивно. Ситуация может измениться и должна измениться, если в процессе работы центрифуги активно управлять скоростью вращения вспомогательного ротора. Это означает, что в системе (5.4.65)–(5.4.68) параметр ω_b , т. е. номинальную угловую скорость вспомогательного ротора, менять во времени заданным образом, для чего необходимо иметь специальную систему управления. Задачи этого типа трудно поддаются аналитическому решению и требуют активного использования компьютерных вычислений, что выходит за рамки данной работы.

Список литературы

- [1] Агафонов С.А. Об устойчивости установившихся движений вращающегося вала // Изв. АН СССР. МТТ. 1989. N 6. С. 61–65.
- [2] Андреев Д.В. Об устойчивости перманентных вращений несимметричного тяжчлого твчрдого тела // ПММ. 1983. Т.47. Вып.3. С. 372–377.
- [3] Аникеев Г.И., Сильвестров Э.Е. Нелинейные колебания ротора с учетом гироскопического эффекта диска // Машиноведение. 1971. N 1. С. 3–10.
- [4] Арнольд В.И. Математические методы классической механики. М.: Наука. 1989. 472 с.
- [5] Архангельский Ю.А. Аналитическая динамика твердого тела. М.: Наука. 1977. 328 с.
- [6] Баргер И.Б. Самовозбуждение гибкого вала. Труды ЛПИ им. Калинина. 1947. N 3. С. 41–61.
- [7] Белецкий В.В. Движение искусственного спутника относительно центра масс. М.: Наука. 1965. 416 с.
- [8] Белецкий В.В. Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. М.: Изд. МГУ. 1975. 308 с.
- [9] Белецкий В.В., Хентов А.А. Вращательное движение намагниченного спутника. М.: Наука. 1985. 287 с.
- [10] Бидерман В.Л. Прикладная теория механических колебаний. М.: Высшая школа. 1972. 416 с.
- [11] Бияров Т., Крементуло В.В., Тажеков А. О стабилизации перманентных вращений твердого тела // Изв. АН СССР. МТТ. 1991. N 4. С. 16–21.

- [12] Болотин В.В. Неконсервативные задачи упругой устойчивости. М.: ГИФМЛ. 1961. 339 с.
- [13] Бутенин Н.В., Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А. Введение в теорию нелинейных колебаний. М.: Наука. 1987. 384 с.
- [14] Виттенбург Й. Динамика систем твердых тел. М.: Мир. 1980. 292 с.
- [15] Вульфсон И.И., Коловский М.З. Нелинейные задачи динамики машин. Л.: Машиностроение. 1968. 284 с.
- [16] Ганиев Р.Ф., Кононенко В.О. Колебания твердых тел. М.: Наука. 1976. 431 с.
- [17] Ганиев Р.Ф., Ковальчук П.С. Динамика систем твердых и упругих тел. (Резонансные явления в неупругих колебаниях). М.: Машиностроение. 1980. 208 с.
- [18] Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука. 1988. 548с.
- [19] Голуб Е.Л., Павлинов М.И. Динамика несимметричного жесткого ротора в опорах с вращающимися упругими элементами // Изв. АН СССР. МТТ. 1992. N 1. С. 19–24.
- [20] Граммель Р. Гирокосп, его теория и применение. Т. 1,2. М.: ИЛ. 1952. 352 с, 318 с.
- [21] Григорьян А.Т. История механики гироскопических систем. 1975. 126 с.
- [22] Григорьян А.Т., Фрадлин Б.Н. История механики твердого тела. М.: Наука. 1982. 296 с.
- [23] Гусаров А.А., Сусанин В.И., Шаталов Л.Н., Грушин Б.М. Автоматическая балансировка роторов машин. М.: Наука. 1979. 152 с.
- [24] Джинсберг Дж. Влияние демпфирования на нелинейную систему с двумя степенями свободы // Механика. Периодич. сб. переводов иностр. статей. М.: Мир. 1973. N 4. С. 26–38.
- [25] Диментберг Ф.М. Изгибные колебания вращающихся валов. М.: Изд. АН СССР. 1959. 248 с.
- [26] Диментберг Ф.М., Шаталов К.Т., Гусаров А.А. Колебания машин. М.: Машиностроение. 1964. 308 с.
- [27] Елисеев В.В. Механика упругих стержней. С.-Пб.: Изд. СПбГТУ. 1994. 84 с.
- [28] Жбанов Ю.К. Об устойчивости вращающегося вала // Изв. АН СССР. МТТ. 1981. N 3. С. 157–161.

- [29] Жилин П.А., Голоскоков Д.П. Приложение тензорного исчисления. Л.: Изд. ЛИВТ. 1988. 62 с.
- [30] Жилин П.А. Векторы и тензоры второго ранга в трехмерном пространстве. С.-Пб.: Изд. СПбГТУ. 1992. 86 с.
- [31] Жилин П.А. Тензор поворота в описании кинематики твердого тела // Труды СПбГТУ. 1992. N 443. С. 100–121.
- [32] Жилин П.А. Сергеев А.Д. Кручение упругого консольного стержня моментом, приложенным на свободном торце. С.-Пб.: Изд. СПбГТУ. 1993. 32 с.
- [33] Жилин П.А. Сергеев А.Д. Экспериментальное исследование устойчивости консольного стержня при кручении // Механика и процессы управления. Труды СПбГТУ. 1993. №446. С.174–175.
- [34] Жилин П.А. Основные структуры и законы рациональной механики // Сб. докладов на 1-ом Всесоюзном совещании зав. каф. “Теорет. механика”, СПбГТУ, сент. 93. Изд. ВИКИ. 1994. С.23–45.
- [35] Жилин П.А. Сергеев А.Д. Равновесие и устойчивость тонкого стержня, нагруженного консервативным моментом // Механика и процессы управления. Труды СПбГТУ. 1994. №448. С.47–56.
- [36] Жилин П.А. Новые результаты по анализу свободного вращения твердых тел. ИПМаш РАН, препринт №102, 1994 г., 34 с.
- [37] Жилин П.А. Исходные понятия и фундаментальные законы рациональной механики // Труды XXII всесоюзной школы-семинара “Анализ и синтез нелинейных механических колебательных систем”, С.-Пб, 1–10 июля 1994. Изд. инст. проблем машиноведения РАН. 1995. С.10-36.
- [38] Жилин П.А. Спиральные движения в механике // Тезисы докладов Российской научно-техн. конференции “Инновационные наукоемкие технологии для России”. С.-Пб., СПбГТУ. 1995. Часть 5. С.157.
- [39] Жилин П.А. Механика открытых систем. // Тезисы докладов Российской научно-техн. конференции “Инновационные наукоемкие технологии для России”. С.-Пб., СПбГТУ. 1995. Часть 5. С.158.
- [40] Жилин П.А. Сергеев А.Д. Устойчивость и колебания тонких стержней при совместном изгибе-кручении // Тезисы докладов Российской научно-техн. конференции “Инновационные наукоемкие технологии для России”. С.-Пб., СПбГТУ. 1995. Часть 5. С.159.
- [41] Жилин П.А. Товстик Т.П. Вращение твердого тела на инерционном стержне // Тезисы докладов Российской научно-техн. конференции “Инновационные наукоемкие технологии для России”. С.-Пб., СПбГТУ. 1995. Часть 5. С.160.

- [42] Жилин П.А. Спинорные движения и устойчивость равновесных конфигураций тонких упругих стержней // Механика и процессы управления. Труды СПбГТУ. 1995. №458. С.56–73.
- [43] Жилин П.А. Товстик Т.П. Вращение твердого тела на инерционном стержне // Механика и процессы управления. Труды СПбГТУ, 1995, №458, с.78–83.
- [44] Жилин П.А. Сергеев А.Д., Товстик Т.П. Нелинейная теория стержней и ее приложения. // Труды XXIV Всесоюзной школы-семинара “Анализ и синтез нелинейных механических колебательных систем” 1996, С.-Пб, 1997. С.313–337.
- [45] Жилин П.А. Динамика и устойчивость положений равновесия твердого тела на упругом основании. // Труды XXIV Всесоюзной школы-семинара “Анализ и синтез нелинейных механических колебательных систем” 1996, С.-Пб, 1997. С.90–122.
- [46] Журавлев В.Ф. Динамика ротора в неидеальных подшипниках // Изв. АН СССР. МТТ. 1971. N 5. С. 44–48.
- [47] Журавлев В.Ф., Бальмонт В.Б. Механика шарикоподшипников гироскопов. М.: Машиностроение. 1986. 272 с.
- [48] Закржевский М.В. Колебания существенно нелинейных механических систем. Рига: Зинатне. 1980. 190 с.
- [49] Иванова Е.А. Свободное вращение осесимметричного твердого тела в сопротивляющейся среде // метод. указания. СПбГТУ. Каф. Теоретическая механика. С.-Петербург. 1995. 14 с.
- [50] Иванова Е.А. Задание тензора поворота через вектор кинетического момента // Доклад на XXV школе - семинаре “Анализ и синтез нелинейных механических колебательных систем”, С.-Петербург, 1 - 7 июля, 1997.
- [51] Зобнин А.П., Кельзон А.С., Малинин Л.М. Влияние угла между векторами дисбалансов на амплитудно-частотную характеристику линейной роторной системы и способ его измерения // Вестник машиностроения. 1982. N 5. С. 27–29.
- [52] Ишлинский А.Ю. Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация. М.: Наука. 1976. 670 с.
- [53] Ишлинский А.Ю. Классическая механика и силы инерции. М.: Наука. 1987. 319 с.
- [54] Ишлинский А.Ю. Вращение твердого тела на струне. М.: Наука. 329 с.
- [55] Каудерер Г. Нелинейная механика. М.: ИЛ. 1961. 777 с.

- [56] Кельзон А.С., Мушина Н.И. Колебания самоцентрирующейся центрифуги. Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. N 3. 1961. С. 98–101.
- [57] Кельзон А.С. Исследование динамики центрифугального прядильного веретена со сферическим демпфером. Изв. высш. уч. завед. N 2. Технология текстильной промышленности. 1962. С. 137–145.
- [58] Кельзон А.С., Журавлев Ю.М., Январев М.В. Расчет и конструирование роторных машин. Л.: Машиностроение, Ленинградское отделение. 1977. 287 с.
- [59] Кельзон А.С., Циманский Ю.П., Яковлев В.И. Динамика роторов в упругих опорах. М.: Наука. 1982. 280 с.
- [60] Кельзон А.С., Меллер А.С. Динамика статически неуравновешенного ротора в упругих опорах. Докл. АН СССР. 1991. Т.318. N 1. С. 69–72.
- [61] Кельзон А.С., Исаюк-Саевская А.Р. Динамика высокооборотного компрессора // ПММ. 1992. Т.56. Вып.2. С. 331–335.
- [62] Кельзон А.С., Малинин Л.М. Управление колебаниями роторов. С-Пб: Политехника. 1992. 119 с.
- [63] Кирпичников С.Н., Новосцлов В.С. Математические аспекты кинематики твердого тела. Л.: Изд. ЛГУ. 1986. 250 с.
- [64] Климов Д.М., Харламов С.А. Динамика гироскопа в кардановом подвесе. М.: Наука. 1978. 208 с.
- [65] Климов Д.М., Руденко В.М. Методы компьютерной алгебры в задачах механики. М.: Наука. 1989. 214 с.
- [66] Козлов В.В. Методы качественного анализа в динамике твердого тела. М.: Изд. МГУ. 1980. 230 с.
- [67] Коловский М.З. Теория устойчивости движения. Л.: Изд. ЛПИ. 111 с.
- [68] Коловский М.З., Слоущ А.В. Динамика промышленных роботов. М.: Наука. 1988.
- [69] Кононенко В.О. Колебательные системы с ограниченным возбуждением. М.: Наука. 1964. 236 с.
- [70] Кононенко В.О. Нелинейные колебания механических систем. Избранные труды. Киев: Наукова думка. 1980. 382 с.
- [71] Кочин Н.Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. М.: Изд. АН СССР. 1961. 426 с.
- [72] Кошляков В.Н. Задачи динамики твердого тела и прикладной теории гироскопов. М.: Наука. 1985. 286 с.

- [73] Кошляков В.Н. Об одном случае неустойчивости быстровращающегося тяжелого тела // Изв. АН СССР. МТТ. 1988. N 4. С. 43–50.
- [74] Кривцов А.М. Математические модели для расччта динамики лабораторных центрифуг // Труды СПбГТУ. 1993. № 446. С. 187–190.
- [75] Кривцов А.М. Стационарное движение несбалансированного ротора центрифуги в околорезонансных областях // Труды СПбГТУ. 1993. № 446. С. 190–193.
- [76] Кривцов А.М. Устойчивость стационарного движения несимметричного волчка при консервативной нагрузке. Деп. ВИНТИ. 01.07.94. N 1640-B94. 16 с.
- [77] Кривцов А.М. Околорезонансные колебания неуравновешенного волчка // Труды СПбГТУ. 1994. № 448. С. 65–75.
- [78] Кривцов А.М. К исследованию эволюционного поведения волчков на шаровом основании // Труды СПбГТУ. 1994. № 448. С. 172–175.
- [79] Кривцов А.М. Случай Лагранжа в динамике твчрдого тела // Труды СПбГТУ. 1995. №458. С. 130–131.
- [80] Кривцов А.М. Теоретическая механика. Элементы кинематики симметричного твчрдого тела: Учебное пособие. СПб. гос. техн. ун-т. СПб., 1996. 38 с.
- [81] Кривцов А.М. Теоретическая механика. Колебания вращающегося твчрдого тела: Учебное пособие. СПб. гос. техн. ун-т. СПб., 1996. 76 с.
- [82] Кривцов А.М. Об использовании векторов кинетического момента и угловой скорости при описании вращательных движений твердого тела. Труды XXIV Всесоюзной школы-семинара “Анализ и синтез нелинейных механических колебательных систем” 1996, С.-Пб, 1997. С.351–363.
- [83] Кривцов А.М. Использование векторных переменных для описания вращательных движений твердого тела. Деп. ВИНТИ. 21.04.97, №1345-B97. 15 с.
- [84] Кривцов А.М. Стационарные движения несимметричного волчка // Изв. РАН. МТТ. 1997. №3. С. 28–38.
- [85] Крэнделл С., Броузенс Р. Об устойчивости вращения ротора, обладающего несимметрией инерции и несимметрией жчсткости вала // Труды амер. общества инж.-механиков. Прикл. механика. 1961. Т.28. N 4. С. 97–101.
- [86] Кушкуль М.Я. Автоколебания роторов. М.: Изд. АН СССР. 1963. 167 с.
- [87] Лагалли М. Векторное исчисление. М.–Л.: ОНТИ. 1936. 343с.
- [88] Лойцянский Л.Г., Лурье А.И. Курс теоретической механики. Т.2. М.: Наука. 1983. 640 с.

- [89] Лукьяненко В.М., Таранец А.В. Промышленные центрифуги. М.: Химия. 1974. 376 с.
- [90] Лурье А.И. Аналитическая механика. М.: Физматгиз. 1961. 824 с.
- [91] Лурье А.И. Теория упругости. М.: Наука, 1970. 939 с.
- [92] Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
- [93] Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. М., Л.: Гостехиздат. 1950. 471 с.
- [94] Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения // Собр. соч. Т.2. М., Л.: Изд. АН СССР. 1958. С. 7–263.
- [95] Математическая энциклопедия. Т.3. М.: Советская энциклопедия. 1982. 1183 с.
- [96] Магнус К. Гироскоп: Теория и применение. М.: Мир, 1974. 526 с.
- [97] Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. М.: Наука. 1966. 530 с.
- [98] Маркеев А.П. Динамика тела, соприкасающегося с твердой поверхностью. М.: Наука. 1992. 336 с.
- [99] Меркин Д.Р. Гироскопические системы. М.: Наука. 1974. 344 с.
- [100] Меркин Д.Р. Об устойчивости стационарных движений оси вращающегося ротора // Докл. АН СССР. 1981. Т.257. N 2. С. 298–301.
- [101] Меркин Д.Р. Об устойчивости стационарных движений оси вращающегося ротора, установленного в нелинейных подшипниках // ПММ. 1983. Т.47. Вып.3. С. 378–384.
- [102] Меркин Д.Р. Введение в теорию устойчивости движения. М.: Наука. 1987. 304 с.
- [103] Мигулин В.В., Медведев В.И., Мустель Е.Р., Парыгин В.Н. Основы теории колебаний. М.: Наука. 1988. 392 с.
- [104] Моисеев Н.Н., Румянцев В.В. Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. М.: Наука. 1965. 440 с.
- [105] Николаи Е.Л. Труды по механике. М.: Гостехиздат. 1955. 584 с.
- [106] Пальмов В.А. Колебания упруго-пластических тел. М.: Наука. 1976. 348 с.
- [107] Пановко Я.Г., Губанова И.И. Устойчивость и колебания упругих систем. М.: Наука. 1987. 352 с.
- [108] Пановко Я.Г. Основы прикладной теории колебаний и удара. Л.: Политехника. 1990. 272 с.

- [109] Пановко Я.Г. Введение в теорию механических колебаний. М.: Наука. 1991. 256 с.
- [110] Позняк Э.Л. Нелинейные колебания неуравновешенных вертикальных роторов на подшипниках качения. М.: АН СССР, Машиноведение. N 1. 1971. С. 23–31.
- [111] Раус Э.Дж. Динамика системы твердых тел. М.: Наука. 1983. Т.1,2. 464 с., 544 с.
- [112] Рубановский В.Н., Самсонов В.А. Избранные задачи по теории устойчивости. М.: Изд. МГУ. 1981. 51 с.
- [113] Рубановский В.Н., Самсонов В.А. Устойчивость стационарных движений в примерах и задачах. М.: Наука. 1988. 304 с.
- [114] Румянцев В.В. Устойчивость перманентных вращений твердого тела // ПММ. Т.20. Вып.1. 1956. С. 51–56.
- [115] Румянцев В.В. К устойчивости перманентных вращений твердого тела около неподвижной точки // ПММ. 1957. Т.21. Вып.3. С. 339–346.
- [116] Савченко А.Я. Устойчивость стационарных движений механических систем. Киев: Наукова думка. 1977. 160 с.
- [117] Савченко А.Я., Болграбская И.А., Кононыхин Г.А. Устойчивость движения систем связанных твердых тел. Киев: Наукова думка. 1991. 165 с.
- [118] Сергеев В.С. Периодические движения тяжелого твердого тела с неподвижной точкой, близкого к динамически симметричному // ПММ. 1983. Т.47. Вып.1. С. 163–166.
- [119] Смольников Б.А., Степанова М.В. Перманентные вращения гиростата с самовозбуждением // Изв. АН СССР. МТТ. 1981. N 3. С. 107–113.
- [120] Смольников Б.А. Проблемы механики и оптимизации роботов. М.: Наука. 1991. 232 с.
- [121] Соколов В.И. Современные промышленные центрифуги. М.: Машиностроение. 1967. 520 с.
- [122] Стокер Д. Нелинейные колебания в механических и электрических системах. М.: ИЛ. 1953. 256 с.
- [123] Тондл А. Динамика роторов турбогенераторов. М.–Л.: Энергия. 1971. 387 с.
- [124] Тондл А. Автоколебания механических систем. М.: Мир. 1979. 429 с.
- [125] Тондл А. Нелинейные колебания механических систем. М.: Мир. 1973. 334 с.

- [126] Филиппов В.В. Предельные уровни вибраций ротора в подшипниках качения. Московский энергетический институт. Сборник научных трудов. 1989. N 217. С. 24–28.
- [127] Филиппов В.В. Об устойчивости стационарных движений твердого тела в упругих опорах. 7-й Всесоюзный съезд по теоретической и прикладной механике. М. 15–21 авг. 1991.
- [128] Харламов А.П. Лекции по динамике твердого тела. Новосибирск: Изд. Новосиб. ун-та. 1965. 221 с.
- [129] Харламова Е.И., Мозалевская Г.В. Интегриродифференциальное уравнение динамики твердого тела. Киев: Наукова думка. 1986. 296 с.
- [130] Циглер Г. Основы теории упругой устойчивости конструкций. М.: Мир. 1971. 192 с.
- [131] Четаев Н.Г. Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. М.: Изд. АН СССР. 1962. 535 с.
- [132] Четаев Н.Г. Устойчивость движения. М.: Наука. 1989. 176 с.
- [133] Черноусько Ф.Л. Движение твчрдого тела с полостями, содержащими вязкую жидкость. М.: Наука. 1968. 230 с.
- [134] Шаплыко В.И., Смирнов Б.И., Павлинов М.И., Голуб Е.Л. Динамика несимметричного жесткого ротора, подвешенного на упругой опоре. Проблемы машиностроения и надежности машин. 1992. N 5. С. 27–32.
- [135] Шкоропад Д.Е., Новиков О.П. Центрифуги и сепараторы для химических производств. М.: Химия. 1987. 256 с.
- [136] *Argyris J.* An excursion into large rotations // Computer methods in applied mechanics and engineering. North-Holland. 1982. N 32. pp. 85–155.
- [137] *Argyris J., Poterasu V.F.* Large rotations revisited application of Lie algebra // Computer methods in applied mechanics and engineering. North-Holland. 1993. N 103. pp. 11–42.
- [138] *Gladwell G.M.L., Stammers C.W.* On the stability of an unsymmetrical leavings // J. Sound and Vibr. 1966. V.3. N 3. pp. 221–232.
- [139] *Jardine A.K.S., Kirkham A.C.Y.* Maintenance policy for centrifuges // The Inst. of mech. engeneers. London. 1973. V.187. N 53. pp. 679–686.
- [140] *Fox C.H.J., Burdess J.S.* The Dynamical characteristics of a Gyroscopt with a tynd elastic suspension // Jornal of Applied Mechanics. 1980. V.47. N 1. pp. 161–166.
- [141] *Ivanova E.A.* Influence of Viscous Friction on Rotation of Rigid Body // GAMM Annual Meeting. Regensburg, March 24 - 27, 1997.

- [142] *Ivanova E.A.* Free rotation of rigid body in the resisting medium // Труды XXIV школы - семинара “Анализ и синтез нелинейных механических колебательных систем”, С.-Петербург, 1997. С. 394-406.
- [143] *Krivtsov A.M., Zhilin P.A.* Asymptotic Investigation of Stationary Motion Stability of Nonsymmetric Top // Int. conf. “Asymptotic methods in mechanics”. S.-Pb. August 14-17, 1994.
- [144] *Krivtsov A.M.* Nonlinear Stationary Oscillations of Nonsymmetric Rotor System. Proceedings of EUROMECH 2nd European Nonlinear Oscillation Conference, Prague, 1996, p.105–108.
- [145] *Krivtsov A.M.* Trajectory Coordinates in the Description of Symmetric Rigid Body Rotation in Linear Viscous Medium. GAMM, Annual Scientific Conference, Regensburg, 1997.
- [146] *Liénard A., Chipart H.* Sur la signe de la partie réelle des racines d’une équation algébrique // J. Math pure et appl. 1914. T.10. pp.291–346.
- [147] *Smith D.M.* The motion of a rotor carried by a flexible shaft in flexible bearings // Proc. Roy. Soc. London. A. 1933. V.142. N 2. pp.92–118.
- [148] *Sommerfeld A.* // VDI. 1904. N 18. pp. 631–636.
- [149] *Staude O.* Über permanente Rotationsaxe bei der Bewegung eines schweren Körpers um einen festen Punkt // J. Reine und Angew. Math. 1894. N 113. pp. 318–334.
- [150] *Tondl A.* On the stability of a rotor system // Acta techn. CSAV. 1991. 36, N 3. pp. 331–338.
- [151] *Yamamoto T., Ishida Y., Ikeda T.* Vibration of a rotating shaft with nonlinear spring characteristics and unsymmetry // Mem. Fac. Eng. Nagoya Univ. 1983. V.25. N 2. pp. 131–204.
- [152] *Zhilin P.A.* A new approach to the analysis of free rotations of rigid bodies. S.-Pb.: Inst. of Problems of Mech. Engineering. Preprint N 102. 1992. 34 p.
- [153] *Zhilin P.A., Sergeev A.D.* An Asymptotic Analysis of the stability of thin rod under twisting load // Int. conf. “Asymptotic methods in mechanics”. S.-Pb. August 14–17, 1994.
- [154] *Zhilin P.A.* A New Approach to the Analysis of Euler-Poinsot problem. ZAMM Z. angew. Math. Mech. 75 (1995) SI, 133-134.
- [155] *Zhilin P.A.* Rotations of Rigid Body with Small Angles of Nutation // Book of abstracts of the Third International Congress on Industrial and Applied Mathematics. Hamburg, 3–7 July, 1995. 490.
- [156] *Zhilin P.A.* A New Approach to the Analysis of Free Rotations of Rigid Bodies. ZAMM Z. angew. Math. Mech. 76 (1996), 4. pp.187–204.

- [157] Zhilin P.A. Rotations of Rigid Body with Small Angles of Nutation // ICIAM/GAMM 95, ZAMM, Issue 2: Applied Analysis, pp. 711–712.
- [158] 3rd International Conference on Rotordynamics, IFToMM. September 10–12, 1990. Lyon, France. Proceedings ... Paris: CNRS. 1990. 622 p.

Диссертационные работы

- [159] Закржевский М.В. Динамика центрифуг с вертикальной осью вращения. Автореферат дисс. на соиск. уч. степ. канд. техн. наук. Рига. 1966.
- [160] Кельзон А.С. Исследование динамики упругоопертых прядильных центрифуг и веретен с большими паковками. Автореферат дисс. на соиск. уч. степ. докт. техн. наук. 1963.
- [161] Кривцов А.М. Динамика неуравновешенного твчрдого тела на упругих опорах. Автореферат дисс. на соиск. уч. степ. канд. ф.-м. наук. С.-Пб. 1995. 18 с.
- [162] Малинин Л.М. Исследование динамики высокооборотных упругоустановленных жестких роторов со значительной неуравновешенностью. Автореферат дисс. на соиск. уч. степ. канд. техн. наук. Л.: 1983.
- [163] Соколюк В.Н. Воспроизведение вибро-ротационных воздействий (теория, расчет, проектирование). Автореферат дисс. на соиск. уч. степ. канд. техн. наук. Л.: 1985.
- [164] Шнеерсон Ю.Б. Динамическая устойчивость несимметричных роторов. Автореферат дисс. на соиск. уч. степ. канд. ф.-м. наук. С-Пб.: 1993.