

Основные уравнения теории неупругих сред*

Аннотация

В настоящее время построение теории нелинейно-упругих сред практически завершено, а основные проблемы связаны с неупругими материалами. В работе приводятся хорошо известные экспериментальные факты, которые, тем не менее, не описывает ни одна из существующих теорий пластичности. Целью данной работы является попытка построения такой теории неупругих материалов, которая, по крайней мере, качественно описывала бы основные экспериментальные факты. Отсюда и требования к исходным посылкам теории: они должны быть непротиворечивыми в логическом отношении, достаточно строгими в математическом оформлении и не вступать в качественное противоречие с уже известными экспериментальными фактами. Новизна предлагаемой теории в сравнении с известными версиями заключается в следующем. Используется пространственное описание. Дается строгое определение материальной производной и на его основе строится кинематика сред с вращательными степенями свободы. Фундаментальные законы формулируются для открытых систем. Дается новая трактовка второго закона термодинамики, причем температура и энтропия вводятся посредством чисто механических аргументов. Общие построения приводятся для моментной среды. Сухое трение между частицами среды вводится через антисимметричную часть тензора силовых напряжений. Свободная энергия задается в форме, одновременно пригодной для газообразных, жидких и твердых тел. Уравнения состояния такого рода ранее, видимо, не встречались. При этом фазовые переходы в среде описываются без привлечения каких-либо дополнительных условий.

1 Введение. Механика сплошных сред

1.1 Рациональная и экспериментальная механика

Механика сплошных сред является объектом пристального внимания исследователей в течение нескольких столетий. Именно в этой области знания зародился анализ, теория дифференциальных уравнений, вариационное исчисление и многое другое. Первое дифференциальное уравнение в истории науки было установлено Я. Бернулли

*Жилин П.А. Основные уравнения теории неупругих сред // Труды XXVIII летней школы "Актуальные проблемы механики", Санкт-Петербург, 2001. С. 14–58.

(1694) при изучении равновесия гибких нитей. Оно имеет вид

$$\mathbf{T}'(s) + \rho \mathbf{F}(s) = \mathbf{0}. \quad (1.1)$$

Уравнение поперечных колебаний струны (Ж. Даламбер, 1749)

$$\frac{\partial^2 \mathbf{U}(x, t)}{\partial x^2} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{U}(x, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (1.2)$$

и уравнения движения идеальной жидкости (Л. Эйлер, 1755), которые приведены в следующем пункте, явились первыми примерами уравнений с частными производными. С этого времени началось интенсивное исследование поведения твердых деформируемых тел при воздействии на них внешней нагрузкой, а также изучение динамических проблем. Сначала это были тонкие упругие стержни. В 1771 году Л. Эйлер впервые вывел уравнения равновесия тонких стержней

$$\mathbf{T}'(s) + \rho \mathbf{F}(s) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{M}'(s) + \mathbf{R}'(s) \times \mathbf{T}(s) + \rho \mathbf{L}(s) = \mathbf{0}, \quad (1.3)$$

независящие от частных свойств материала. Линейная теория упругости была построена О. Коши (1822) и остается неизменной вплоть до наших дней. История ее создания весьма показательна. В 1821 году О. Коши был рецензентом работы А. Навье, в которой на основе корпускулярных представлений впервые были выведены уравнения линейной теории упругости с одной упругой постоянной. Коши отнесся к этой работе весьма критически, в результате чего работа Навье была опубликована только в 1827 году. Для построения теории упругости Коши выбирает другой подход, ставший основным в механике твердых деформируемых тел. Он вводит понятие упругого континуума, строит теорию напряжений и деформации для этого континуума, постулирует линейную зависимость тензора напряжений от тензора деформаций и выводит уравнения равновесия. Результирующая система уравнений Коши

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{F} = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\tau} = \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\epsilon}, \quad \boldsymbol{\epsilon} = (\nabla \mathbf{u})^S, \quad (1.4)$$

где тензор четвертого ранга \mathbf{C} называется тензором упругости. Построение линейной теории упругости было выполнено О. Коши за считанные месяцы. После чего в течение следующих 15 лет, вплоть до 1837 года, Коши пытался улучшить построения А. Навье. Этой же проблеме вывода уравнений теории упругости из корпускулярных представлений были посвящены многолетние исследования С.Д. Пуассона. Результаты оказались мало удовлетворительными. Указанное обстоятельство весьма наглядно демонстрирует силу методов механики сплошных сред. Между тем, единственное важное дополнение к теории Коши было сделано Дж. Грином (1839), которое состояло во введении понятия энергии деформации \mathcal{U} и постулировании уравнения баланса энергии. Так были получены соотношения Коши–Грина

$$\boldsymbol{\tau} = \rho \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \boldsymbol{\epsilon}}, \quad \mathbf{C} = \rho \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial \boldsymbol{\epsilon}^2}. \quad (1.5)$$

Все сказанное выше хорошо известно и преследовало цель подчеркнуть важный для целей данной работы факт. А именно, со времени вывода уравнений (1.1) — (1.5) прошел огромный промежуток времени, в течение которого наши представления о

природе сущего радикально изменились. Тем не менее, указанные уравнения сохранили свой вид без каких-либо, даже самых минимальных, изменений. **Способность механики сплошных сред строить уравнения, истинность которых не опровергается временем и которые не требуют уточнений, является ее важнейшим достоинством.** Последующее развитие механики дополнило, но не изменило, эти уравнения. Здесь уместно обсудить еще один важный исторический факт. После вывода уравнения (1.1) Я. Бернулли, вплоть до своей смерти в 1705 году, безуспешно пытался вывести уравнение изгиба стержня, т.е. второе уравнение в системе (1.3). Эта задача, как бы по наследству, перешла к Л. Эйлеру. Сверхгению Эйлера понадобилось почти столетие, чтобы выяснить истинную причину неудачи гениального Я. Бернулли. А именно, в 1771 году Л. Эйлер окончательно установил, что ньютоновская механика принципиально неполна. Заметим, что ньютоновская механика — это механика трансляционных движений, управление которыми осуществляется силами. Но в Природе существует еще один тип движения (спинорное движение), которое не сводится к трансляционному. Соответственно, наряду с силами, в механике необходимо рассматривать еще один тип воздействий, а именно моменты, которые в общем случае не сводятся к понятию момента силы. Поэтому **в механике, помимо уравнения баланса сил, необходимо постулировать еще один закон — уравнение баланса моментов.** Собственно, этот закон был открыт еще Архимедом в форме принципа рычага. Известно множество попыток доказать принцип рычага на основе уравнения баланса сил. Видимо, последняя попытка такого рода была предпринята Лагранжем уже после смерти Эйлера. Лагранж полагал, что ему удалось доказать принцип рычага. Отсюда следовало, что уравнение баланса моментов может быть доказано в ньютоновской механике. Поэтому нет нужды выдвигать дополнительный постулат. Эта ошибка Лагранжа задержала развитие механики, по крайней мере, на столетие и вызвала глубокие негативные последствия в современной теоретической физике. Возвращаясь к Л. Эйлеру, отмечаем, что в не вполне осознанной форме Эйлер использовал уравнение баланса моментов еще раньше, при выводе уравнений динамики твердого тела. Примерно так же поступали многие исследователи при использовании принципа рычага, в правильности которого, разумеется, никто не сомневался. Однако в теории стержней подобный прием не срабатывал. Напомним, что в то время теория напряжений в трехмерных средах еще не существовала. Стержень рассматривался, как упругая линия, лишенная толщины. Поэтому ввести момент \mathbf{M} как момент силы было невозможно, и его пришлось ввести как самостоятельную сущность. В 1776 году Л. Эйлер дает окончательную формулировку фундаментальных законов механики в виде двух независимых постулатов: законов динамики Эйлера. Только в начале XX-го века спинорные движения вновь получили признание, а эйлерова механика стала интенсивно развиваться только в последние 50 лет. XIX-й век отметился формулировкой еще двух фундаментальных законов, получивших названия первого и второго законов термодинамики. Первый закон термодинамики или уравнение баланса энергии был сформулирован Дж. Грином в 1839 году и уже упоминался выше. Второй закон термодинамики или неравенство производства энтропии рождался в великих муках, имел множество формулировок и, наконец, утвердился в механике сплошных сред в форме неравенства Клаузиуса-Дюгема-Трусделла. **Два закона динамики Эйлера и два начала термодинамики составили каркас, внутри которого и строится современная механика сплошных сред.** Важно подчеркнуть, что упомянутый каркас

не определяет конкретных моделей сплошных сред, поскольку дает незамкнутую систему уравнений. Создание модели сплошной среды равносильно решению проблемы замыкания указанной выше системы уравнений. Иными словами, создание модели сплошной среды равносильно написанию неких дополнительных уравнений, которые принято называть определяющими и которые устанавливают связи между основными переменными, входящими в фундаментальные законы. Долгое время считалось, что установление определяющих уравнений является задачей экспериментальной механики. Это правильно в том смысле, что эксперимент является неустранимым звеном при построении определяющих уравнений конкретных материалов. Тем не менее, в настоящее время уже ясно, что построение определяющих уравнений является теоретической проблемой, которая принципиально не может быть решена методами экспериментальной механики. К обсуждению этого вопроса мы еще неоднократно будем обращаться в дальнейшем тексте статьи. В настоящее время проблема замыкания удовлетворительно решена только для так называемых нелинейно упругих сред, а теория нелинейно упругих сред обрела практически каноническую форму. Существуют материалы, которые удивительно хорошо моделируются нелинейно упругой средой в достаточно широком интервале деформаций. Однако этот класс материалов весьма узок. Большинство реальных материалов, хотя и проявляют свойство упругости, но демонстрируют явное отклонение от того, что принято называть упругостью. Поэтому основные проблемы механики деформируемых тел в настоящее время сконцентрированы в области неупругого поведения материалов. Несмотря на то, что здесь накоплен огромный экспериментальный материал и опубликованы тысячи теоретических работ, тем не менее итоговые достижения в этой области оставляют желать много лучшего. Об этом свидетельствуют, в частности, и постоянно появляющиеся новые публикации, содержащие попытки улучшить основы существующих теорий. Ничего подобного не наблюдается в нелинейной теории упругости, где усилия исследователей направлены исключительно на решение конкретных проблем, не меняющих основ теории, но углубляющих и расширяющих результативную часть теории. В чем же состоит главная причина столь разительных отличий между двумя родственными теориями? По мнению автора, основная причина заключается в том, что в теории неупругих материалов телега поставлена впереди лошади. А именно, в нелинейной теории упругости ведущая роль принадлежит сугубо теоретической идее гладкого дифференцируемого многообразия. Эта идея принципиально не может вытекать из эксперимента. Иными словами, сначала лошадь (теоретическая идея и ее реализации), а затем телега с добром (конкретными результатами, уточняющимися и проверяющимися экспериментом). В теории неупругих материалов теоретические модели пытаются вывести из экспериментальных фактов. При этом отсутствует общая теоретическая концепция. Известно, например, что при достаточно больших напряжениях всякий материал обретает свойство текучести, и это свойство закладывается в определение теоретической модели в виде критерия текучести. Но что является причиной текучести и что, собственно, называется текучестью, не обсуждается. Не обсуждается также и определение исходного объекта: от модели сплошной среды в виде гладкого дифференцируемого многообразия приходится отказываться, но никакой замены этому не предлагается. Между тем, ***отказ от идеи гладкого дифференцируемого многообразия по необходимости влечет за собой отказ от традиционного понимания концепции определяющих уравнений***, чего в существующих теориях упруго-пластических мате-

риалов не происходит. Напротив, именно на определяющие уравнения в их традиционной трактовке возлагается вся ответственность за основные свойства предлагаемых к рассмотрению теорий.

1.2 Гидромеханика

Если не обсуждать теорию тонких стержней, то первой моделью сплошной среды была так называемая идеальная жидкость, уравнения для которой были предложены Л. Эйлером в 1755 году. В обозначениях, принятых в основном тексте статьи, уравнения динамики жидкости сводятся к следующей системе уравнений [1]

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\rho}{I_3(\mathbf{g})} \right] + \mathbf{V}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \left[\frac{\rho}{I_3(\mathbf{g})} \right] = 0, \quad -\nabla p + \rho \mathbf{F} = \rho m \left(\frac{d}{dt} \mathbf{V} + \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} \right). \quad (1.6)$$

Эта система четырех уравнений содержит пять неизвестных. Для ее замыкания необходимо принять определяющее уравнение, связывающее давление p с плотностью ρ . Известны различные определяющие уравнения для жидкости. Для иллюстрации приведем уравнение, которое в литературе не используется, но, возможно, лучше отражает поведение “идеальной” жидкости

$$p = p(\rho) = p_0(\zeta^{-m} - \zeta^{-n}), \quad \zeta \equiv \rho_0/\rho, \quad m > n. \quad (1.7)$$

Здесь p_0 , m , n , ρ_0 суть характеристики жидкости, определяемые экспериментально. Важным свойством любого определяющего уравнения должна быть конечная прочность жидкости на разрыв, причем для жидкости она весьма мала. В качестве примера задания граничных условий рассмотрим простейшую ситуацию. Пусть жидкость занимает цилиндрическую область $0 \leq r \leq R$. Граница $r = R$ моделируется силовым полем¹ вида

$$\mathbf{F} = -F_0 \left[\left(\frac{R-r}{l} \right)^{-p} - \left(\frac{R-r}{l} \right)^{-q} \right] \mathbf{e}_r, \quad l \ll R, \quad p > q. \quad (1.8)$$

Как видим, граничные условия моделируются заданием массовых сил, причем на единицу объема действует сила $\rho \mathbf{F}$. Следует подчеркнуть, что при правильном задании определяющего уравнения, например в форме (1.7), эта система способна описать большинство известных экспериментальных фактов. Правда, в некоторых случаях необходимо дополнительно учитывать термомеханические эффекты. Разумеется, при анализе системы (1.6)–(1.7) необходимо учитывать наличие у нее разрывных решений. Следует иметь в виду, что внешняя простота системы (1.6)–(1.7) обманчива, и ее решение наталкивается в нетривиальных случаях на значительные математические трудности. Чрезвычайно популярная модель жидкости Навье–Стокса², хотя и приводит к осмысленным практическим результатам, неприемлема с фундаментальной точки зрения. Известный факт прилипания жидкости к стенкам канала объясняется отнюдь не вязкостью жидкости в общепринятом понимании, а взаимодействием жидкости со стенками канала. Указанное взаимодействие описывается силовым полем,

¹Эта идея принадлежит ученику и коллеге автора А.М. Кривцову, который с успехом применяет ее в задачах молекулярной динамики.

²Простота модели Навье–Стокса связана с тем, что в ней отсутствуют разрывные решения.

задаваемым потенциалом типа Леннарда–Джонса. Этим же взаимодействием объясняются и капиллярные явления. Существенно изменить описание жидкости можно только учетом, в дополнение к трансляционным движениям, независимых спинорных движений (вращательных степеней свободы), которые впервые были введены в механику Л. Эйлером [2].

1.3 Нелинейная теория упругости

Следующей трехмерной теорией сплошной среды, разработанной в механике, была линейная, а позднее и нелинейная, теория упругости. Нет нужды давать здесь исторические ссылки. Существуют полные обзоры по данной теме, например [3]. Здесь мы коснемся только тех аспектов теории, которые имеют непосредственное отношение к обсуждаемым вопросам. При известных условиях, среда может вести себя так, что частицы среды, которые были близки до деформации, остаются близкими в процессе деформации. Такое поведение среды можно назвать упругим. С формальной точки зрения, упругую среду можно отождествить с гладким дифференцируемым многообразием и использовать так называемое материальное или лагранжево описание среды. В такой среде можно ввести понятия материальных линий, поверхностей и объемов, которые в процессе деформирования состоят из одних и тех же частиц. Эти понятия нельзя ввести для идеальной жидкости или для неупругой среды. Поэтому в гидромеханике используется пространственное или эйлерово описание, при котором в данной точке системы отсчета задаются две функции $p(\mathbf{x}, t)$ и $\rho(\mathbf{x}, t)$, которые не связаны с конкретными частицами жидкости. Чисто пространственное описание твердых деформируемых тел в литературе³, видимо, не разработано. Основное различие материального и пространственного описаний проявляется в трактовке определяющих уравнений. Подробнее речь об этом пойдет ниже. Если ограничиться рассмотрением упругих тел, то материального описания вполне достаточно для полного анализа поведения нелинейно упругого тела. К настоящему времени, нелинейная теория упругости уже обрела каноническую форму. Все, что необходимо сделать для возможности решения конкретных задач — это задать вид энергии деформации (внутренней энергии, свободной энергии). С чисто теоретической точки зрения здесь не существует никаких проблем. Энергию деформации можно задавать произвольно. Однако энергия деформации материалов, способных устойчиво существовать достаточно продолжительное время, должна удовлетворять неким условиям, известным под названием дополнительных неравенств в теории упругости [4, 5]. При материальном описании, наиболее важным из условий такого рода является условие сильной эллиптичности в статике или условие строгой гиперболичности в динамике упругих тел. Это условие обеспечивает корректность возникающих краевых задач. Впрочем, условие сильной эллиптичности оказывается недостаточным, чтобы обеспечить существование устойчивых, т.е. ограниченных во времени, решений у корректно поставленных задач. В качестве иллюстрации важности условия сильной эллиптичности можно указать следующий факт: если это условие нарушено, то статическая задача нелинейной теории упругости имеет несчетное множество решений. Энергия деформации реальных тел заведомо не может удовлетворять условиям сильной эллиптичности для любых де-

³Описание, используемое, например, в [10, 11] и называемое эйлеровым, на самом деле является материальным (лагранжевым), в котором в качестве отсчетной выбирается актуальная конфигурация.

формаций, поскольку это означало бы существование неразрушимых тел. Фактически всякие проявления пластических свойств у твердых тел связаны с нарушением условий сильной эллиптичности, но об этом речь пойдет немного ниже.

Общая схема построения нелинейной теории упругости включает в себя три этапа, причем среда (упругий континуум) рассматривается как гладкое дифференцируемое многообразие. Первый: разработка теории напряжений и вывод уравнений движения, не зависящих от свойств среды. На втором этапе рассматривается чисто геометрическая теория деформирования многообразий и вводятся меры деформации. На этом этапе свойства среды также не имеют значения. Важно только, чтобы среду можно было бы считать гладким многообразием. Наконец, на третьем этапе напряжения связываются с деформациями посредством так называемых определяющих уравнений. Именно последние фиксируют физические свойства рассматриваемой среды.

Описанная схема впервые была введена Л. Эйлером при построении теории тонких стержней, а в 1822 году была распространена на трехмерные среды и существенно развита О. Коши. С тех пор она фактически остается неизменной. Более того, считается, что указанный подход сохраняет свою силу не только для упругих сред, но справедлив и при больших неупругих деформациях. Между тем, описанная схема имеет ограниченную область применимости даже для упругих сред. Действительно, с позиций чистой логики нельзя утверждать, что напряжения связаны именно с теми мерами деформаций, которые порождаются чисто геометрическими рассуждениями. К тому же, в общем случае, этих мер деформаций может быть гораздо больше, чем тензоров напряжений. Нельзя даже утверждать, что напряжения связаны с деформациями. Для неупругих материалов нетрудно показать, что напряжения в принципе не определяются мерами деформации в общепринятом смысле даже при учете предьстории процесса. Для мультиполярных упругих сред, которые моделируются оснащенными многообразиями, описанная выше схема практически не срабатывает и необходимо использовать другой подход [6]. Мерами деформации следует считать объекты, на изменениях которых совершают работу тензоры истинных напряжений Коши. В значительной мере случайно оказалось, что в классической теории упругости неполярных сред данное определение деформации совпало с чисто геометрическими построениями. Огромный и, разумеется, вполне заслуженный успех теории О. Коши привел к тому, что использованная им схема построения теории упругости стала использоваться далеко за пределами ее применимости.

1.4 Неупругость: важнейшие экспериментальные факты

Поведение твердых тел под нагрузкой изучается в течение нескольких столетий. Достаточно вспомнить знаменитый закон Гука. Однако интенсивные и целенаправленные исследования начались в XIX веке и продолжаются по настоящее время. Накоплен поистине огромный материал [7, 8], который существенно используется при формулировке практических (эмпирических) правил и нормативных документов для инженерных и конструкторских проектов, но оказывает, к сожалению, на удивление слабое влияние на теоретические исследования. Фактически, основным назначением эксперимента является проверка применимости той или иной теоретической идеи. Часты ситуации, когда экспериментатор думает, что он проводит эксперимент без опоры на теоретические воззрения. Но это означает только то, что у него имеют-

ся собственные идеи, возможно не совпадающие с принятыми теориями. Вместе с тем, на начальном этапе экспериментатор вынужден работать при отсутствии теоретических моделей, изучать видимые проявления поведения образцов при различных типах воздействий и описывать общую картину наблюдаемых явлений. Дальше в работу должен включаться теоретик и придумывать модели, которые, по крайней мере качественно, отражали бы наблюдаемые факты. Проблема ведь не в том, чтобы написать какие-то уравнения и затем их исследовать. Проблема в том, чтобы увидеть как и какими средствами работает Природа и именно это отобразить в виде упрощенной математической модели. Поэтому теоретик обязан детально знакомиться с широким спектром экспериментальных данных и по ним выдвигать гипотезы о том, что происходит на самом деле. Теория, основанная на этих гипотезах, должна вновь проверяться экспериментом, но уже целенаправленным экспериментом. К сожалению, в действительности все происходит несколько иначе. Целый ряд давно установленных экспериментальных фактов до сих пор не только не описываются существующими теориями, но и вообще не обсуждаются специалистами, занимающимися построениями теорий, описывающих поведение неупругих материалов при внешних воздействиях. Ниже будут кратко перечислены некоторые из таких фактов, причем без обсуждения сопровождающих их нюансов.

Первый. *При достаточно высоких давлениях все материалы испытывают необратимые деформации, которые можно назвать фазовыми переходами.* Газ под давлением можно превратить в жидкость, которая при повышении давления превращается в твердое тело. Последнее, в свою очередь, при повышении давления испытывает цепочку превращений, сопровождающихся заметным изменением его механических свойств. При медленных нагружениях все эти превращения происходят скачком, т.е. в результате очень быстрых динамических процессов, скорость которых не обусловлена скоростью изменения внешних нагрузок.

Второй. *При достаточно высоких давлениях все твердые тела обретают свойство текучести.* Впервые этот факт был установлен А. Треска — см. [8] — и впоследствии был многократно подтвержден многими авторами. Наиболее полными здесь считаются опыты П.У. Бриджмена. Указанный факт не следует смешивать с явлением скольжения.

Третий. *Существует характеристика материала, выражающая максимальное касательное напряжение, при котором — независимо от типа опыта — твердое тело течет.* Вообще говоря, именно этот факт отражается в критериях текучести, принимаемых практически во всех теориях пластичности. Однако дело не только и не столько в критерии текучести, сколько в определении того, что называют текучестью. Например, критерий текучести Треска, дополненный Б. Сен-Венаном известным условием о поведении тензора скоростей деформации⁴, на самом деле не имеет прямого отношения к свойству текучести. Фактически этот расширенный критерий текучести до сих пор не имеет прямого экспериментального обоснования. Напротив, известные эксперименты явно противоречат теории, основанной на расширенном критерии текучести. Например, эксперимент А. Треска по экструзии свинца [8] показывает, что свинец именно течет подобно жидкости. При этом никаких зон застоя материала не наблюдается. Теоретическое решение аналогичной задачи по теории, основанной

⁴Для краткости будем называть подобные соглашения расширенным критерием текучести.

на расширенном критерии текучести [9] (стр.218), показывает наличие зон застоя. Иными словами, налицо серьезное качественное расхождение теории и эксперимента.

Четвертый. *Эксперименты по определению диаграмм $\sigma \sim \epsilon$ показывают существенное влияние масштабного фактора.* Например, при растяжении круглого образца с начальной площадью сечения S силой P снимается диаграмма $P/S \sim \epsilon$. Затем берется образец из того же материала, но с уменьшенной вдвое площадью поперечного сечения и вновь снимается диаграмма $P/S \sim \epsilon$. Она пройдет заметно выше, чем в первом случае. Этот процесс можно повторить. Диаграммы показывают, что чем тоньше образец, тем выше оказывается предел упругости. Хотя масштабный фактор известен всем, тем не менее его природа никак не обсуждается и не учитывается при построении теории. Между тем, масштабный фактор показывает, что определяющие уравнения заведомо не могут быть сформулированы для “тела-точки” из данного материала, но должны учитывать наличие всех других “тел-точек”. Кроме того, этот факт показывает неправильность мнения, что определяемая в эксперименте диаграмма $P/S \sim \epsilon$ является неким прообразом определяющего уравнения $\sigma \sim \epsilon$. Например, рассмотрим растяжение полосы из полулинейного материала, т.е. задачу Клингбейла и Шилда [5]. В этом случае, определяющее уравнение, т.е. диаграмма $\sigma \sim \epsilon$, грубо говоря, линейна, но диаграмма $P/S \sim \epsilon$, вычисленная на основе точного решения задачи для линейной диаграммы $\sigma \sim \epsilon$, существенно нелинейна и имеет точки минимума и максимума.

Пятый. *Во всех экспериментах с мягким нагружением отчетливо проявляется эффект Савара-Массона (Портвена-Ле Шателье) [8], который заключается в следующем.* На диаграмме растяжения наблюдается многократно повторяющееся чередование участков упругости и течения. Причем на участках течения процесс носит ярко выраженный динамический характер и происходит со скоростью, определяемой самим материалом, а не условиями эксперимента.

Шестой. Наблюдался следующий факт. Брался образец из некоего материала и из него вырезался относительно небольшой контрольный объем. Методами рентгеноструктурного анализа определялись его характеристики и, грубо говоря, подсчитывалось число частиц, входящих в этот контрольный объем. Затем, аналогичный образец из того же материала растягивался в несколько раз, т.е. образец подвергался большому пластическому деформированию. После чего из этого деформированного образца вырезался точно такой же контрольный объем, как и в первом случае. Для него проводились те же самые анализы. Результат: оба контрольных объема оказались практически идентичными. Это означает, что *при пластическом деформировании теряют всякий смысл такие понятия как материальные линии, поверхности и объемы. Как следствие, теряют смысл понятия отсчетной и актуальной конфигураций и традиционные меры деформаций.*

Здесь мы остановимся, хотя, разумеется, можно указать еще много важных экспериментально установленных фактов. Например, появление так называемых линий Людерса. Перечисленные выше факты важны потому, что они наблюдаются практически во всех экспериментах. Тем не менее, ни одна из существующих теорий пластичности не описывает эти факты, за исключением, может быть, третьего из них.

1.5 Цель данной работы

Существует такой интересный объект, как тонкие порошки, применяемые в современных принтерах и копировальных машинах. Порошки являются сыпучими средами, но уже при очень малых внешних нагрузках они проявляют тенденцию к консолидации, т.е. к слипанию. В результате, порошок частично превращается в некое твердое тело. Кроме того, в порошках большую роль играют силы сухого трения между частицами. При определенных условиях порошки легко поддаются ожижению, т.е. ведут себя подобно жидкости. Причем все эти разнообразные свойства нередко проявляются одновременно, т.е. одна часть порошка ведет себя как твердое тело, другая часть порошка ведет себя как сыпучая среда, а третья — как жидкость. Все это можно наблюдать в довольно большом массиве экспериментальных данных, полученных во многих странах. Кстати говоря, весьма схожие проявления наблюдаются и в поведении грунтов, удовлетворительной теории которых в настоящее время также не построено. Поэтому практические расчеты для грунтов опираются, главным образом, на экспериментальные зависимости. Попытки использовать для описания поведения порошков известные теории неупругих материалов оказались мало удовлетворительными. Существующие теории пластичности ориентированы на определенные классы материалов в определенных условиях. Например, процессы прокатки и процессы штамповки описываются на основе разных подходов. О неудовлетворительном состоянии теории упруго-пластических материалов говорит тот факт, что вплоть до настоящего времени появляются многочисленные работы, в которых содержатся попытки пересмотра исходных положений теории, а острота имеющих место дискуссий по этой тематике не снижается.

Первоначальной целью автора являлось построение теории порошков. Однако после недолгих размышлений стало очевидным, что всякие отклонения от чисто упругих материалов порождают, по существу, одни и те же проблемы. Поэтому и речь должна идти об общей концепции теории сплошных неупругих сред. При этом нужно иметь в виду, что имеется огромный исторический опыт теоретического анализа поведения неупругих материалов. Это означает, что небольшие модификации известных подходов не позволят радикально улучшить существующее положение дел. Отсюда, в свою очередь, следует, что необходимо отказаться от попыток построения теории, способной немедленно и во всех подробностях объяснить известные экспериментальные факты. Можно попытаться подойти к решению проблемы с другого конца. А именно, временно отказавшись от стремления описать поведение конкретного материала в конкретных условиях, можно попробовать создать качественную теорию деформирования гипотетических неупругих сред. Для этой среды обязательно должны быть справедливыми только те факты, которые присущи всем неупругим материалам. При этом, на начальном этапе можно не заботиться не только о количественных совпадениях теории с экспериментом, но и о качественных расхождениях с экспериментами для каких-либо конкретных материалов. Иначе говоря, целью данной работы является попытка заложить такой фундамент теории упруго-пластических материалов, который не требовал бы полной перестройки каждый раз, когда желательно поменять ту или иную надстройку. Отсюда и требования к исходным посылкам теории: они должны быть непротиворечивыми в логическом отношении, достаточно строгими в математическом оформлении и не вступать в качественное противоречие с уже из-

вестными экспериментальными фактами. В качестве таковых автор выбрал факты, перечисленные выше.

2 Фундаментальные законы

Как уже отмечалось в первом разделе, сплошную среду при неупругом деформировании нельзя моделировать гладким дифференцируемым многообразием. В самом деле, из опыта следует, что частицы среды, которые были соседями в один момент времени, перестают быть соседями в другие моменты времени. В такой среде возможны тангенциальные разрывы и образование полостей. Происходят перестройки структуры типа фазовых переходов. При этом указанные переходы, как правило, не могут быть обнаружены в квазистатических рассматриваниях. Из сказанного следует, что материальное описание сред с перечисленными свойствами не представляется возможным. Остается единственная возможность: строить теорию неупругих сред в чисто пространственном описании. Важным примером теории, удовлетворяющей указанным критериям, является гидромеханика в форме, представленной в первом разделе.

2.1 Материальная производная и кинематические соотношения

Выберем некоторую инерциальную систему отсчета, с помощью которой будут записываться все основные уравнения. Эта система отсчета движется относительно среды. Поэтому в некоторой фиксированной области системы отсчета в разные моменты времени оказываются разные части среды. Это означает, что необходимо использовать так называемое пространственное описание. Для этого нам понадобится понятие материальной производной, играющей важную роль при пространственном описании сплошных сред.

Рассмотрим сплошную среду, целиком заполняющую односвязную или многосвязную область в выбранной системе отсчета. Эта среда как-то движется относительно системы отсчета. В частности, среда может покоиться, а система отсчета двигаться относительно среды. С кинематической точки зрения это безразлично. При пространственном описании важную роль играет поле скоростей $\mathbf{V}(\mathbf{x}, t)$, где вектор \mathbf{x} задает точку системы отсчета. Тогда вектор $\mathbf{V}(\mathbf{x}, t)$ определяет скорость той частицы среды, которая в данный момент времени t находится в точке \mathbf{x} . Пусть нам дано некоторое поле $\mathbf{K}(\mathbf{x}, t)$, которое может быть скаляром, вектором или тензором любого ранга. Оно описывает некую физическую характеристику частицы, находящейся в данное время в данной точке \mathbf{x} системы отсчета. Обратим внимание на то, что мы можем использовать подвижную систему координат, например, $y_k(t)$. Тогда данное (фиксированное) место \mathbf{x} в системе отсчета будет определяться координатами $y_k(t)$, т.е. будем иметь

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(y_1(t), y_2(t), y_3(t), t) \equiv \mathbf{x}(\mathbf{y}, t) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{K}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{F}(\mathbf{y}, t).$$

Определение: материальной производной свойства $\mathbf{K}(\mathbf{x}, t)$ называется предел отношения

$$\frac{\delta}{\delta t} \mathbf{K}(\mathbf{x}, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{K}(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{s}, t + \Delta t) - \mathbf{K}(\mathbf{x}, t)}{\Delta t}, \quad \Delta \mathbf{s} = \mathbf{V}(\mathbf{x}, t) \Delta t. \quad (2.1)$$

или

$$\frac{\delta}{\delta t} \mathbf{F}(\mathbf{y}, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{F}(\mathbf{y}(t + \Delta t) + \Delta \mathbf{s}, t + \Delta t) - \mathbf{F}(\mathbf{y}, t)}{\Delta t}, \quad \Delta \mathbf{s} = \mathbf{V}(\mathbf{x}, t) \Delta t. \quad (2.2)$$

В этом определении $\Delta \mathbf{s}$ (с точностью до членов второго порядка малости) есть путь, пройденный частицей, которая в момент времени t находилась в точке \mathbf{x} , за время Δt . Числитель в (2.1) можно переписать в виде следующего разложения

$$\mathbf{K}(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{s}, t + \Delta t) = \mathbf{K}(\mathbf{x}, t + \Delta t) + \Delta \mathbf{s} \cdot \nabla \mathbf{K}(\mathbf{x}, t + \Delta t).$$

Аналогичное разложение можно записать для выражения (2.2)

$$\mathbf{F}(\mathbf{y}(t + \Delta t) + \Delta \mathbf{s}, t + \Delta t) = \mathbf{F}(\mathbf{y}(t + \Delta t), t + \Delta t) + \Delta \mathbf{s} \cdot \nabla \mathbf{F}(\mathbf{y}(t + \Delta t), t + \Delta t).$$

Теперь из определения (2.1) следует

$$\frac{\delta}{\delta t} \mathbf{K}(\mathbf{x}, t) = \frac{d}{dt} \mathbf{K}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{V}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \mathbf{K}(\mathbf{x}, t). \quad (2.3)$$

Из определения (2.2) следует аналогичное выражение

$$\frac{\delta}{\delta t} \mathbf{F}(\mathbf{y}, t) = \frac{d}{dt} \mathbf{F}(\mathbf{y}, t) + \mathbf{V}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \mathbf{F}(\mathbf{y}, t), \quad (2.4)$$

причем операторы градиента в двух последних выражениях совпадают, поскольку они не зависят от выбора системы координат в системе отсчета. В первом слагаемом правой части выражения (2.3) инвариантный, т.е. не зависящий от выбора системы координат, оператор полного дифференцирования по времени можно заменить на не инвариантный оператор частного дифференцирования по времени, но в (2.4) этого делать нельзя. В данной работе мы будем придерживаться указанного выше определения, чтобы избежать возможных недоразумений при заменах системы отсчета, когда вектор \mathbf{x} по необходимости приходится выражать в подвижной системе координат. В литературе, как правило, вместо определения (2.3) принимают следующее выражение для материальной производной [10, 11, 12]

$$\frac{d}{dt} \mathbf{K}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{K}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{V}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \mathbf{K}(\mathbf{x}, t). \quad (2.5)$$

Хотя при решении конкретных задач выражение (2.5) обычно не приводит к ошибкам, тем не менее оно вводит в заблуждение. Прежде всего, вектор \mathbf{x} в (2.5) определяет уже не произвольную точку наблюдения в системе отсчета, а задает траекторию конкретной материальной точки. Поэтому формально правильная запись выражения (2.5) выглядит следующим образом

$$\frac{d}{dt} \mathbf{K}(\mathbf{x}_A, t) = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{K}(\mathbf{x}_A, t) + \mathbf{V}(\mathbf{x}_A, t) \cdot \nabla \mathbf{K}(\mathbf{x}_A, t), \quad (2.6)$$

где \mathbf{x}_A есть место частицы A в системе отсчета. Полная производная по времени от функции $\mathbf{K}(\mathbf{x}, t)$ в (2.5) полностью определяется самим отображением $\mathbf{K}(\mathbf{x}, t)$, суженном, разумеется, на траекторию материальной точки. Применительно к материальной

производной это обстоятельство совершенно не соответствует действительности. В определении материальной производной (2.3) содержится функция $\mathbf{V}(\mathbf{x}, t)$, которая никак не связана с отображением $\mathbf{K}(\mathbf{x}, t)$ и не определяется им. Различия в определениях (2.3) и (2.5) носят не формальный характер. Использование определения (2.5) означает, по существу, отказ от пространственного описания и переход к материальному описанию, т.е. к отказу от возможности рассматривать неупругие среды общего вида.

Обратимся к рассмотрению некоторых кинематических соотношений, которые понадобятся нам в дальнейшем. Вычислим, например, материальную производную от вектора положения \mathbf{x} частицы, находящейся в данный момент времени в точке \mathbf{x} системы отсчета

$$\frac{\delta}{\delta t} \mathbf{x} = \frac{d}{dt} \mathbf{x} + \mathbf{V}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \mathbf{x} = \mathbf{V}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{E} = \mathbf{V}(\mathbf{x}, t). \quad (2.7)$$

Для материальной производной справедливы все правила дифференцирования. Например,

$$\frac{\delta}{\delta t} (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) = \frac{\delta \mathbf{a}}{\delta t} \otimes \mathbf{b} + \mathbf{a} \otimes \frac{\delta \mathbf{b}}{\delta t}. \quad (2.8)$$

С другой стороны, известно, что оператор полного дифференцирования по времени и оператор-градиент перестановочны. Для материальной производной, как видно из определения, это не верно

$$\frac{d}{dt} \nabla = \nabla \frac{d}{dt}, \quad \frac{\delta}{\delta t} \nabla \neq \nabla \frac{\delta}{\delta t}. \quad (2.9)$$

В важном частном случае, когда скорость $\mathbf{V} = \text{const}$, операторы градиента и материальной производной перестановочны

$$\frac{\delta}{\delta t} \nabla = \nabla \frac{\delta}{\delta t}. \quad (2.10)$$

Вычисляя материальную производную от вектора скорости частицы, находим вектор ее ускорения

$$\mathbf{W}(\mathbf{x}, t) = \frac{\delta}{\delta t} \mathbf{V}(\mathbf{x}, t) = \frac{d}{dt} \mathbf{V}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{V}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \mathbf{V}(\mathbf{x}, t). \quad (2.11)$$

Рассмотрим менее привычную ситуацию. Пусть, например, $\mathbf{K}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{P}(\mathbf{x}, t)$, где $\mathbf{P}(\mathbf{x}, t)$ есть тензор поворота частицы, находящейся в точке \mathbf{x} в момент времени t . Как найти ее угловую скорость? Нетрудно понять, что для этого необходимо использовать следующую модификацию уравнения Пуассона [13, 14]

$$\frac{d}{dt} \mathbf{P} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{P} \quad \mapsto \quad \frac{\delta}{\delta t} \mathbf{P}(\mathbf{x}, t) \equiv \frac{d}{dt} \mathbf{P}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{V}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \mathbf{P}(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t) \times \mathbf{P}(\mathbf{x}, t). \quad (2.12)$$

Присутствие в этом определении скорости $\mathbf{V}(\mathbf{x}, t)$ вносит дополнительные осложнения при написании уравнения баланса энергии, как это будет видно ниже. В дальнейшем нам понадобится преобразовывать градиент угловой скорости $\nabla \boldsymbol{\omega}$. Будем действовать

следующим образом. Введем в рассмотрение тензор второго ранга $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$, называемый второй мерой деформации, посредством уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x^s} \mathbf{P} = \mathbf{F}_s \times \mathbf{P} \Rightarrow \nabla \mathbf{P} = \mathbf{F} \times \mathbf{P}, \quad \nabla \equiv \mathbf{g}^s \frac{\partial}{\partial x^s}, \quad \mathbf{F} = \mathbf{g}^s \otimes \mathbf{F}_s, \quad \mathbf{f} \equiv \mathbf{F}_\times, \quad (2.13)$$

где вектор \mathbf{f} называется вектором угловой деформации и справедливы уравнения интегрируемости [15]

$$\frac{\partial \mathbf{F}_s}{\partial x^m} - \frac{\partial \mathbf{F}_m}{\partial x^s} = \mathbf{F}_m \times \mathbf{F}_s. \quad (2.14)$$

Уравнение Пуассона (2.12) можно переписать в следующем виде

$$\frac{\delta \mathbf{P}}{\delta t} = \frac{d\mathbf{P}}{dt} + \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{P} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{P} + \mathbf{V} \cdot \mathbf{F} \times \mathbf{P} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{P}, \quad \frac{d\mathbf{P}}{dt} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{P}. \quad (2.15)$$

Откуда сразу же получаем выражение для угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\Omega} + \mathbf{V} \cdot \mathbf{F}. \quad (2.16)$$

Используя свойство перестановочности операторов градиента и полной производной по времени, для вспомогательного вектора $\boldsymbol{\Omega}$ получаем равенство [15]

$$\nabla \boldsymbol{\Omega} = \frac{d\mathbf{F}}{dt} + \mathbf{F} \times \boldsymbol{\Omega}. \quad (2.17)$$

Исключая отсюда вспомогательный вектор $\boldsymbol{\Omega}$ с помощью уравнения (2.13) и используя уравнение (2.14) после некоторых преобразований, получаем

$$\nabla \otimes \boldsymbol{\omega} = \frac{\delta \mathbf{F}}{\delta t} + \mathbf{F} \times \boldsymbol{\omega} + \nabla \mathbf{V} \cdot \mathbf{F}. \quad (2.18)$$

Откуда для ротора вектора $\boldsymbol{\omega}$ имеем

$$\nabla \times \boldsymbol{\omega} = \frac{\delta \mathbf{f}}{\delta t} + (\mathbf{F}^\Gamma - (\text{tr} \mathbf{F}) \mathbf{E}_*) \cdot \boldsymbol{\omega} + (\nabla \mathbf{V} \cdot \mathbf{F})_\times. \quad (2.19)$$

Последние два равенства справедливы для любого вектора \mathbf{V} и будут использованы позднее. Пусть частица, которая в данный момент времени t находится в точке \mathbf{x} , в момент времени $t_0 \leq t$ находилась в точке \mathbf{x}_0 . Введем в рассмотрение вектор перемещений $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, который переводит частицу из положения \mathbf{x}_0 в точку \mathbf{x} . Имеем очевидное равенство

$$\frac{\delta}{\delta t} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \equiv \frac{d}{dt} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \Rightarrow \frac{d}{dt} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x}, t), \quad (2.20)$$

где принято обозначение

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}, t) \equiv (\mathbf{E} - \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)), \quad \det \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) > 0. \quad (2.21)$$

Вычисляя градиент от обеих частей второго из равенств (2.20) и учитывая перестановочность операторов градиента и полной производной по времени, получаем следующие равенства

$$\frac{\delta}{\delta t} \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \nabla \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) \Rightarrow \nabla \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \left(\frac{\delta}{\delta t} \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \right) \cdot \mathbf{g}^{-1}(\mathbf{x}, t). \quad (2.22)$$

Эти равенства можно найти в книгах [10, 11]. Последнее равенство можно переписать в эквивалентной форме

$$\nabla \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = - \left(\frac{\delta}{\delta t} \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) \right) \cdot \mathbf{g}^{-1}(\mathbf{x}, t). \quad (2.23)$$

Данное соотношение понадобится нам при записи приведенного диссипативного неравенства.

2.2 Интегральная и локальная формы закона сохранения частиц

Обратимся к рассмотрению закона сохранения частиц. Выберем некоторую инерциальную систему отсчета. Пусть Z есть данное множество односпиновых частиц. Пусть V есть некоторая фиксированная область в системе отсчета. Граница V есть замкнутая поверхность $S = \partial V$. Пусть далее $\rho(\mathbf{x}, t) dV$ есть число частиц в бесконечно малой окрестности точки $\mathbf{x} \subset V$ в актуальный момент времени t

$$\rho(\mathbf{x}, t) \geq 0 \quad (2.24)$$

Закон сохранения частиц в интегральной форме имеет вид

$$\frac{d}{dt} \int_{(V)} \rho(\mathbf{x}, t) dV = - \int_{(S)} \rho \mathbf{n} \cdot \mathbf{V} dS, \quad \int_{(S)} \mathbf{n} \cdot (\rho \mathbf{V}) dS = \int_{(V)} \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) dV \quad (2.25)$$

Учитывая произвольность выбора области интегрирования, отсюда получаем локальную форму закона сохранения частиц

$$\frac{d\rho}{dt} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0. \quad (2.26)$$

С использованием материальной производной это уравнение принимает вид

$$\frac{\delta \rho}{\delta t} + \rho \nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\delta(\ln \rho)}{\delta t} + \nabla \cdot \mathbf{V} = 0. \quad (2.27)$$

Последнему равенству с помощью (2.23) можно придать вид

$$\nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = - \mathbf{g}^{-1}(\mathbf{x}, t) \cdot \left(\frac{\delta}{\delta t} \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) \right) = - \frac{\delta(\ln \rho)}{\delta t}. \quad (2.28)$$

Этому уравнению можно придать другую форму. Для этого достаточно вспомнить формулу, справедливую для любого невырожденного тензора \mathbf{g}

$$\mathbf{g}^{-1} = \frac{1}{I_3(\mathbf{g})} \left(\frac{\partial I_3(\mathbf{g})}{\partial \mathbf{g}} \right)^T, \quad I_3(\mathbf{g}) = \det(\mathbf{g}). \quad (2.29)$$

Тогда имеем

$$\mathbf{g}^{-1}(\mathbf{x}, t) \cdot \frac{\delta}{\delta t} \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{I_3(\mathbf{g})} \left(\frac{\partial I_3(\mathbf{g})}{\partial \mathbf{g}} \right)^T \cdot \left(\frac{\delta}{\delta t} \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) \right) = \frac{1}{I_3(\mathbf{g})} \frac{\delta I_3(\mathbf{g})}{\delta t}. \quad (2.30)$$

Теперь уравнение (2.28) принимает вид

$$\frac{\delta}{\delta t} \ln \left[\frac{\rho}{I_3(\mathbf{g})} \right] = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\delta}{\delta t} \left[\frac{\rho}{I_3(\mathbf{g})} \right] = 0. \quad (2.31)$$

Обычно считается [5, 10, 11], что отсюда следует интеграл

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \rho_0(\mathbf{x}_0) I_3(\mathbf{g}), \quad (2.32)$$

но, строго говоря, это неверно. Действительно, допустим, что мы наблюдаем недеформирующуюся, но неоднородную, среду из движущейся инерциальной системы отсчета. Тогда имеем

$$\mathbf{g} = \mathbf{E}, \quad \Rightarrow \quad I_3(\mathbf{g}) = 1 \quad \Rightarrow \quad \rho(\mathbf{x}, t) = \rho_0(\mathbf{x}_0). \quad (2.33)$$

Смысл последнего выражения совершенно непонятен. Как оно должно выглядеть на самом деле? Для этого нужно просто проинтегрировать уравнение (2.31). Запишем его в развернутой форме

$$\frac{\delta}{\delta t} \left[\frac{\rho}{I_3(\mathbf{g})} \right] = \frac{d}{dt} \left[\frac{\rho}{I_3(\mathbf{g})} \right] + \mathbf{V} \cdot \nabla \left[\frac{\rho}{I_3(\mathbf{g})} \right] = 0, \quad \mathbf{V} = \text{const}. \quad (2.34)$$

Общий интеграл этого уравнения имеет вид

$$\frac{\rho(\mathbf{x}, t)}{I_3(\mathbf{g})} = \psi(\mathbf{x} - \mathbf{V}t), \quad (2.35)$$

где ψ есть произвольная функция. Полагая здесь $t = 0$, находим функцию ψ . В результате получаем

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \rho_0(\mathbf{x} - \mathbf{V}t). \quad (2.36)$$

Только в случае однородной среды, когда плотность среды одинакова во всех точках, решения (2.33) и (2.36) совпадают. Подчеркнем, что решение (2.36) справедливо только при выполнении условия $\mathbf{V} = \text{const}$. В общем случае уравнение (2.31), видимо, не может быть проинтегрировано. Его нужно рассматривать, как одно из уравнений, составляющих полную систему уравнений динамики сплошной среды

$$\frac{\delta}{\delta t} \left[\frac{1}{\zeta I_3(\mathbf{g})} \right] = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{\zeta I_3(\mathbf{g})} \right] + \mathbf{V}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \left[\frac{1}{\zeta I_3(\mathbf{g})} \right] = 0, \quad \zeta = \frac{\rho_0}{\rho}. \quad (2.37)$$

2.3 Интегральная и локальная формы первого закона динамики

Формулировка фундаментальных законов при пространственном описании отличается тем, что эти законы должны записываться для открытых систем [16], т.е. для систем, которые обмениваются со своим окружением массой, количеством движения, кинетическим моментом и энергией. Покажем, что при пространственном описании запись первого закона динамики Эйлера и введение тензора напряжений почти аналогичны этим операциям при материальном описании. Количество движения частиц, находящихся в области V , определяется следующим выражением

$$\mathbf{K}_1 = \int_{(V)} \rho(\mathbf{x}, t) \mathcal{K}_1(\mathbf{x}, t) dV(\mathbf{x}), \quad \mathcal{K}_1 = m \mathbf{V}(\mathbf{x}, t), \quad (2.38)$$

где вектор \mathcal{K}_1 называется плотностью количества движения, m есть масса частицы. Первый закон динамики Эйлера записывается в виде равенства

$$\frac{d}{dt} \int_{(V)} \rho \mathcal{K}_1 dV = \int_{(V)} \rho \mathbf{F} dV + \int_{(S)} \mathbf{T}_{(n)} dS - \int_{(S)} \rho (\mathbf{n} \cdot \mathbf{V}) \mathcal{K}_1 dV, \quad (2.39)$$

где последнее слагаемое определяет подвод количества движения в область V , который имеет место, например, за счет движения системы отсчета относительно среды. Покажем, что при пространственном описании применимы стандартные методы введения тензора напряжений и других подобных ему величин. Последнее слагаемое в правой части уравнения (2.39) перепишем в виде

$$\int_{(S)} \mathbf{n} \cdot (\rho \mathbf{V} \otimes \mathcal{K}_1) dS = \int_{(V)} \nabla \cdot (\rho \mathbf{V} \otimes \mathcal{K}_1) dV$$

Теперь первый закон динамики можно переписать в виде

$$\frac{\frac{d}{dt} \int_{(V)} \rho \mathcal{K}_1 dV}{O(\varepsilon^3)} = \frac{\frac{d}{dt} \int_{(V)} [\rho \mathbf{F} - \nabla \cdot (\rho \mathbf{V} \otimes \mathcal{K}_1)] dV}{O(\varepsilon^3)} + \frac{\int_{(S)} \mathbf{T}_{(n)} dS}{O(\varepsilon^2)}$$

Отсюда мы видим, что справедливо следующее равенство

$$\int_{(S)} \mathbf{T}_{(n)} dS = \mathbf{0}. \quad (2.40)$$

Используя стандартные рассуждения, вводим в рассмотрение тензор напряжений

$$\mathbf{T}_{(n)} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{T}. \quad (2.41)$$

Таким образом, мы имеем

$$\int_{(V)} [(\rho \mathcal{K}_1)' - \rho \mathbf{F} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) \mathcal{K}_1 + \rho \mathbf{V} \cdot \nabla \mathcal{K}_1 - \nabla \cdot \mathbf{T}] dV = \mathbf{0}$$

В локальной форме первый закон динамики принимает вид

$$\nabla \cdot \mathbf{T} + \rho \mathbf{F} = \rho \left(\frac{d}{dt} \mathcal{K}_1 + \mathbf{V} \cdot \nabla \mathcal{K}_1 \right) \equiv \rho \frac{\delta}{\delta t} \mathcal{K}_1(\mathbf{x}, t), \quad \mathcal{K}_1 = m \mathbf{V}(\mathbf{x}, t), \quad (2.42)$$

где $m = \text{const}$ есть масса частицы, находящейся в точке \mathbf{x} в актуальный момент времени. Если все частицы среды одинаковы, то постоянная величина ρm есть плотность массы.

2.4 Интегральная и локальная формы второго закона динамики

Второй закон динамики в явной форме был впервые сформулирован Л. Эйлером в 1771 году. Однако в современную механику он был в неявной форме введен Е. и Ф. Коссера в книге [17], в которой был использован вариационный принцип. Стандартные формы вариационного принципа не применимы к открытым системам. Более современное изложение теории сплошных сред с учетом независимого второго закона динамики можно найти в работах [18, 19], в которых используется материальное описание. В данной работе используется подход Эйлера в пространственном описании, который обладает большей общностью. Запишем второй закон динамики Эйлера [16]

$$\frac{d}{dt} \int_{(V)} \rho \mathcal{K}_2 dV = \int_{(V)} \rho (\mathbf{x} \times \mathbf{F} + \mathbf{L}) dV + \int_{(S)} (\mathbf{x} \times \mathbf{T}_{(n)} + \mathbf{M}_{(n)}) dS - \int_{(S)} \rho (\mathbf{n} \cdot \mathbf{V}) \mathcal{K}_2 dS \quad (2.43)$$

где \mathcal{K}_2 и \mathbf{L} суть плотности кинетического и внешнего моментов. Стандартные рассуждения позволяют ввести в рассмотрение тензор моментных напряжений \mathbf{M} и формулы Коши

$$\mathbf{M}_{(n)} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{M}, \quad (2.44)$$

а также локальную форму второго закона

$$\nabla \cdot \mathbf{M} + \mathbf{T}_x + \rho \mathbf{L} = \rho \frac{\delta}{\delta t} \mathcal{K}_2(\mathbf{x}, t), \quad (2.45)$$

где через вектор \mathcal{K}_2 обозначена плотность кинетического момента

$$\mathcal{K}_2 = \mathbf{x} \times \mathcal{K}_1 + \mathbf{P}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{P}^T(\mathbf{x}, t) \cdot \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t) = m \mathbf{x} \times \mathbf{V} + J \boldsymbol{\omega}, \quad (2.46)$$

где тензор инерции \mathbf{C} принят для простоты шаровым, а J есть момент инерции частицы.

2.5 Интегральная и локальная формы уравнения баланса энергии

Если бы нас интересовали только системы с конечным (и не слишком большим) числом степеней свободы, то первых двух законов динамики в совокупности с определяющими уравнениями было бы вполне достаточно для полного анализа всех интересующих нас вопросов. В механике сплошных сред, т.е. систем с бесконечным числом степеней свободы, ситуация оказывается сложнее. Здесь уже невозможно описать состояние среды, пользуясь только понятиями сил и моментов. Дополнительно приходится вводить такие первичные понятия как внутренняя энергия, температура и энтропия. Собственно, понятие внутренней энергии можно ввести и в системах с конечным числом степеней свободы, но там это понятие является производным и вводится как потенциал внутренних сил. В механике сплошных сред это уже неверно. Понятия температуры и энтропии знакомы практически всем. Тем не менее, их строгое определение наталкивается на серьезные затруднения. В механике сплошных сред эти затруднения до некоторой степени разрешаются формулировкой первого и второго начал термодинамики. В данной работе используются формулировки, которые не

являются общепринятыми. В частности, понятие энтропии, используемое ниже, отличается от известных определений⁵. Полная энергия частиц, попадающих в область V в системе отсчета, может быть представлена в следующем виде

$$E = \int_{(V)} \rho(\mathcal{K} + \mathcal{U}) dV, \quad (2.47)$$

где \mathcal{K}, \mathcal{U} суть плотности кинетической и внутренней энергий соответственно, причем плотность кинетической энергии определена выражением

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2} m \mathbf{V} \cdot \mathbf{V} + \mathbf{V} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{P}^T \cdot \boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{P}^T \cdot \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} m \mathbf{V} \cdot \mathbf{V} + \frac{1}{2} J \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}. \quad (2.48)$$

Что касается внутренней энергии, то она характеризует свойство системы запастись и отдавать энергию только за счет изменения конфигурации системы и некоего параметра, называемого энтропией. Легко доказать, что внутренняя энергия не может зависеть от скоростей. Уравнение баланса энергии или первый закон термодинамики для произвольной физической системы гласит: **скорость изменения полной энергии произвольной системы равна мощности внешних воздействий плюс скорость подвода энергии “не механического происхождения”, обычно в форме тепла.** Дать общее и строгое определение понятию энергии “не механического происхождения” затруднительно. Поэтому ограничимся неопределенным заявлением о том, что энергия не механического происхождения — это та часть энергии, которая подводится не через мощность внешних воздействий. Поясним сказанное простейшим примером. Пусть два грузика, соединенные пружиной, могут совершать движения вдоль трубки с осью x . Рассмотрим две похожих ситуации. В первой из них между грузиками и стенками трубки действуют силы вязкого трения. Во втором случае стенки трубки идеально гладкие, но между грузиками вставлен демпфер вязкого трения. Полная энергия системы имеет один и тот же вид в обоих случаях

$$E = \frac{1}{2} (m_1 \dot{x}_1^2 + m_2 \dot{x}_2^2) + \frac{1}{2} c (x_1 - x_2)^2. \quad (2.49)$$

Однако уравнение баланса энергии в этих двух случаях пишется по разному

$$1. \quad \dot{E} = -b (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2); \quad 2. \quad \dot{E} = -b (\dot{x}_1 - \dot{x}_2)^2. \quad (2.50)$$

В первом случае рассеяние энергии происходит за счет мощности внешних сил, причем подвод энергии “не механического происхождения” отсутствует. Во втором случае мощность внешних сил равна нулю, а рассеяние энергии происходит благодаря подводу (в данном случае — отводу) энергии “не механического происхождения”. При этом мы часто говорим, что энергия рассеивается в окружающую среду в виде тепла.

Для сплошной среды, находящейся в выделенном объеме V системы отсчета, урав-

⁵Энтропия, видимо, одно из наиболее туманных понятий в механике, которое используется во многих смыслах, а иногда и вовсе без смысла.

нение баланса энергии записывается в форме интегрального равенства:

$$\frac{d}{dt} \int_{(V)} \rho(\mathcal{K} + \mathcal{U}) dV = \int_{(V)} \rho [\mathbf{F} \cdot \mathbf{V} + \mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\omega} + q] dV + \int_{(S)} (\mathbf{T}_{(n)} \cdot \mathbf{V} + \mathbf{M}_{(n)} \cdot \boldsymbol{\omega} + h_n) dS - \int_{(S)} \rho \mathbf{n} \cdot \mathbf{V} (\mathcal{K} + \mathcal{U}) dS, \quad (2.51)$$

где тепловой поток $h_{(n)}$ выражается через вектор \mathbf{h} потока тепла по правилу Стокса

$$h_{(n)} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{h} \quad (2.52)$$

Следует подчеркнуть, что в понятие тепла включаются все виды энергии, которые не определяются полностью кинетической и внутренней энергией, а также мощностью внешних воздействий. Иными словами, тепло не обязательно связано с температурой и энтропией, хотя, во многих случаях, это именно так. В локальной форме уравнение баланса энергии записывается в следующем виде

$$\rho \frac{\delta \mathcal{U}}{\delta t} = \mathbf{T}^T \cdot \cdot (\nabla \mathbf{V} + \mathbf{E} \times \boldsymbol{\omega}) + \mathbf{M}^T \cdot \cdot \nabla \boldsymbol{\omega} + \nabla \cdot \mathbf{h} + \rho q. \quad (2.53)$$

В правой части этого равенства стоит мощность силовых и моментных напряжений. Часть этой мощности идет на изменение внутренней энергии. Оставшаяся часть мощности частично остается в теле в форме тепла, а частично рассеивается в окружающую среду. Чтобы разделить эти части, тензоры силовых и моментных напряжений представим в виде разложений

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_e + \mathbf{T}_i, \quad \mathbf{M} = \mathbf{M}_e + \mathbf{M}_i, \quad (2.54)$$

где индексом “e” отмечена составляющая напряжений, не зависящая от скоростей, а индексом “i” обозначена вся оставшаяся часть напряжений. Используя это разложение, уравнение баланса энергии переписываем в виде

$$\rho \frac{\delta \mathcal{U}}{\delta t} = \mathbf{T}_e^T \cdot \cdot (\nabla \mathbf{V} + \mathbf{E} \times \boldsymbol{\omega}) + \mathbf{M}_e^T \cdot \cdot \nabla \boldsymbol{\omega} + \nabla \cdot \mathbf{h} + \rho q + \mathbf{T}_i^T \cdot \cdot (\nabla \mathbf{V} + \mathbf{E} \times \boldsymbol{\omega}) + \mathbf{M}_i^T \cdot \cdot \nabla \boldsymbol{\omega}. \quad (2.55)$$

В такой форме уравнение баланса энергии еще мало о чем говорит. В частности, отсюда не видно от каких аргументов зависит внутренняя энергия. При построении конкретных теорий уравнение баланса энергии должно быть преобразовано к следующей форме

$$\rho \frac{\delta \mathcal{U}}{\delta t} = \mathbf{f}_1^T (\mathbf{T}_e, \mathbf{M}_e) \cdot \cdot \frac{\delta \mathbf{A}}{\delta t} + \mathbf{f}_2^T (\mathbf{T}_e, \mathbf{M}_e) \cdot \cdot \frac{\delta \mathbf{B}}{\delta t} + \rho \vartheta \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta t}, \quad (2.56)$$

где тензоры \mathbf{A} и \mathbf{B} называются первой и второй мерой деформации соответственно, скалярные функции ϑ и \mathcal{H} называются температурой и плотностью энтропии. Равенство (2.56) называется приведенным уравнением баланса энергии. При его написании

в рассмотрение введены два новых параметра: температура ϑ и плотность энтропии \mathcal{H} . Тот факт, что введены только два новых параметра определяется исключительно нашим желанием. С не меньшим основанием вместо (2.56) мы могли бы написать приведенное уравнение баланса энергии в такой, например, форме

$$\rho \frac{\delta \mathcal{U}}{\delta t} = \mathbf{f}_1^\top(\mathbf{T}_e, \mathbf{M}_e) \cdot \frac{\delta \mathbf{A}}{\delta t} + \mathbf{f}_2^\top(\mathbf{T}_e, \mathbf{M}_e) \cdot \frac{\delta \mathbf{B}}{\delta t} + \rho \vartheta_1 \frac{\delta \mathcal{H}_1}{\delta t} + \rho \vartheta_2 \frac{\delta \mathcal{H}_2}{\delta t},$$

где в каждой точке системы отсчета введены две температуры и две энтропии. Так, например, приходится делать в теории оболочек [24]. Написание приведенного уравнения баланса энергии в форме (2.56) продиктовано нашим желанием обойтись минимумом используемых средств. Из уравнения (2.56) сразу видно, что внутренняя энергия зависит от мер деформации \mathbf{A} и \mathbf{B} , а также от энтропии.

2.6 Второй закон термодинамики и приведенное уравнение баланса энергии

Четвертый фундаментальный закон механики — это второй закон термодинамики, в основании которого лежит опытный факт о том, что вся механическая работа может быть переведена в тепло, но полностью перевести тепло в работу невозможно. За этим экспериментальным фактом стоит теоретическая идея фундаментальной важности о несуществовании изолированных систем, если только под системой не понимать всю проявленную и непроявленную Вселенную. Механическая работа совершается рассматриваемой системой, а потому она полностью определена и, следовательно, может быть переведена в тепло. В противоположность этому тепло — это некая характеристика состояния не только рассматриваемой системы, но и ее окружения. Тепло неизбежно излучается из системы, в том числе и в непроявленную, т.е. в неучитываемую нами, Вселенную.

При введении второго закона термодинамики обычно рассматриваются тепловые машины и циклы Карно. И то, и другое понятия относятся скорее к области правдоподобных рассуждений, нежели к рациональной науке. На механику сплошных сред второй закон термодинамики был распространен Дюгемом [20]. Принятая в настоящее время трактовка второго закона термодинамики в форме неравенства Клаузиуса–Дюгема была предложена К. Труделлом в 1960 году [21] и явилась развитием идей Дюгема. В данной работе будет использована другая схема введения второго закона термодинамики и понятия энтропии, которая в большей степени опирается на чисто механические соображения. При этом следует подчеркнуть, что ни одна из существующих в настоящее время формулировок второго закона термодинамики не может претендовать на тот же уровень фундаментальности, каким обладают законы динамики Эйлера и уравнение баланса энергии⁶. Более того, маловероятно, что в обозримом будущем удастся выдвинуть такую формулировку второго закона термодинамики, которая будет полноценно отражать всю совокупность идей, связанных с этим законом. В современной механике сплошных сред это просто некий прием, причем очень не

⁶Проблема состоит в отсутствии строгого определения понятия температуры. Это понятие, по мнению автора, невозможно ввести без использования концепции электромагнитного поля, которое и вынуждает тепло течь от горячего к холодному.

совершенный, позволяющий в известной мере учесть энергию движения неучитываемого нами бесконечного множества степеней свободы как самого тела, так и его окружения.

Начнем с обсуждения уравнения баланса энергии (2.51). Скорость подвода энергии в нем определена тремя величинами q , h_n и последним интегралом в правой части (2.51). Что касается последнего слагаемого, то оно не имеет отношения к тепловой энергии. Поэтому нужно обсудить только первые два слагаемых, т.е. величину

$$\int_{(V)} \rho q dV + \int_{(S)} h_n dS = \int_{(V)} (\rho q + \nabla \cdot \mathbf{h}) dV. \quad (2.57)$$

Именно эта величина определяет скорость подвода тепловой энергии в рассматриваемое тело. Однако это не весь подвод (отвод) энергии. Нужно еще учесть диссипацию энергии внутри самого выделенного тела. Как осуществляется этот учет, будет показано ниже. Вернемся к понятию внутренней энергии. По определению и по физическому смыслу она не может зависеть от скоростей изменения основных кинематических переменных. Но глубокое противоречие состоит в том, что внутренняя энергия, как правило, **обязана зависеть от** неких относительных **скоростей** игнорируемых нами переменных. Например, при деформации кристаллической решетки ее атомы смещаются от положений равновесия, и эти смещения меняют внутреннюю энергию решетки. В то же время, известно, что атомы не покоятся в узлах решетки, а совершают быстрые колебания относительно неких средних положений, которые и воспринимаются нами, как положения равновесия при макроскопическом рассмотрении. Представляется очевидным, что внутренняя энергия решетки зависит от скоростей упомянутых колебаний атомов, поскольку именно эти колебания определяют многие механические свойства тела. Если бы мы полностью учли движения атомов, то осталась бы проблема учета движений электронов внутри атома. Даже если бы мы рассматривали систему, состоящую, например, из свободных электронов, то осталась бы проблема учета энергии электромагнитного поля. Короче говоря, Вселенная всегда будет оставаться значительно богаче любых рассматриваемых нами моделей. И эта игнорируемая нашими моделями часть Вселенной всегда будет взаимодействовать с выделенными системами и влиять на ее внутреннюю энергию. Чтобы как-то разрешить это, строго говоря, неустранимое противоречие, можно поступить следующим образом. Будем считать, что плотность внутренней энергии зависит не только от конфигурации тела, т.е. от положений и поворотов частиц, составляющих тело, в данный момент времени, но и от некоего параметра, называемого плотностью энтропии \mathcal{H} , причем полная энтропия системы считается аддитивной функцией массы

$$H = \int_{(V)} \rho \mathcal{H} dV \quad (2.58)$$

Введение энтропии является попыткой как-то учесть зависимость внутренней энергии от скоростей неучитываемых нами степеней свободы. Всегда ли это возможно? Отрицательный ответ на этот вопрос очевиден. Но замечательно то, что этот прием часто оказывается весьма удовлетворительным с практической точки зрения. Не следует только наделять энтропию некими фундаментальными, вплоть до мистических,

свойствами. Коль скоро мы ввели новый параметр (новую степень свободы), то мы должны для него сформулировать некий дополнительный закон, который играет роль второго закона термодинамики в механике сплошных сред. Вид этого закона поддается нам простым сравнением уравнений баланса энергии в формах (2.55) и (2.56), из которого следует равенство

$$\rho \vartheta \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta t} = \nabla \cdot \mathbf{h} + \rho q + \mathbf{T}_i^T \cdot \cdot (\nabla \mathbf{V} + \mathbf{E} \times \boldsymbol{\omega}) + \mathbf{M}_i^T \cdot \cdot \nabla \boldsymbol{\omega}. \quad (2.59)$$

Это равенство перепишем в другой форме

$$\nabla \cdot \mathbf{h} + \rho q = \rho \vartheta \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta t} - \rho \delta, \quad \rho \delta \equiv \mathbf{T}_i^T \cdot \cdot (\nabla \mathbf{V} + \mathbf{E} \times \boldsymbol{\omega}) + \mathbf{M}_i^T \cdot \cdot \nabla \boldsymbol{\omega}. \quad (2.60)$$

В левой части этого равенства стоит скорость подвода энергии. Часть этой энергии аккумулируется в теле. Она идет на изменение внутренней энергии, что и указывается первым слагаемым в правой части равенства (2.60). Это слагаемое представлено в виде произведения двух функций: температуры ϑ и материальной производной от энтропии. Энтропию можно считать не имеющей размерности. Поэтому температура имеет размерность энергии. В общем случае температура есть энергия на единицу энтропии. Если энтропию считать имеющей размерность, то и размерность температуры изменится. По смыслу своего введения **температура — это энергия движения системы по игнорируемым степеням свободы**. Принятая трактовка энтропии и температуры несколько отличается от трактовки, используемой в физике. В частности, энтропия не является логарифмом вероятности чего-то, что вообще нельзя определить в механике сплошных сред. Тем не менее, все сказанное полностью согласуется с теми действиями, которые мы совершаем при введении энтропии и температуры в механике, уравнения которой ничего не знают о том, что думают по поводу температуры и энтропии в статистической физике. Второе слагаемое $\rho \delta$ в уравнении (2.60) есть часть тепловой энергии, которая не может быть аккумулирована в данной точке тела и либо излучается в окружающую среду, либо переносится в другие точки тела посредством вектора потока тепла. Прежде чем двигаться дальше, вернемся к примеру, рассмотренному в предыдущем пункте, о двух грузиках, соединенных пружиной и демпфером и находящихся в трубке с идеально гладкими стенками. Уравнение баланса энергии для этой системы дается вторым из выражений (2.50). Введем два новых параметра H и ϑ такие, что

$$\vartheta \dot{H} = b(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)^2. \quad (2.61)$$

Это и есть второй закон термодинамики, записанный для рассматриваемой элементарной системы. Уравнение (2.61) содержит две новых неизвестных, введенных совершенно формально. Примем теперь, что параметр ϑ есть температура, измеряемая термометром по некоей выбранной процедуре. Пусть, например, ϑ есть измеряемая температура корпуса демпфера. Теперь необходимо сформулировать определяющее уравнение, связывающее температуру ϑ и энтропию H . Подчеркнем, что определяющее уравнение можно формулировать только после определения смысла температуры, например, как измеряемого термометром параметра. Примем простейшее определяющее уравнение для температуры

$$\vartheta = \vartheta(H) = c^{-1} H \quad \Rightarrow \quad H = c \vartheta, \quad (2.62)$$

где c есть экспериментально определяемый параметр. Подставляя (2.62) в (2.61), получаем уравнение

$$c \vartheta \dot{\vartheta} = b(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)^2 \Rightarrow \vartheta = \left[\vartheta_0^2 + \frac{2b}{c} \int_0^t (\dot{x}_1 - \dot{x}_2)^2 dt \right]^{1/2}, \quad (2.63)$$

где ϑ_0 есть начальная температура. Если наблюдаемые экспериментальные данные удается удовлетворительно описать при подходящем выборе постоянной c , то определяющее уравнение (2.62) можно считать приемлемым. В противном случае необходимо принимать другое определяющее уравнение. Если принять определяющее уравнение (2.62), то уравнение баланса энергии (2.50) сведется к закону сохранения энергии расширенной системы, включающей демпфер в качестве поглотителя механической энергии и накопителя тепловой энергии

$$\dot{E} = -b (\dot{x}_1 - \dot{x}_2)^2 \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(E + \frac{1}{2} c \vartheta^2 \right) = 0.$$

На этом примере отчетливо видно, что никакого объективного (измеряемого) смысла энтропия сама по себе не имеет. Она служит только для того, чтобы посредством второго закона термодинамики получить приемлемое уравнение для нахождения температуры. Что касается температуры, то в данном примере это энергия движения атомов корпуса и масла демпфера, т.е. энергия движения игнорируемых степеней свободы. Дальнейшее обсуждение этого примера можно опустить, поскольку цель примера состояла в демонстрации идеи введения энтропии. Возвращаемся к уравнению (2.60), которое содержит достаточно много произволов, чтобы удовлетворить весьма широким потребностям. Иными словами, принятие уравнения (2.60), называемого уравнением теплопроводности, не содержит в себе ничего обременительного, поскольку оно включает в себя несколько неизвестных, т.е. не замкнуто. Назначение второго закона термодинамики состоит, в частности, в том, чтобы сказать нечто определенное о неизвестных, входящих в уравнение (2.60), т.е. идеологически обосновать процедуру замыкания уравнения (2.60). В частности, второй закон термодинамики или, что то же самое, опыт утверждает, что

$$\rho \delta \equiv \mathbf{T}_i^T \cdot \cdot (\nabla \mathbf{V} + \mathbf{E} \times \boldsymbol{\omega}) + \mathbf{M}_i^T \cdot \cdot \nabla \boldsymbol{\omega} \geq 0. \quad (2.64)$$

Последнее неравенство можно интерпретировать как утверждение о том, что **силы трения**, а именно с ними связываются напряжения \mathbf{T}_i и \mathbf{M}_i , **не могут совершать положительной работы**. Кроме того, важнейшим опытным фактом, известным под названием нулевого закона термодинамики, является утверждение о том, что **тепло всегда течет от горячего к холодному**, т.е. утверждается справедливость неравенства

$$\mathbf{h} \cdot \nabla \vartheta \geq 0. \quad (2.65)$$

Как известно, оба неравенства (2.64) и (2.65) не противоречат никаким опытным фактам и могут считаться надежно установленными. Поэтому формулировка второго закона термодинамики считается приемлемой, если неравенства (2.64) и (2.65) вытекают из нее в качестве следствий. Подробное изложение истории развития понятия

энтропии и различные варианты формулировок второго закона термодинамики можно найти в книге [20]. Исходя из равенства (2.60), мы видим, что если в системе нет механизмов внутреннего рассеяния энергии, т.е. $\delta = 0$, то все тепло аккумулируется в системе и сохраняется в нем. По аналогии с “чистой” механикой можно сказать, что в этом случае мощность теплового воздействия $\rho \mathbf{q} + \nabla \cdot \mathbf{h}$ оказывается материальной производной от некоей функции, т.е. тепловая энергия является в некотором смысле консервативной. Если диссипация в системе имеется и выполняется неравенство (2.64), то из равенства (2.60) следует неравенство

$$\rho \mathbf{q} + \nabla \cdot \mathbf{h} \leq \rho \vartheta \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta t}, \quad (2.66)$$

которое в литературе [4] трактуется, как ограничение сверху для скорости подвода тепла. С подобной трактовкой трудно согласиться, ибо и температура, и энтропия сами зависят от скорости подвода тепла. Пусть, например, даны две функции $\mathbf{y}(t) > 0$ и $\mathbf{B}(t) > 1$. Для них справедливо неравенство $\mathbf{y}(t) < \mathbf{y}(t)\mathbf{B}(t) + 1$. Однако отсюда не следует, что функция $\mathbf{y}(t)$ ограничена сверху. Вообще, в так называемой рациональной термодинамике далеко не все утверждения кажутся бесспорными. Рассмотрим, например неравенство Клаузиуса–Дюгема. Для его получения достаточно записать выражение для материальной производной от энтропии и затем воспользоваться уравнением теплопроводности (2.60). В результате получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{(V)} \rho \mathcal{H} dV - \int_{(S)} \rho \mathbf{n} \cdot \mathbf{V} \mathcal{H} dS &= \int_{(V)} \rho \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta t} dV = \int_{(V)} \frac{\rho(\mathbf{q} + \delta) + \nabla \cdot \mathbf{h}}{\vartheta} dV = \\ &= \int_{(V)} \frac{\rho \mathbf{q}}{\vartheta} dV + \int_{(S)} \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{h}}{\vartheta} dS + \int_{(V)} \frac{\mathbf{h} \cdot \nabla \vartheta}{\vartheta} dV + \int_{(V)} \frac{\rho \delta}{\vartheta} dV. \end{aligned} \quad (2.67)$$

Учитывая неравенства (2.64) и (2.65), отсюда немедленно получаем

$$\int_{(V)} \rho \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta t} dV \geq \int_{(V)} \frac{\rho \mathbf{q}}{\vartheta} dV + \int_{(S)} \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{h}}{\vartheta} dS. \quad (2.68)$$

Это и есть неравенство Клаузиуса–Дюгема, которое положено в основу большинства современных работ по механике сплошных сред. Разумеется, оно правильно. Но из этого неравенства не следует ни принцип диссипации (2.64), ни нулевое начало термодинамики (2.65). Из неравенства Клаузиуса–Дюгема вытекает более слабое неравенство

$$\rho \delta + \mathbf{h} \cdot \nabla \vartheta \geq 0. \quad (2.69)$$

По мнению автора, это неравенство является слишком слабым для физических приложений. Поэтому в данной работе под вторым законом термодинамики будет пониматься уравнение теплопроводности (2.60) в совокупности с неравенствами (2.64) и (2.65). Можно также добавить, что в современных теориях придается явно преувеличенное значение таким понятиям как температура и энтропия. В настоящее время объективный характер этих величин еще не установлен. Конечно, термометр позволяет нам измерить объективно существующую величину, называемую температурой.

Мы можем попытаться подобрать такую функцию, называемую энтропией, чтобы измеряемая в эксперименте температура совпадала бы с вводимой в теории. Часто такая попытка оказывается успешной. Что касается энтропии, то ее никто и никогда не измерял. Для целей данной работы с формальной точки зрения не очень важно, какую именно трактовку принимать для второго закона термодинамики. В словесной формулировке второй закон термодинамики утверждает, что *тепловая энергия не может быть полностью переведена в работу и неизбежно частично теряется в виде излучения в окружающую среду*. При этом следует иметь в виду, что окружающая среда не имеет границ в пространстве, т.е. “тепловые волны” неизбежно уносят часть тепловой энергии. Используя уравнение теплопроводности (2.59) и исключая тепловые слагаемые из уравнения баланса энергии (2.53), получаем приведенное уравнение баланса энергии

$$\rho \frac{\delta \mathcal{U}}{\delta t} = \mathbf{T}_e^T \cdot \cdot (\nabla \mathbf{V} + \mathbf{E} \times \boldsymbol{\omega}) + \mathbf{M}_e^T \cdot \cdot \nabla \boldsymbol{\omega} + \rho \vartheta \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta t}. \quad (2.70)$$

Если в рассмотрение ввести плотность свободной энергии $\mathcal{F} = \mathcal{U} - \vartheta \mathcal{H}$, то этому равенству можно придать вид

$$\rho \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta t} + \rho \mathcal{H} \frac{\delta \vartheta}{\delta t} = \mathbf{T}_e^T \cdot \cdot (\nabla \mathbf{V} + \mathbf{E} \times \boldsymbol{\omega}) + \mathbf{M}_e^T \cdot \cdot \nabla \boldsymbol{\omega}. \quad (2.71)$$

Приведенное уравнение баланса энергии должно выполняться при всех мыслимых процессах, протекающих в среде. Поскольку в это равенство никакие внешние параметры не входят, то оно доставляет ограничения, налагаемые на определяющие уравнения среды.

2.7 Пример. Задача Кэйли

Чтобы немного пояснить особенности работы с открытыми системами, рассмотрим задачу Кэйли (1857) о падающей цепочке — см. стр.114 учебника [22]. В задаче требуется исследовать движение нерастяжимой тяжелой цепи, конец которой свешивается с горизонтального стола, тогда как не вступившая еще в движение часть цепи свернута в клубок у самого края стола. Пусть $\rho = \text{const}$ и L суть погонная масса и длина цепи. Через x обозначим свисающую часть цепи. Запишем уравнение движения свисающей части цепи

$$\frac{d}{dt} \left(\rho x \frac{dx}{dt} \right) = \rho g x - F + \frac{d(\rho x)}{dt} \frac{dx}{dt}, \quad (2.72)$$

где в левой части уравнения стоит скорость изменения количества движения свисающей части цепи. В правой части: первое слагаемое — вес свисающей части, второе слагаемое — сила, приложенная к верхнему концу свисающей части, последнее слагаемое есть скорость подвода количества движения в свисающую часть цепи. Уравнение (2.72) содержит две неизвестных функции. В качестве дополнительного уравнения запишем уравнение баланса количества движения для части цепи, лежащей на столе

$$\frac{d}{dt} [\rho (L - x) 0] = F + \frac{d\rho (L - x)}{dt} \frac{dx}{dt} \Rightarrow F = \rho \left(\frac{dx}{dt} \right)^2. \quad (2.73)$$

Подставляя полученное выражение для силы F в уравнение (2.72), приходим к уравнению, используемому Кэйли. Примем, что в начальный момент времени цепь находилась в покое и свисала ее бесконечно малая часть, т.е. примем следующие начальные условия

$$t = 0 : x = 0, \quad \dot{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = g t^2 / 6. \quad (2.74)$$

Здесь опущены необходимые вычисления, поскольку их можно найти в [22]. Учебники по механике останавливаются на выводе закона движения (2.74), но любители парадоксов идут дальше. Выясним сохраняется ли энергия у движущейся цепи. При $t = 0$ цепь обладала только потенциальной энергией $P_0 = \rho g L^2$. Рассмотрим момент времени t_1 , когда $x = L$, т.е. $t_1 = \sqrt{6L/g}$. В этот момент времени имеем

$$P_1 = \rho g L^2 / 2, \quad K_1 = \rho g L^2 / 3 \quad \Rightarrow \quad P_1 + K_1 = 5 \rho g L^2 / 6 \neq P_0 = \rho g L^2. \quad (2.75)$$

Спрашивается, куда пропала энергия $\rho g L^2 / 6$? Именно в этом усматривается парадокс. Ответ очевиден: эта часть энергии затрачена на мгновенный разгон бесконечно малых частей цепи от нулевой скорости до конечной скорости \dot{x} , т.е. в данной задаче бесконечно малые части цепи испытывают бесконечно большие ускорения. Менее тривиален вопрос о правильной записи уравнения баланса энергии в этой задаче. Собственно, именно в этом пункте и возникают наибольшие расхождения и, как следствие, парадоксы. Мы настаиваем, что уравнение баланса энергии должно выполняться во всех случаях, но его правильное написание требует определенной практики. Проверим его выполнение в задаче Кэйли. Через \mathcal{U} обозначим массовую плотность внутренней энергии цепи, т.е. бесконечно малая часть цепи dx обладает внутренней энергией $d\mathcal{U} = \rho dx \mathcal{U}$. Поскольку цепь нерастяжима, то массовая плотность внутренней энергии постоянна. Запишем уравнение баланса энергии для свисающей части цепи

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \rho x \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \rho x \mathcal{U} \right] = \rho g x \frac{dx}{dt} - F \frac{dx}{dt} + \frac{d(\rho x)}{dt} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \mathcal{U} \right]. \quad (2.76)$$

Здесь первые два слагаемых в правой части определяют мощность внешних сил, действующих на свисающую часть цепи, а последнее слагаемое определяет скорость подвода энергии в систему. Нетрудно убедиться, что уравнение (2.76) для решения (2.74) тождественно выполняется. Чтобы яснее ощутить понятие подвода энергии в систему, запишем уравнение баланса энергии для всей цепочки

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \rho x \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \rho L \mathcal{U} \right] = \rho g x \frac{dx}{dt} + \delta. \quad (2.77)$$

Здесь δ есть скорость подвода энергии в цепочку. Полный подвод энергии в систему на интервале времени $[0, t_1]$ есть интеграл

$$\Delta = \int_0^{t_1} \delta dt = \left[\frac{1}{2} \rho x \dot{x}^2 \right]_0^{t_1} - \left[\frac{1}{2} \rho g x^2 \right]_0^{t_1} = -\frac{1}{6} \rho g L^2, \quad (2.78)$$

где использовано решение (2.74). В данном случае внутри системы происходит потеря энергии, причем энергия “не механического происхождения” имеет чисто механическую природу. Тем не менее, мы говорим, что энергия (2.78) рассеялась в окружающую среду в форме тепла. Неискушенному в механике открытых систем читателю будет полезно обдумать эту задачу во всех деталях. В частности, следует проследить происхождение и структуру подвода энергии. По аналогии с рассмотренным выше примером полезно ввести температуру и энтропию, а также дать им истолкование. В задачах такого рода очень трудно сформулировать жесткие правила. Только настойчивая практика позволит изучающим с легкостью преодолевать все возникающие проблемы. К сожалению (или к счастью), механика вообще и механика открытых систем в частности всегда будет включать в себя элементы искусства и никогда не будет принадлежать сфере чистой математики, как это виделось Лагранжу.

3 Приведенное уравнение баланса энергии и соотношения Коши–Грина

Чтобы эффективно использовать уравнение баланса энергии (2.71), его необходимо преобразовать к виду (2.56). Поскольку в этом параграфе будут обсуждаться исключительно упругие силовые и моментные напряжения, то временно нижний индекс e будем опускать. Нам понадобится тождество, справедливое для любого вектора \mathbf{a}

$$\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} (\mathbf{a} \times \mathbf{P})^T \cdot \frac{\delta \mathbf{P}}{\delta t}. \quad (3.1)$$

Теперь с учетом этого тождества и равенства (2.23) имеем

$$\mathbf{T}^T \cdot (\nabla \mathbf{V} + \mathbf{E} \times \boldsymbol{\omega}) = - (\mathbf{g}^{-1} \cdot \mathbf{T}^T) \cdot \frac{\delta \mathbf{g}}{\delta t} - \frac{1}{2} (\mathbf{T}_\times \times \mathbf{P})^T \cdot \frac{\delta \mathbf{P}}{\delta t}. \quad (3.2)$$

С учетом равенства (2.18) для тензора моментных напряжений имеем

$$\mathbf{M}^T \cdot \nabla \boldsymbol{\omega} = \mathbf{M}^T \cdot \frac{\delta \mathbf{F}}{\delta t} + \frac{1}{2} [(\mathbf{M}^T \cdot \mathbf{F})_\times \times \mathbf{P}]^T \cdot \frac{\delta \mathbf{P}}{\delta t} - (\mathbf{g}^{-1} \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{M}^T) \cdot \frac{\delta \mathbf{g}}{\delta t}. \quad (3.3)$$

Тогда приведенное уравнение баланса энергии (2.71) принимает вид

$$\rho \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta t} + \rho \mathcal{H} \frac{\delta \vartheta}{\delta t} = - (\mathbf{g}^{-1} \cdot \mathbf{T}^T + \mathbf{g}^{-1} \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{M}^T) \cdot \frac{\delta \mathbf{g}}{\delta t} + \mathbf{M}^T \cdot \frac{\delta \mathbf{F}}{\delta t} + \frac{1}{2} [(\mathbf{M}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{T})_\times \times \mathbf{P}]^T \cdot \frac{\delta \mathbf{P}}{\delta t}. \quad (3.4)$$

Из этого уравнения мы видим, что свободная энергия есть функция следующих аргументов

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}(\vartheta, \mathbf{g}, \mathbf{F}, \mathbf{P}). \quad (3.5)$$

Теперь приведенное уравнение баланса энергии можно переписать в виде

$$\left[\rho \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{g}} \right)^{\top} + \mathbf{g}^{-1} \cdot \mathbf{T}^{\top} + \mathbf{g}^{-1} \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{M}^{\top} \right] \cdot \cdot \frac{\delta}{\delta t} \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) + \left(\rho \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{F}} \right)^{\top} - \mathbf{M}^{\top} \right) \cdot \cdot \frac{\delta \mathbf{F}}{\delta t} + \rho \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \vartheta} + \mathcal{H} \right) \frac{\delta \vartheta}{\delta t} + \left[\rho \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{P}} \right) - \frac{1}{2} \left((\mathbf{M}^{\top} \cdot \mathbf{F} - \mathbf{T})_{\times} \times \mathbf{P} \right) \right]^{\top} \cdot \cdot \frac{\delta \mathbf{P}}{\delta t} = 0. \quad (3.6)$$

Поскольку эта линейная форма скоростей должна обращаться в нуль для любых процессов, могущих протекать в данной среде, причем на скорости не наложено никаких ограничений, то для выполнения (3.6) необходимо выполнение следующих условий, называемых соотношениями Коши–Грина

$$\mathcal{H} = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \vartheta}, \quad \mathbf{T}_e = -\rho \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{\top} - \rho \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{g}} \cdot \mathbf{g}^{\top}, \quad \mathbf{M}_e = \rho \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{F}}. \quad (3.7)$$

Что касается коэффициента при производной от тензора поворота, то он не обязан равняться нулю, т.к. компоненты тензора поворота не являются независимыми. Действительно, согласно модифицированному уравнению Пуассона (2.12) имеем ограничение на материальную производную от тензора поворота следующего вида

$$\frac{\delta \mathbf{P}(\mathbf{x}, t)}{\delta t} \cdot \mathbf{P}^{\top}(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t) \times \mathbf{E} \Rightarrow (\mathbf{A} \cdot \mathbf{P})^{\top} \cdot \cdot \frac{\delta \mathbf{P}(\mathbf{x}, t)}{\delta t} = 0, \quad \forall \mathbf{A} : \mathbf{A} = \mathbf{A}^{\top}. \quad (3.8)$$

Следовательно, для коэффициента при производной от тензора поворота должно выполняться равенство

$$\rho \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{P}} - \frac{1}{2} (\mathbf{M}_e^{\top} \cdot \mathbf{F} - \mathbf{T}_e)_{\times} \times \mathbf{P} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}, \quad \forall \mathbf{A} : \mathbf{A} = \mathbf{A}^{\top}.$$

Чтобы исключить отсюда произвольный симметричный тензор \mathbf{A} , необходимо умножить это уравнение на тензор \mathbf{P}^{\top} слева и вычислить векторные инварианты от обеих частей получившегося равенства. Результатом указанных операций будет следующее уравнение

$$\left[\rho \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{P}} \cdot \mathbf{P}^{\top} + \mathbf{M}_e^{\top} \cdot \mathbf{F} - \mathbf{T}_e \right]_{\times} = \mathbf{0} \Rightarrow \left[\rho \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{P}} \cdot \mathbf{P}^{\top} + \mathbf{M}_e^{\top} \cdot \mathbf{F} - \mathbf{T}_e \right] \cdot \cdot \mathbf{A} = 0, \quad (3.9)$$

которое должно выполняться для любого антисимметричного тензора \mathbf{A} . Поскольку тензоры силовых и моментных напряжений уже определены соотношениями Коши–Грина, то условие (3.9) налагает некоторые ограничения на задание свободной энергии. А именно свободная энергия должна удовлетворять следующему уравнению в частных производных первого порядка

$$\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{g}} \right)^{\top} \cdot \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{g}) + \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{P}} \right)^{\top} \cdot \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{P}) + \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{F}} \right)^{\top} \cdot \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{F} - \mathbf{F} \cdot \mathbf{A}) = 0 \quad (3.10)$$

где \mathbf{A} — произвольный кососимметричный тензор, так что фактически уравнение (3.10) эквивалентно трем независимым уравнениям. Таким образом, свободная энергия не может быть произвольной функцией аргументов $\mathbf{P}, \mathbf{g}, \mathbf{F}$. Характеристическая

система [23] для уравнения (3.10) имеет вид

$$\frac{d\mathbf{g}}{ds} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{g}, \quad \frac{d\mathbf{F}}{ds} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{F} - \mathbf{F} \cdot \mathbf{A}, \quad \frac{d\mathbf{P}}{ds} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}. \quad (3.11)$$

Получили систему уравнений 21-го порядка, которая имеет не более 20-и независимых интегралов. Однако нас интересуют только те интегралы, которые не зависят от антисимметричного тензора \mathbf{A} . Система (3.11) служит для определения мер деформации, от которых зависит свободная энергия и которые должны находиться как интегралы характеристической системы для уравнения (3.10). Аналогичная ситуация рассматривалась в работе [6], в которой показан метод отыскания мер деформации. В принципе, общие построения, относящиеся к обратимым свойствам среды, на данном этапе можно считать завершенными. Конкретное задание свободной энергии, удовлетворяющей уравнению (3.10), полностью определяет физические свойства среды с точностью до механизма диссипации энергии, который должен конструироваться отдельно. Дальнейшее изложение уже должно быть ориентировано на конкретные приложения к определенным типам сред. Однако прежде, чем переходить к рассмотрению конкретных сред, необходимо еще рассмотреть условия на разрывах.

4 Условия на разрывах

До сих пор все рассуждения относились к областям, внутри которых все рассматриваемые функции предполагались непрерывными и дифференцируемыми нужное число раз. Эксперименты показывают, что эти предположения выполняются далеко не всегда. Об этом свидетельствует, например, появление линий Людерса, демонстрирующих наличие плоскостей скольжения. Вместе с тем, те же эксперименты показывают, что линии Людерса образуют дискретную сетку. Это означает, что разрывы возникают на дискретном множестве поверхностей, вне которых все рассматриваемые функции можно считать непрерывными. Естественно считать, что все фундаментальные законы, записанные в интегральной форме, справедливы всюду. Только переход к локальной их записи требует существования непрерывности и непрерывной дифференцируемости. Допустим теперь, что область V содержит поверхность S_d , при переходе через которую рассматриваемые величины могут терпеть разрывы. Поверхность S_d делит область V на две V^+ и V^- так, что $V = V^+ \cup V^-$. Для каждой из этих областей можно записать фундаментальные законы, из которых и следуют условия на разрывах.

Закон сохранения частиц. Запишем законы сохранения частиц для всей области V и для обеих подобластей V^+ и V^- .

$$\frac{d}{dt} \int_{(V)} \rho(\mathbf{x}, t) dV = - \int_{(S)} \rho \mathbf{n} \cdot \mathbf{V} dS, \quad (4.1)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{(V^+)} \rho(\mathbf{x}, t) dV = - \int_{(S^+)} \rho \mathbf{n} \cdot \mathbf{V} dS - \int_{(S_d)} \rho \mathbf{n} \cdot \mathbf{V} dS, \quad (4.2)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{(V^-)} \rho(\mathbf{x}, t) dV = - \int_{(S^-)} \rho \mathbf{n} \cdot \mathbf{V} dS - \int_{(S_d)} \rho \mathbf{n} \cdot \mathbf{V} dS, \quad (4.3)$$

где единичный вектор \mathbf{n} есть вектор внешней нормали к соответствующей области. Складывая равенства (4.2) и (4.3) и учитывая (4.1), получаем

$$\int_{(S_d)} \mathbf{n} \cdot [\rho \mathbf{V}] dS = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{n} \cdot [\rho \mathbf{V}] = 0, \quad (4.4)$$

где, как обычно, квадратные скобки означают скачок величины, заключенной в скобках. Аналогично поступаем и с остальными фундаментальными законами.

Первый закон динамики Эйлера дает

$$\mathbf{n} \cdot [\mathbf{T}] = \rho \mathbf{n} \cdot \mathbf{V}[\mathfrak{m} \mathbf{V}], \quad (4.5)$$

где учтено условие (4.4).

Второй закон динамики Эйлера с учетом предыдущих условий на разрывах ведет к следующему условию

$$\mathbf{n} \cdot [\mathbf{M}] = \rho \mathbf{n} \cdot \mathbf{V}[\mathfrak{m} \mathbf{V} \times \mathbf{x} + \mathfrak{K}_2] = \rho \mathbf{n} \cdot \mathbf{V}[\mathfrak{J} \boldsymbol{\omega}_2]. \quad (4.6)$$

Здесь учтено выражение (2.46) для плотности кинетического момента.

Уравнение баланса энергии на поверхности разрыва принимает вид

$$\mathbf{n} \cdot [\mathfrak{h} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{V} + \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\omega}] = \rho \mathbf{n} \cdot \mathbf{V}[\mathfrak{K} + \mathfrak{U}]. \quad (4.7)$$

Полученные условия на разрывах показывают, что они сводятся к условиям непрерывности силовых и моментных напряжений когда на поверхности разрыва скоростей выполняется равенство

$$\mathbf{n} \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0, \quad (4.8)$$

т.е. отсутствует поток количества движения через поверхность разрыва. Обратим внимание, что в условия на разрывах входят полные тензоры силовых и моментных напряжений.

5 Неполярная сплошная среда с кулоновым трением

Сосредоточим свое внимание на пластических и сыпучих средах со слабо выраженной микроструктурой. В таком случае можно считать, что свободная энергия не зависит от тензора поворота и второй меры деформации \mathbf{F} , т.е. примем, что

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}(\vartheta, \mathbf{g}) \quad (5.1)$$

Соотношения Коши–Грина (3.7) принимают вид

$$\mathcal{H} = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \vartheta}, \quad \mathbf{T}_e = -\rho \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{g}} \cdot \mathbf{g}^T, \quad \mathbf{M}_e = \mathbf{0}. \quad (5.2)$$

Уравнение (3.10) в этом случае сводится к следующему

$$\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{g}} \right)^T \cdot \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{g}) = 0, \quad \forall \mathbf{A} : \mathbf{A} = -\mathbf{A}^T \quad \Rightarrow \quad \mathbf{T}_e = \mathbf{T}_e^T. \quad (5.3)$$

Дальнейший анализ проще продолжать не с этого момента, а вернувшись немного назад к уравнению баланса энергии (3.4), которое в данном случае принимает вид

$$\rho \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta t} + \rho \mathcal{H} \frac{\delta \vartheta}{\delta t} = - (\mathbf{g}^{-1} \cdot \mathbf{T}_e^T) \cdot \cdot \frac{\delta \mathbf{g}}{\delta t}. \quad (5.4)$$

Тензор напряжений представим в виде разложения

$$\mathbf{T}_e = -p \mathbf{E} + \boldsymbol{\tau}, \quad \boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}^T, \quad \text{tr } \boldsymbol{\tau} = 0. \quad (5.5)$$

Кроме того, комбинируя (2.27) и (2.23), получаем

$$\frac{1}{\rho} \frac{\delta \rho}{\delta t} = \mathbf{g}^{-1}(\mathbf{x}, t) \cdot \cdot \left(\frac{\delta}{\delta t} \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) \right). \quad (5.6)$$

Подставляя (5.5) в (5.4) и учитывая (5.6), приходим к равенству

$$\rho \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta t} + \rho \mathcal{H} \frac{\delta \vartheta}{\delta t} = \frac{p + \lambda}{\rho} \frac{\delta \rho}{\delta t} - (\lambda \mathbf{g}^{-1} + \mathbf{g}^{-1} \cdot \boldsymbol{\tau}^T) \cdot \cdot \frac{\delta \mathbf{g}}{\delta t}. \quad (5.7)$$

Свободную энергию будем считать функцией трех аргументов $\vartheta, \rho, \mathbf{g}$, между которыми имеется связь (5.6), учитываемая множителем Лагранжа λ . Из (5.7) получаем следующие соотношения Коши–Грина

$$\mathcal{H} = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \vartheta}, \quad p + \lambda = \rho^2 \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \rho}, \quad \lambda \mathbf{E} + \boldsymbol{\tau} = -\rho \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{g}} \cdot \mathbf{g}^T. \quad (5.8)$$

Симметричность тензора $\boldsymbol{\tau}$ и требование $\lambda = 0$ приводят к следующим ограничениям, налагаемым на свободную энергию

$$\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{g}} \right)^T \cdot \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{g}) = 0, \quad \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{g}} \right)^T \cdot \cdot \mathbf{g} = 0, \quad \forall \mathbf{A} : \mathbf{A} = -\mathbf{A}^T \quad (5.9)$$

Для свободной энергии получили два уравнения в частных производных первого порядка. Характеристическая система [23] для первого из этих уравнений имеет вид

$$\frac{d\mathbf{g}}{ds} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{g}, \quad (5.10)$$

Эта система определена в девятимерном пространстве тензоров второго ранга. Уравнение (5.3) показывает, что свободная энергия постоянна вдоль интегральной кривой уравнения (5.10). Иными словами, свободная энергия есть интеграл системы (5.10) девятого порядка, для которой существует не более восьми независимых интегралов. Однако нас интересуют только те интегралы, которые не зависят от произвольно выбираемого тензора \mathbf{A} . Таких интегралов шесть, и их нетрудно найти. Для этого достаточно умножить обе части уравнения (5.10) на тензор \mathbf{g}^T слева. В результате получим

$$\mathbf{g}^T \cdot \frac{d\mathbf{g}}{ds} = \mathbf{g}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{g} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\mathbf{g}^T}{ds} \cdot \mathbf{g} = -\mathbf{g}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{g}. \quad (5.11)$$

Складывая получившиеся уравнения, находим шесть скалярных интегралов уравнения (5.10) или один тензорный интеграл

$$\frac{d\mathbf{G}_*}{ds} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{G}_* = \mathbf{g}^T \cdot \mathbf{g} \Rightarrow \mathcal{F} = \mathcal{F}(\rho, \mathbf{G}_*, \vartheta). \quad (5.12)$$

Тензор \mathbf{G}_* хорошо известен в литературе по нелинейной теории упругости [5]. Он является обратным для меры деформации Коши–Грина, но редко используется в теории определяющих уравнений. Таким образом, если свободная энергия задана как произвольная функция тензора \mathbf{G}_* , то она тождественно удовлетворяет первому из условий (5.9). Для выполнения второго из условий (5.9) необходимо, чтобы выполнялось следующее условие

$$\mathbf{g} \cdot \cdot \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{g}} \right)^T = 0 \Rightarrow \mathbf{G}_* \cdot \cdot \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{G}_*} \right)^T = 0. \quad (5.13)$$

Характеристическая система для второго из этих уравнений имеет вид первого из уравнений

$$\frac{d\mathbf{G}_*}{ds} = \mathbf{G}_* \Rightarrow \frac{d\mathbf{G}_*^m}{ds} = m \mathbf{G}_*^m, \quad (5.14)$$

где m есть любое целое число. Это система шестого порядка, которая имеет не более пяти независимых интегралов. Нетрудно убедиться, что общим интегралом системы (5.14) является унимодулярный тензор

$$\mathbf{G} = I_3^{-1/3}(\mathbf{G}_*) \mathbf{G}_*, \quad I_3(\mathbf{A}) \equiv \frac{1}{6}(\text{tr} \mathbf{A})^3 - \frac{1}{2}(\text{tr} \mathbf{A}) \text{tr} \mathbf{A}^2 + \frac{1}{3} \text{tr} \mathbf{A}^3 \equiv \det(\mathbf{A}), \quad I_3(\mathbf{G}) = 1. \quad (5.15)$$

Тензор, аналогичный тензору \mathbf{G} , но построенный для тензора Альманзи \mathbf{A} , В.А. Пальмов [10, 11] называет тензором формоизменения. Чтобы убедиться, что тензор \mathbf{G} действительно является интегралом системы, т.е.

$$\frac{d\mathbf{G}}{ds} = \mathbf{0} \Rightarrow \frac{d\mathbf{G}^m}{ds} = \mathbf{0},$$

достаточно воспользоваться представлением (5.15) для тензора \mathbf{G} и вторым из уравнений (5.14). Окончательно получили, что свободная энергия имеет вид функции

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}(\rho, \mathbf{G}, \vartheta), \quad (5.16)$$

где уже все аргументы независимы. Определяющие уравнения (3.7) теперь принимают вид

$$\mathcal{H} = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \vartheta}, \quad p = \rho^2 \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \rho}, \quad \boldsymbol{\tau} = \frac{2}{3} \rho \left(\mathbf{G} \cdot \cdot \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{G}} \right) \mathbf{E} - 2 \rho I_3^{-2/3}(\mathbf{g}) \mathbf{g} \cdot \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{G}} \cdot \mathbf{g}^T. \quad (5.17)$$

Этим соотношениям, с учетом обозначения (2.37) можно придать вид

$$\mathcal{H} = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \vartheta}, \quad p = -\frac{\partial \rho_0 \mathcal{F}}{\partial \zeta}, \quad \zeta \boldsymbol{\tau} = \frac{2}{3} \left(\mathbf{G} \cdot \cdot \frac{\partial \rho_0 \mathcal{F}}{\partial \mathbf{G}} \right) \mathbf{E} - 2 I_3^{-2/3}(\mathbf{g}) \mathbf{g} \cdot \frac{\partial \rho_0 \mathcal{F}}{\partial \mathbf{G}} \cdot \mathbf{g}^T, \quad (5.18)$$

где свободная энергия считается функцией аргументов ϑ , ζ , \mathbf{G} . Соотношениями (5.17) и (5.18) заканчивается определение упругих напряжений. Дальнейшая конкретизация требует задания свободной энергии. Об этом речь пойдет ниже, но уже сейчас необходимо подчеркнуть, что все пластические свойства материала заключены в задании свободной энергии.

Обратимся к обсуждению тензоров вязких напряжений, которые отвечают исключительно за механизмы диссипации энергии в материале. Следует подчеркнуть, что пластичность материала — это его фундаментальное свойство, которое не исчезает даже в том случае, если диссипация энергии в материале отсутствует. Поэтому роль вязких напряжений на самом деле не слишком значительна. Исключение, возможно, составляют сыпучие среды, в которых, по мнению многих авторов, важную роль играет сухое трение между частицами среды. Убедительных способов введения сухого трения в механику сплошных сред в настоящее время не предложено, хотя этому посвящено большое число публикаций, обзор которых выходит за рамки данной работы. Обычно считается, что вязкое трение зависит от градиента вектора скорости. Так обстоит дело, например, в ньютоновской жидкости, материале Максвелла [12] и наиболее популярных теориях пластичности [10, 11]. Использование подобного допущения позволяет, по всей вероятности, получать результаты, приемлемые с практической точки зрения. Анализ роли вязких напряжений оставим за рамками данной работы и ограничимся введением только сухого трения. Примем допущение, что тензоры вязких напряжений можно представить в следующем простейшем виде

$$\mathbf{T}_i = \mathbf{E} \times \mathbf{t}, \quad \mathbf{M}_i = \mathbf{0}. \quad (5.19)$$

При этих допущениях неравенство (2.64) принимает вид

$$\rho \delta \equiv \mathbf{T}_i^T \cdot \cdot (\nabla \mathbf{V} + \mathbf{E} \times \boldsymbol{\omega}) \equiv -2\mathbf{t} \cdot \left(\boldsymbol{\omega} - \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{V} \right) \geq 0. \quad (5.20)$$

Для вектора напряжений \mathbf{t} считаем, что справедлив закон сухого трения Кулона

$$\mathbf{t} = -k |\mathbf{n} \cdot \mathbf{T}_e \cdot \mathbf{n}| \sigma(\mathbf{n} \cdot \mathbf{T}_e \cdot \mathbf{n}) \frac{(2\boldsymbol{\omega} - \nabla \times \mathbf{V})}{|2\boldsymbol{\omega} - \nabla \times \mathbf{V}|}, \quad \boldsymbol{\omega} \neq \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{V}, \quad (5.21)$$

где $k > 0$ — коэффициент трения, который является характеристикой материала; характеристическая функция σ определяется выражением

$$\sigma(\mathbf{n} \cdot \mathbf{T}_e \cdot \mathbf{n}) = \begin{cases} 1, & \mathbf{n} \cdot \mathbf{T}_e \cdot \mathbf{n} < 0, \\ 0, & \mathbf{n} \cdot \mathbf{T}_e \cdot \mathbf{n} \geq 0. \end{cases} \quad (5.22)$$

Единичный вектор \mathbf{n} в выражении (5.21) находится по тензору \mathbf{T}_e из решения задачи

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{T}_e \cdot \mathbf{m} = \max, \quad \forall \mathbf{n}, \mathbf{m}: |\mathbf{n}| = |\mathbf{m}| = 1, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{m} = 0. \quad (5.23)$$

Покажем, что решение задачи (5.23) единственно, если оно, конечно, существует. В самом деле, рассмотрим функционал

$$\mathcal{J} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{T}_e \cdot \mathbf{m} + \lambda_1 \mathbf{n} \cdot \mathbf{m} + \lambda_2 (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} - 1) + \lambda_3 (\mathbf{m} \cdot \mathbf{m} - 1), \quad (5.24)$$

где параметры $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ суть множители Лагранжа. Обращение в нуль первой вариации этого функционала дает уравнения

$$\mathbf{T}_e \cdot \mathbf{m} = -\lambda_1 \mathbf{m} - 2\lambda_2 \mathbf{n}, \quad \mathbf{T}_e \cdot \mathbf{n} = -\lambda_1 \mathbf{n} - 2\lambda_3 \mathbf{m}. \quad (5.25)$$

Из уравнений (5.25) следуют условия

$$2\lambda_2 = 2\lambda_3 = -\mathbf{n} \cdot \mathbf{T}_e \cdot \mathbf{m}, \quad -\lambda_1 = \mathbf{n} \cdot \mathbf{T}_e \cdot \mathbf{n} = \mathbf{m} \cdot \mathbf{T}_e \cdot \mathbf{m}. \quad (5.26)$$

При этом система (5.25) может быть переписана в эквивалентной форме

$$\mathbf{T}_e \cdot (\mathbf{m} - \mathbf{n}) = (2\lambda_2 - \lambda_1)(\mathbf{m} - \mathbf{n}), \quad \mathbf{T}_e \cdot (\mathbf{m} + \mathbf{n}) = -(2\lambda_2 + \lambda_1)(\mathbf{m} + \mathbf{n}). \quad (5.27)$$

Отсюда видим, что векторы $\mathbf{m} - \mathbf{n}$ и $\mathbf{m} + \mathbf{n}$ являются собственными векторами симметричного тензора \mathbf{T}_e . Пусть вектор $\mathbf{m} - \mathbf{n}$ соответствует собственному числу σ_i тензора \mathbf{T}_e , а вектор $\mathbf{m} + \mathbf{n}$ соответствует собственному числу σ_j . Тогда имеем

$$(2\lambda_2 - \lambda_1) = \sigma_i, \quad \mathbf{m} - \mathbf{n} = \sqrt{2}\mathbf{e}_i, \quad -2\lambda_2 - \lambda_1 = \sigma_j, \quad \mathbf{m} + \mathbf{n} = \sqrt{2}\mathbf{e}_j \quad \Rightarrow \\ \sqrt{2}\mathbf{n} = \mathbf{e}_j - \mathbf{e}_i, \quad \sqrt{2}\mathbf{m} = \mathbf{e}_j + \mathbf{e}_i, \quad (5.28)$$

где векторы \mathbf{e}_i и \mathbf{e}_j суть собственные векторы тензора напряжений. Функционал (5.24) теперь принимает вид

$$\mathcal{J} = \frac{1}{2}(\mathbf{e}_j + \mathbf{e}_i) \cdot \mathbf{T}_e \cdot (\mathbf{e}_j - \mathbf{e}_i) = \frac{1}{2}(\sigma_j - \sigma_i). \quad (5.29)$$

Функционал принимает наибольшее значение, если σ_j является наибольшим собственным числом, а σ_i — наименьшим. Если эти собственные числа совпадают, то решением рассматриваемой задачи является произвольная пара ортогональных векторов, а все касательные напряжения обращаются в нуль. Нетрудно убедиться, что второе из условий (5.26) выполняется тождественно

$$-\lambda_1 = \mathbf{n} \cdot \mathbf{T}_e \cdot \mathbf{n} = \mathbf{m} \cdot \mathbf{T}_e \cdot \mathbf{m} = \frac{1}{2}(\sigma_i + \sigma_j).$$

Сказанное выше относилось к случаю скольжения. Если проскальзывание отсутствует, т.е. если выполняется условие

$$2\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{V}, \quad (5.30)$$

то вектор \mathbf{t} находится из уравнений движения, а точнее по второму закону динамики

$$-2\mathbf{t} = \rho J \frac{\delta}{\delta \mathbf{t}} \boldsymbol{\omega} = \rho J \left(\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} + \mathbf{V} \cdot \nabla \boldsymbol{\omega} \right) = \frac{1}{2} \rho J \left(\nabla \times \frac{d\mathbf{V}}{dt} + \mathbf{V} \cdot \nabla \nabla \times \mathbf{V} \right). \quad (5.31)$$

Используя это соотношение, вектор \mathbf{t} можно исключить из первого закона динамики.

6 О задании свободной энергии

Рассмотренные до сих пор построения носили достаточно общий характер и, по существу, не являются новыми. Их даже можно назвать стандартными, поскольку в той или иной форме они представлены в существующих монографиях, не говоря уже о статьях. Тем не менее, один новый элемент в этих построениях все-таки содержится. Он заключается в том, что до сих пор не принималось никаких предположений о свойствах среды, помимо допущений локальной сплошности. Поэтому все сказанное выше применимо для описания неупругих и, в частности, пластических и сыпучих сред. Ранее неоднократно высказывалась точка зрения [25], что неупругие среды на этапе нагружения ведут себя вполне аналогично нелинейно упругим телам, отличаясь от них только на этапе разгрузки. Выше было показано, что полная аналогия с нелинейной теорией упругости должна иметь место во всех случаях. Вместе с тем, неконкретизированной у нас осталась только свободная энергия. Следовательно, именно в ней должна содержаться вся информация о свойствах среды. Таким образом, именно задание конкретного вида свободной энергии полностью определяет все свойства среды. В этом смысле позиция в данной статье в общем совпадает с позицией, принятой в физике и описанной, например, в [26]. О современном состоянии вопроса можно получить представление по статье [27], где можно найти ссылки на другие работы по данной тематике. Однако, по мнению автора, подход, изложенный в [26, 27], не позволяет в полной мере описать уравнения состояния твердых тел. Действительно, различие между жидкостями и твердыми телами заключается, главным образом, в их реакции на изменение формы. Описать эту реакцию посредством манипуляций с параметрами порядка, игнорируя при этом девиатор тензора напряжений, автору представляется совершенно невозможным. Без учета девиатора тензора напряжений можно описать только различие между жидкостями и газами. Вернувшись к механике сплошных сред, заметим, что, при классическом подходе к описанию пластических материалов, центральную роль играет так называемый критерий текучести, т.е. некое условие, налагаемое на девиатор тензора напряжений. Из критерия текучести следует так называемый ассоциативный закон течения. Поскольку тензор напряжения выражается через производные от свободной энергии, то все эти условия должны налагаться на свободную энергию, однако это обстоятельство никогда не принималось во внимание. К сожалению, конкретные виды свободной энергии известны и изучены только для нескольких разновидностей упругих материалов. Поэтому анализ возможных форм задания свободной энергии целесообразно начать с частных случаев. Прежде всего, примем, что материал является изотропным. Это означает, что свободная энергия зависит только от инвариантов тензора \mathbf{G}

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}(\vartheta, \rho, I_1, I_2), \quad I_1(\mathbf{G}) \equiv \mathbf{E} \cdot \cdot \mathbf{G}, \quad I_2(\mathbf{G}) \equiv \mathbf{G} \cdot \cdot \mathbf{G}. \quad (6.1)$$

Подставляя эти представления в соотношения Коши–Грина (5.18), получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \vartheta}, \quad p = -\frac{\partial \rho_0 \mathcal{F}}{\partial \zeta}, \quad \zeta \boldsymbol{\tau} = \frac{2}{3} \left(I_1 \frac{\partial \rho_0 \mathcal{F}}{\partial I_1} + I_2 \frac{\partial \rho_0 \mathcal{F}}{\partial I_2} \right) \mathbf{E} - \\ 2 \left(\frac{\partial \rho_0 \mathcal{F}}{\partial I_1} \boldsymbol{\Lambda} + \frac{\partial \rho_0 \mathcal{F}}{\partial I_2} \boldsymbol{\Lambda}^2 \right), \quad \boldsymbol{\Lambda} = I_3^{-2/3}(\mathbf{g}) \mathbf{g} \cdot \mathbf{g}^T, \end{aligned} \quad (6.2)$$

где тензор $\mathbf{\Lambda}$ есть тензор формоизменения, отвечающей мере деформации Альманзи [10, 11]. Поскольку материал изотропен, то собственные векторы тензора напряжений и меры Альманзи совпадают. Инварианты тензора формоизменения Альманзи связаны с его собственными числами следующими зависимостями

$$I_1(\mathbf{G}) = I_1(\mathbf{\Lambda}) = \Lambda_i + \Lambda_j + \frac{1}{\Lambda_i \Lambda_j}, \quad I_2(\mathbf{G}) = I_2(\mathbf{\Lambda}) = \Lambda_i^2 + \Lambda_j^2 + \frac{1}{\Lambda_i^2 \Lambda_j^2}. \quad (6.3)$$

Чтобы упростить ход дальнейших рассуждений, рассмотрим специальный вид деформации материала в виде сплошного шара. Примем, что справедливы соотношения

$$\mathbf{u} = -\lambda \mathbf{r} \mathbf{e}_r \Rightarrow \mathbf{g} = (1 + \lambda) \mathbf{E}, \quad \mathbf{\Lambda} = \mathbf{E}, \quad \mathbf{G} = \mathbf{E} \quad (6.4)$$

где $\lambda = \text{const}$. Величина λ положительна при сжатии. В таком случае, соотношения Коши–Грина (6.2) заметно упрощаются

$$\mathcal{H} = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \vartheta}, \quad \mathbf{p} = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \zeta}, \quad \boldsymbol{\tau} = \mathbf{0}, \quad \rho_0 \mathcal{F}(\zeta, \vartheta, \mathbf{E}) \equiv f(\zeta, \vartheta). \quad (6.5)$$

Таким образом, для рассматриваемого типа деформации свободная энергия зависит всего от двух переменных. То же самое можно сказать и о давлении, для которого, вероятно, вполне приемлема следующая, линейная по температуре, аппроксимация

$$p(\zeta, \vartheta) = f_1(\zeta) + f_2(\zeta) \vartheta. \quad (6.6)$$

Вполне вероятно, что в дальнейшем понадобятся и более сложные зависимости от температуры. Однако интуитивно кажется ясным, что для качественных рассмотрения аппроксимация (6.6) вполне приемлема. Во всяком случае, именно такой вид имеют наиболее популярные в физике уравнения состояния Ван-дер-Ваальса и Ми-Грюнайзена. В частности, уравнение Ван-дер-Ваальса в принятых обозначениях имеет вид

$$p(\zeta, \vartheta) = -\frac{a}{\zeta^2} + \frac{c \vartheta}{\zeta - b}, \quad (6.7)$$

где a , b и c суть постоянные материала. Известно, что уравнение Ван-дер-Ваальса хорошо описывает поведение реальных газов. Интуитивно кажется очевидным, что уравнение (6.6) при соответствующем выборе функций f_1 и f_2 должно хорошо описывать не только газы и жидкости, но и твердые тела с фазовыми переходами. Качественно функция $f_1(\zeta)$, которая, с формальной точки зрения, описывает давление при нулевой температуре $\vartheta = 0$, представлена на Рис.1. Напомним, что давление считается положительным при сжатии. Представленная на Рис.1 зависимость характерна для материалов, упрочняющихся как при сжатии, так и при растяжении. Сплошной линией на диаграмме представлены участки устойчивого деформирования. Пунктирная линия соответствует участкам неустойчивого деформирования, причем на этих участках отсутствуют положения статического равновесия. Кружочками на диаграмме обозначены положения устойчивого равновесия материала при нулевом давлении. Число устойчивых равновесных положений определяется не только свойствами материала, но и размерами образца. Например, при увеличении радиуса сжимаемого шара число устойчивых равновесных положений будет, вообще говоря, возрастать. Число

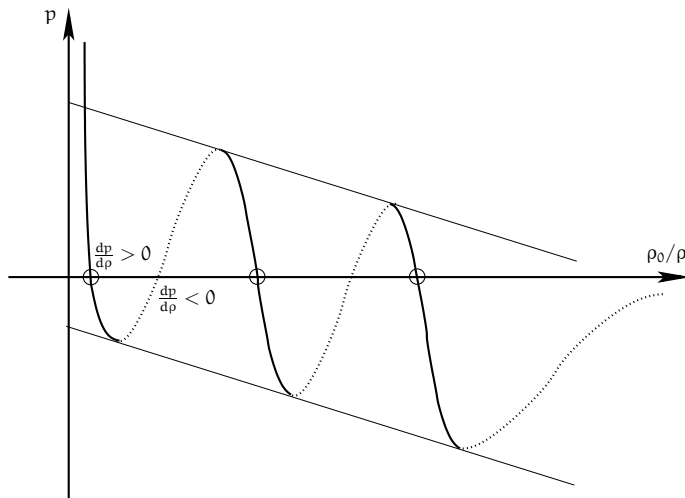


Рис. 1: Определяющее уравнение для давления при нулевой температуре

устойчивых равновесных положений сильно зависит и от свойств материала. Например, для тонких порошков и грунтов число устойчивых равновесных положений очень велико. Рассмотрим изотермическое нагружение шара давлением. Допустим, что в исходном состоянии плотность материала соответствовала крайнему правому кружочку на диаграмме. Начнем теперь медленно увеличивать давление. При этом шар будет квазистатически сжиматься, и мы будем двигаться от правого крайнего кружочка влево-вверх по сплошной линии диаграммы. Когда давление достигнет первой критической величины, соответствующей локальному максимуму диаграммы, квазиравновесное деформирование становится невозможным, а в материале начинается структурная перестройка, сопровождающаяся быстрым самопроизвольным увеличением плотности при почти постоянном давлении. Это будет продолжаться до тех пор, пока мы снова не попадем на сплошную линию. При дальнейшем медленном увеличении давления плотность будет медленно (квазистатически) возрастать, пока не будет достигнут следующий локальный максимум. Если, не достигнув второго локального максимума, мы начнем снижать давление до нуля, то попадем в средний кружочек на диаграмме, который соответствует устойчивому состоянию материала с повышенной плотностью. Иными словами, происходит пластическое деформирование шара. Весь описанный процесс отчетливо наблюдался в опытах Бриджмена [8]. Если теперь начать процесс растяжения шара, т.е. начать прикладывать отрицательное давление, то от среднего кружочка мы начнем двигаться по сплошной линии диаграммы вправо-вниз, при этом будет идти процесс квазистатического растяжения

шара. Когда мы достигнем локального минимума, то происходит срыв и начинается самопроизвольное уменьшение плотности материала при почти постоянном давлении. Если материал обладает свойством упрочнения (как это имеет место на изображенной диаграмме), то мы вновь попадем на участок устойчивого растяжения. При дальнейшем увеличении растягивающего давления, мы достигнем крайнего правого локального минимума, в котором произойдет разрушение шара. Следует подчеркнуть, что учет конечности прочности материала на разрыв строго обязателен для определяющих уравнений реальных материалов. Кроме того, обратим внимание на тот факт, что в точках локальных минимумов и максимумов происходит нарушение условий так называемой сильной эллиптичности. Разумеется, нарушаются и постулаты типа популярного постулата Драккера. С математической точки зрения это, конечно, неприятно, но так уж устроена природа вещей. Легко понять, что зависимости, типа указанных на Рис.1, принципиально не могут быть найдены из эксперимента. Однако огибающие истинной диаграммы могут быть установлены и фактически определяются на основе эксперимента. Причем верхняя огибающая описывает свойства материала при сжатии, а нижняя огибающая описывает прочность материала на разрыв. Одним из простейших представителей определяющего уравнения для материала с конечной прочностью на разрыв является уравнение вида

$$f_1(\zeta) = f_0 (\zeta^{-m} - \zeta^{-n}), \quad m > n. \quad (6.8)$$

Что касается функции f_2 , то, видимо, ее допустимо принять в той же форме, что и в уравнении Ван-дер-Ваальса. Это возможно, по крайней мере, при качественных рассмотрениях. Достаточно общий вид определяющего уравнения для давления дается следующим выражением

$$p = \sum_{k=0}^N a_k \zeta^{-k} + \frac{c \vartheta}{\zeta - b}, \quad (6.9)$$

где параметры (a_k, N, c, b) суть характеристики материала. Одним из простейших является следующее определяющее уравнение

$$p = f_0 (\zeta^{-m} - \zeta^{-n}) + \frac{c \vartheta}{\zeta - b}, \quad m > n, \quad \zeta > b. \quad (6.10)$$

Это уравнение содержит пять параметров (f_0, m, n, c, b) , которые позволяют описать достаточно широкие классы материалов, но, конечно, уравнение (6.10) не является универсальным. Нетрудно построить фазовые диаграммы, отвечающие уравнению (6.10), при различных значениях температуры. Примерный вид зависимостей давления от плотности при некоторых значениях температуры представлены на Рис.2, где приняты значения $m = 5, n = 3$. Жирные кривые разделяют различные фазы материала. Ниже нижней жирной линии материал находится в твердой фазе. Между жирными кривыми материал находится в жидкой фазе. Выше верхней жирной линии материал находится в газообразной фазе.

При нулевой температуре⁷ среда находится в твердой фазе, плотность которой при нулевом давлении равна $\zeta = 1$ или $\rho = \rho_0$. При температуре $\vartheta = \vartheta_f$, которую можно

⁷Разумеется, наши рассуждения не принимают во внимание квантовые эффекты.

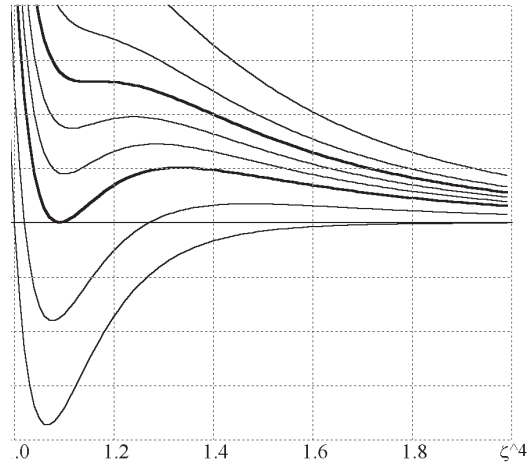


Рис. 2: На рисунке разные кривые отвечают разным температурам: чем выше температура, тем выше расположена кривая.

назвать температурой плавления, среда может находиться в двух фазах: твердой и жидкой. Температура плавления находится из решения системы уравнений

$$f_0(\zeta_f^{-m} - \zeta_f^{-n}) + \frac{c \vartheta_f}{\zeta_f - b} = 0, \quad f_0(-m \zeta_f^{-m-1} + n \zeta_f^{-n-1}) = \frac{c \vartheta_f}{(\zeta_f - b)^2}, \quad (6.11)$$

где ζ_f отвечает плотности среды при температуре плавления. Поскольку величины ϑ_f и ζ_f являются характеристиками материала, то систему (6.11) можно использовать для определения параметров среды. Выше температуры плавления, но ниже критической температуры ϑ_c , среда может находиться только в двух фазах: жидкой и газообразной. При этом нулевое давление в среде возможно только при нулевой плотности среды $\zeta = \infty$. Критическая температура ϑ_c находится из решения системы уравнений

$$f_0(-m \zeta_c^{-m-1} + n \zeta_c^{-n-1}) = \frac{c \vartheta_c}{(\zeta_c - b)^2},$$

$$f_0(m(m+1) \zeta_c^{-m-1} - n(n+1) \zeta_c^{-n-1}) = -\frac{2c \vartheta_c}{(\zeta_c - b)^3}.$$

Эту систему также можно использовать для определения параметров среды, если известна ее критическая температура. При температурах выше критической $\vartheta > \vartheta_c$ материал ведет себя подобно газу. Мы опускаем дальнейшее обсуждение фазовых диаграмм, поскольку оно достаточно стандартно, хотя сами фазовые диаграммы для уравнения типа (6.10) ранее, видимо, не встречались. Уравнение (6.10) соответствует двухфазной среде. В более общем случае коэффициенты уравнения (6.9) должны подбираться так, чтобы уравнение состояния имело вид, представленный на Рис.3 Согласно (6.5) и (6.10) для свободной энергии получаем равенство

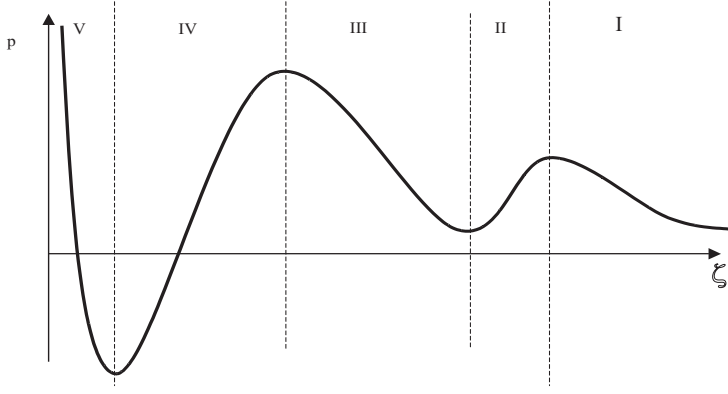


Рис. 3: Определяющее уравнение для трехфазной среды: зоны I, III, V соответствуют устойчивым газовой, жидкой и твердой фазам соответственно; зоны II, IV отвечают метастабильным состояниям

$$f = \rho_0 \mathcal{F}(\zeta, \vartheta, \mathbf{E}) = f_0 \left(\frac{\zeta^{-m+1}}{m-1} - \frac{\zeta^{-n+1}}{n-1} \right) - c \vartheta \ln(\zeta - b) + \psi(\vartheta), \quad m > n, \quad \zeta > b, \quad (6.12)$$

где $\psi(\vartheta)$ есть подлежащая определению функция температуры. Таким образом, часть свободной энергии, отвечающая шаровой части тензора напряжений, построена. Теперь необходимо найти часть свободной энергии, соответствующую девиатору тензора напряжений. Свободную энергию представим в виде суперпозиции двух частей

$$\rho_0 \mathcal{F}(\zeta, \vartheta, \mathbf{G}) = \rho_0 \mathcal{F}(\zeta, \vartheta, \mathbf{E}) + \rho_0 \mathcal{F}_d(\zeta, \vartheta, I_1, I_2), \quad \mathcal{F}_d(\zeta, \vartheta, 3, 3) = 0, \quad (6.13)$$

где первое слагаемое в правой части определено выражением (6.12), причем оно не влияет на девиатор тензора напряжений. Второе слагаемое в (6.13) определяет девиатор тензора напряжений. Эта часть свободной энергии отлична от нуля только для твердой фазы материала. Теперь соотношения Коши–Грина (6.2) принимают вид

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \vartheta}, \quad p = -\frac{\partial \rho_0 \mathcal{F}}{\partial \zeta}, \quad \zeta \boldsymbol{\tau} = \frac{2}{3} \left(I_1 \frac{\partial \rho_0 \mathcal{F}_d}{\partial I_1} + I_2 \frac{\partial \rho_0 \mathcal{F}_d}{\partial I_2} \right) \mathbf{E} - \\ 2 \left(\frac{\partial \rho_0 \mathcal{F}_d}{\partial I_1} \boldsymbol{\Lambda} + \frac{\partial \rho_0 \mathcal{F}_d}{\partial I_2} \boldsymbol{\Lambda}^2 \right), \quad \boldsymbol{\Lambda} = I_3^{-2/3} (\mathbf{g}) \mathbf{g} \cdot \mathbf{g}^T. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Понятно, что при температурах выше точки плавления материала функция $\rho_0 \mathcal{F}_d$ должна обращаться в нуль. Вычислим максимальное касательное напряжение в материале. Пусть σ_j соответствует наибольшему главному напряжению, а σ_i есть наименьшее главное напряжение. Пусть τ_j и τ_i суть соответствующие главные значения девиатора тензора напряжений. Тогда имеем

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_j - \sigma_i}{2} = \frac{\tau_j - \tau_i}{2} = \frac{(\Lambda_i - \Lambda_j)}{\zeta} \left(\frac{\partial \rho_0 \mathcal{F}_d}{\partial I_1} + (\Lambda_i + \Lambda_j) \frac{\partial \rho_0 \mathcal{F}_d}{\partial I_2} \right) \quad (6.15)$$

В любом твердом теле касательное напряжение имеет верхнюю границу α , которая зависит от температуры и плотности

$$\alpha = \tau_p(\zeta) \left(1 - \frac{\vartheta}{\vartheta_f}\right), \quad \vartheta \leq \vartheta_f; \quad \alpha = 0, \quad \vartheta \geq \vartheta_f, \quad (6.16)$$

где $\tau_p(\zeta)$ есть предельное касательное напряжение при нулевой температуре. Таким образом, получаем двухстороннее неравенство

$$0 \leq \frac{(\Lambda_i - \Lambda_j)}{\zeta} \left(\frac{\partial \rho_0 \mathcal{F}_d}{\partial I_1} + (\Lambda_i + \Lambda_j) \frac{\partial \rho_0 \mathcal{F}_d}{\partial I_2} \right) \leq \tau_p(\zeta) \left(1 - \frac{\vartheta}{\vartheta_f}\right), \quad \vartheta \leq \vartheta_f. \quad (6.17)$$

При температуре выше точки плавления функция $\rho_0 \mathcal{F}_d$ обращается в нуль. Введем обозначение

$$\rho_0 \mathcal{F}_d = \zeta \tau_p(\zeta) \left(1 - \frac{\vartheta}{\vartheta_f}\right) \mathcal{T}. \quad (6.18)$$

Тогда предыдущее неравенство принимает вид

$$0 \leq (\Lambda_i - \Lambda_j) \left(\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial I_1} + (\Lambda_i + \Lambda_j) \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial I_2} \right) \leq 1, \quad \vartheta < \vartheta_f. \quad (6.19)$$

где функция \mathcal{T} не зависит от температуры. При достижении максимальным касательным напряжением верхней границы, тело переходит в состояние текучести или разрушается в результате деформации скольжения. Условие текучести имеет вид

$$(\Lambda_i - \Lambda_j) \left(\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial I_1} + (\Lambda_i + \Lambda_j) \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial I_2} \right) = 1. \quad (6.20)$$

Функция $\mathcal{T}(\Lambda_j, \Lambda_i)$, вообще говоря, зависит от двух переменных (Λ_j, Λ_i) . Условие (6.20) показывает, что на поверхности текучести она становится функцией только одной переменной. Чтобы найти эту переменную, необходимо найти общее решение уравнения в частных производных первого порядка (6.20). В результате пришли к чисто математической задаче о нахождении класса функций, тождественно удовлетворяющих условиям (6.19) и (6.20). Общее решение этой задачи в настоящее время не известно. Не исключено, однако, что в решении этой задачи нет необходимости. Условия (6.19) и (6.20) появились в результате нашего желания удовлетворить одному из утверждений А. Треска, использованному впоследствии Сен-Венаном. Но, как отмечает Дж. Белл [8] (стр. 32) фактически это утверждение до сих пор остается предположением, а не экспериментально доказанным фактом. Возможно, что условия (6.19) и (6.20) не обусловлены априорными требованиями, а являются следствием решения краевых задач теории неупругих сред. Поэтому ниже будет использовано выражение для энергии формообразования, которое тождественно не удовлетворяет условиям (6.19) и (6.20).

Выпишем теперь полное уравнение для давления

$$p = f_0 (\zeta^{-m} - \zeta^{-n}) + \frac{c \vartheta}{\zeta - b} - \frac{\partial \rho_0 \mathcal{F}_d}{\partial \zeta}, \quad m > n, \quad \zeta > b > 0. \quad (6.21)$$

Последнее слагаемое в этой формуле определяет влияние энергии формоизменения на давление. Только для жидкости и газа это слагаемое обращается в нуль. Поэтому уравнение состояния для твердых тел нельзя свести к уравнению относительно трех переменных (давлению, плотности и температуре), как это пытаются сделать в физике. Введение параметров порядка не может улучшить ситуацию, поскольку фундаментальные законы ничего не знают об их существовании. Таким образом, в общем случае деформирования твердого тела давление зависит от энергии формоизменения, причем влияние последней может оказаться весьма существенным, поскольку оно может снизить критические значения давления, при которых нарушаются условия сильной эллиптичности. Кроме того, последние могут нарушаться раньше, чем давления достигнут критического значения. В настоящее время математическая сторона обсуждаемого вопроса еще не исследована.

7 К теории безмоментной несимметричной среды с кулоновым трением

Выше была рассмотрена среда, тензор обратимых напряжений в которой симметричен. Интуитивно кажется вполне вероятным, что имеет смысл рассмотреть случай среды с несимметричным тензором обратимых напряжений, в которой тензор моментных напряжений отсутствует. Особенно это может оказаться важным при наличии сухого трения между частицами, поскольку в таком случае есть возможность дать более простую в применениях формулировку закона сухого трения. К сожалению, подробное обсуждение возникающих здесь особенностей выходит за рамки данной работы. Ограничимся поэтому только первым шагом. Примем, что свободная энергия есть функция вида

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}(\zeta, \vartheta, \mathbf{g}, \mathbf{P}). \quad (7.1)$$

Тогда соотношения Коши-Грина (3.7) примут вид

$$\mathcal{H} = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \vartheta}, \quad \mathbf{T}_e = -\rho \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{g}} \cdot \mathbf{g}^T, \quad \mathbf{M}_e = \mathbf{0}. \quad (7.2)$$

Для антисимметричной части тензора напряжений имеем соотношение (3.9), которое в рассматриваемом случае принимает вид

$$\left[\rho \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{P}} \cdot \mathbf{P}^T - \mathbf{T}_e \right]_{\times} = \mathbf{0} \Rightarrow \left[\rho \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{P}} \cdot \mathbf{P}^T - \mathbf{T}_e \right] \cdot \cdot \mathbf{A} = 0, \quad \forall \mathbf{A} : \mathbf{A} = -\mathbf{A}^T. \quad (7.3)$$

Подставляя сюда тензор напряжений (7.2), получаем ограничение на свободную энергию

$$\left[\rho \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{P}} \cdot \mathbf{P}^T + \rho \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{g}} \cdot \mathbf{g}^T \right] \cdot \cdot \mathbf{A} = 0,$$

которое перепишем в стандартном виде

$$\left[\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{P}} \right]^T \cdot \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{P}) + \left[\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{g}} \right]^T \cdot \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{g}) = 0 \quad (7.4)$$

Характеристическая система [23] для уравнения (7.4) имеет вид

$$\frac{d\mathbf{g}}{ds} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{g}, \quad \frac{d\mathbf{P}}{ds} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}, \quad \mathbf{P} \cdot \mathbf{P}^T = \mathbf{E}. \quad (7.5)$$

Эта система 12-го порядка имеет 11 независимых интегралов, но только 9 из них не зависят от произвольного антисимметричного тензора \mathbf{A} . Легко убедиться, что отмеченные интегралы являются координатами тензора

$$\mathbf{Q} = \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{g}. \quad (7.6)$$

Таким образом, свободная энергия рассматриваемой среды имеет вид

$$\rho_0 \mathcal{F} = \rho_0 \mathcal{F}(\zeta, \vartheta, \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{g}). \quad (7.7)$$

Дальнейшие построения аналогичны тем, которые были использованы в предыдущем пункте.

8 Сводка основных уравнений

Для свободной энергии выражение (6.13) конкретизируем в простейшей форме

$$\rho_0 \mathcal{F} = \rho_0 \mathcal{F}(\rho, \mathbf{G}, \vartheta) = f(\zeta, \vartheta) + \frac{\zeta \mu(\zeta, \vartheta)}{2} (\text{tr } \mathbf{G} - 3) \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{G}} = \mu(\rho, \vartheta) \mathbf{E}. \quad (8.1)$$

Соотношения Коши–Грина (6.14) в этом случае принимают вид

$$\mathbf{p} = -\frac{\partial f}{\partial \zeta} - (\text{tr } \mathbf{G} - 3) \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{\zeta \mu}{2} \right), \quad \boldsymbol{\tau} = -\mu(\rho, \vartheta) I_3^{-2/3}(\mathbf{g}) \left(\mathbf{g} \cdot \mathbf{g}^T - \frac{1}{3} \mathbf{g} \cdot \cdot \mathbf{g}^T \mathbf{E} \right), \quad (8.2)$$

где функция f дается выражением (6.12). Для энтропии получаем следующее представление

$$\mathcal{H} = -\frac{d\psi}{d\vartheta} + c \ln(\zeta - b) - \frac{\partial \mathcal{F}_d}{\partial \vartheta}. \quad (8.3)$$

Посмотрим, во что превращаются эти уравнения, если вектор перемещений \mathbf{u} считать малым. При этом имеем

$$I_3^{-2/3}(\mathbf{g}) = 1 + \frac{2}{3} \nabla \cdot \mathbf{u}, \quad \mathbf{G} = \mathbf{E} - 2\text{deve} \boldsymbol{\epsilon}, \quad 2\boldsymbol{\epsilon} = \nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T, \\ \mathbf{g} \cdot \mathbf{g}^T - \frac{1}{3} \mathbf{g} \cdot \cdot \mathbf{g}^T \mathbf{E} = -2\text{deve} \boldsymbol{\epsilon}. \quad (8.4)$$

В принятом приближении определяющие уравнения (8.2) имеют вид

$$\mathbf{p} = -\frac{\partial f}{\partial \zeta}, \quad \boldsymbol{\tau} = 2\mu(\rho, \vartheta) \text{deve} \boldsymbol{\epsilon}. \quad (8.5)$$

Эти уравнения позволяют назвать коэффициент μ модулем сдвига. Использовать линейные определяющие уравнения (8.5) в теории неупругих сред, конечно, рискованно,

ибо вектор перемещения во многих практических ситуациях не является малым. Поэтому пользоваться нужно нелинейными соотношениями (8.2). Выберем теперь произвольную пару единичных ортогональных векторов \mathbf{n}, \mathbf{m} . Касательное напряжение, действующее по площадке с нормалью \mathbf{n} в направлении вектора \mathbf{m} , определяется формулой

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{m} = -\mu(\rho, \vartheta) I_3^{-2/3} (\mathbf{g} \cdot \mathbf{n} \cdot \mathbf{g} \cdot \mathbf{g}^T \cdot \mathbf{m}). \quad (8.6)$$

Как видим, при выборе свободной энергии в форме (8.1) касательное напряжение автоматически не удовлетворяет ограничению (6.17), что усложняет все рассмотрение. Здесь необходимо действовать следующим образом. Выпишем неравенство

$$\left| \mu(\rho, \vartheta) I_3^{-2/3} (\mathbf{g} \cdot \mathbf{n} \cdot \mathbf{g} \cdot \mathbf{g}^T \cdot \mathbf{m}) \right| \leq \tau_p(\zeta) \left(1 - \frac{\vartheta}{\vartheta_f} \right). \quad (8.7)$$

Когда достигается знак равенства, решение нужно искать на классе разрывных функций. Та часть материала, в которой условие (8.7) выполняется со знаком равенства, начинает скользить относительно части среды, в которой имеет место строгое неравенство (8.7). Обсуждение всех возникающих здесь вопросов требует много места и выходит за рамки данной работы. Разумеется, желательно так задать свободную энергию, чтобы неравенство (6.17) выполнялось бы автоматически. Решение здесь должно быть примерно таким же, как при написании свободной энергии для объемных деформаций. Существует, однако, возможность, что ничего этого делать не придется, а течение материала будет происходить не при постоянном касательном напряжении. Иными словами, лучше обойтись без традиционного критерия текучести, который к тому же не имеет прямого подтверждения экспериментами. Что касается зависимости модуля сдвига от плотности и температуры, то она имеет примерно следующий вид

$$\mu = \mu_0 \left(1 - \frac{\vartheta}{\vartheta_f} \right) \zeta^p \exp \left[-\frac{(\zeta - 1)^2}{c^2} \right]. \quad (8.8)$$

Иными словами, модуль сдвига должен обращаться в нуль как при высоких давлениях, так и при низких плотностях.

Выпишем полную систему уравнений динамики рассматриваемой среды.

Закон сохранения частиц принимаем в форме (2.37)

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\rho}{I_3(\mathbf{g})} \right] + \mathbf{V}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \left[\frac{\rho}{I_3(\mathbf{g})} \right] = 0. \quad (8.9)$$

Первый закон динамики имеет вид

$$-\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \nabla \times \mathbf{t} + \rho \mathbf{F} = \rho m \left(\frac{d}{dt} \mathbf{V} + \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} \right). \quad (8.10)$$

Второй закон динамики Эйлера необходимо формулировать в двух альтернативных формах

$$2k \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} \sigma(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n}) \frac{(2\boldsymbol{\omega} - \nabla \times \mathbf{V})}{|2\boldsymbol{\omega} - \nabla \times \mathbf{V}|} = \rho J \left(\frac{d}{dt} \boldsymbol{\omega} + \mathbf{V} \cdot \nabla \boldsymbol{\omega} \right), \quad |2\boldsymbol{\omega} - \nabla \times \mathbf{V}| \neq 0 \quad (8.11)$$

или

$$\mathbf{t} = -\frac{1}{4}\rho J \nabla \times \left(\frac{d}{dt} \mathbf{V} + \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} \right), \quad 2\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{V}, \quad |\mathbf{t}| < 2k \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} \sigma(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n}). \quad (8.12)$$

Вектор \mathbf{n} в уравнениях (8.11) и (8.12) находится из решения задачи (5.23). Для замыкания системы к выписанным уравнениям необходимо добавить определяющие уравнения

$$p = -\frac{\partial f}{\partial \zeta} + (\text{tr} \mathbf{G} - 3) \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{\zeta \mu}{2} \right), \quad \boldsymbol{\tau} = -\mu(\rho, \vartheta) I_3^{-2/3}(\mathbf{g}) \left(\mathbf{g} \cdot \mathbf{g}^T - \frac{1}{3} \mathbf{g} \cdot \mathbf{g}^T \mathbf{E} \right) \quad (8.13)$$

и геометрические уравнения

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}, t) = \frac{d\mathbf{u}}{dt} \cdot \mathbf{g}^{-1}, \quad \mathbf{G} = \mathbf{g}^T \cdot \mathbf{g}, \quad \mathbf{g} = \mathbf{E} - \nabla \mathbf{u} \quad \Rightarrow \quad \nabla \times \mathbf{g} = \mathbf{0}. \quad (8.14)$$

Последние два уравнения взаимозаменяемы. Наконец, уравнение теплопроводности имеет вид

$$\nabla \cdot \mathbf{h} + \rho q = \rho \vartheta \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta t} - \rho \delta. \quad (8.15)$$

В заключение этого пункта приведем постановку задачи о сферически симметричной деформации полого шара. Пусть при $t = 0$ шар занимал область $a_0 < r_0 < b_0$, а в актуальный момент времени он занимает область $a < r < b$. Вектор смещения зададим в виде $\mathbf{u} = u(r)\mathbf{e}_r$. Введем обозначения

$$p = 1 - \frac{u}{r} > 0, \quad q = 1 - \frac{du}{dr}, \quad z = \left(\frac{q}{p} \right)^{2/3}, \quad \mathbf{e}_r \equiv \mathbf{e}. \quad (8.16)$$

Тогда будем иметь

$$\mathbf{g} = q \mathbf{e} \otimes \mathbf{e} + p (\mathbf{E} - \mathbf{e} \otimes \mathbf{e}), \quad \mathbf{G} = \boldsymbol{\Lambda} = z^2 \mathbf{e} \otimes \mathbf{e} + z^{-1} (\mathbf{E} - \mathbf{e} \otimes \mathbf{e}), \quad I_3(\mathbf{g}) = qp^2. \quad (8.17)$$

Для инвариантов тензора формоизменения справедливы формулы

$$I_1(\mathbf{G}) = z^2 + 2z^{-1} \geq 3, \quad I_2(\mathbf{G}) = z^4 + 2z^{-2} \geq 3. \quad (8.18)$$

Внутреннее рассеяние энергии считаем чисто тепловым, т.е. вектор \mathbf{t} будем считать равным нулю. Закон сохранения частиц в рассматриваемом случае можно представить в форме

$$\frac{\partial(\zeta zp^2)}{\partial t} + \frac{1}{q} \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial(\zeta zp^2)}{\partial r} = 0. \quad (8.19)$$

Уравнения движения в данном случае сводятся к одному уравнению

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + 2 \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} = \frac{\rho_0}{\zeta} \left[\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v^2}{2} \right) \right], \quad v = \frac{1}{q} \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (8.20)$$

Для простоты модуль сдвига определим формулой

$$\mu = \frac{\mu_0}{\zeta} \frac{1 - \vartheta/\vartheta_f}{1 - 293/\vartheta_f} \vartheta \left(\frac{1 - \vartheta/\vartheta_f}{1 - 293/\vartheta_f} \right), \quad (8.21)$$

где μ_0 есть модуль сдвига при комнатной температуре, $\theta(x)$ есть ступенчатая функция Хевисайда. Определяющее уравнение для давления принимает вид

$$p = f_0 (\zeta^{-m} - \zeta^{-n}) + \frac{c \vartheta}{\zeta - b}, \quad m > n, \quad \zeta > b. \quad (8.22)$$

Для девиатора тензора напряжений имеем

$$\boldsymbol{\tau} = \mu \left(z^2 - \frac{1}{z} \right) \left(\frac{1}{3} \mathbf{E} - \mathbf{e} \otimes \mathbf{e} \right). \quad (8.23)$$

Тогда нормальные напряжения определяются формулами

$$\sigma_r = -p - \frac{2\mu}{3} \left(z^2 - \frac{1}{z} \right), \quad \sigma_\varphi = -p + \frac{\mu}{3} \left(z^2 - \frac{1}{z} \right). \quad (8.24)$$

Энтропия задается выражением

$$\mathcal{H} = -\frac{d\psi}{d\vartheta} + c \ln(\zeta - b) - \frac{\zeta}{2\rho_0} (\text{tr } \mathbf{G} - 3) \frac{\partial \mu}{\partial \vartheta}. \quad (8.25)$$

Осталось записать уравнение теплопроводности

$$k \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial r^2} = \rho \vartheta \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} + v \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial r} \right), \quad q = \delta = 0, \quad \mathbf{h} = k(\vartheta) \nabla \vartheta, \quad k > 0. \quad (8.26)$$

Теперь необходимо сформулировать краевые и начальные условия. Краевые условия примем в следующем виде

$$r = a(t) = a_0 + \mathbf{u}(a(t), t) : \sigma_r = -p_a(t); \quad r = b(t) = b_0 + \mathbf{u}(b(t), t) : \sigma_r = -p_b(t). \quad (8.27)$$

Первое и третье из этих соотношений служат для определения актуальных положений границ. Кроме того, нужно принять условие для теплового потока. Если теплообмен с окружающей средой отсутствует, то он равен нулю. Начальные условия можно принять, например, такими, чтобы при $t = 0$ шар находился в натуральном состоянии.

Как видим, даже для относительно простой задачи получается весьма сложная система уравнений, не поддающаяся точному аналитическому решению.

9 Заключение

Выше был представлен набросок теории неупругих сред. Нерешенной, с теоретической точки зрения, осталась проблема конкретного задания “девиаторной” части свободной энергии. Тем не менее, и эта проблема сформулирована так, что она доступна решению математическими средствами. Поэтому можно надеяться, что математики перестанут уклоняться от разработки теории неупругих сред. Тем более, что в математическом отношении эта теория несравнимо богаче и интереснее, нежели нелинейная теория упругости. Можно сказать, что теория неупругих сред — это теория фазовых переходов в твердых телах. Однако среди этих переходов встречаются и неклассические фазовые переходы, связанные с перестройками структуры твердых тел. При этом, вообще говоря, в теории нет никакой необходимости в критериях типа критериев текучести, которые фактически определяются желанием подогнать теорию под эксперимент, но которыми заведомо не может руководствоваться Природа.

Список литературы

- [1] Эйлер Л. Общие принципы движения жидкостей. Mem. Acad.roy. sci. et belles-lettres, Berlin, **11** (1755), 274–315, 1757 (Opera omnia, II–12). (На латинском языке)
- [2] Эйлер Л. Новый метод определения движения твердых тел. Novi commentarii Acad. sci. imp. Petrop., **20** (1775), 208–238, 1776 (Opera omnia, II–9). (На латинском языке)
- [3] Truesdell C., Noll W. The Non-Linear Field Theories of Mechanics. Encyclopedia of Physics. III/3, Springer-Verlag, 1965.
- [4] Трусделл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М.: Наука, 1975. 592с.
- [5] Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512с.
- [6] Жилин П.А. Основные уравнения неклассической теории оболочек. //Механика и процессы управления. Труды СПбГТУ, №386, С.–Петербург, 1982, сс.29–46.
- [7] Белл Дж.Ф. Экспериментальные основы механики деформируемых твердых тел. Часть I. М.: Наука, 1984. 597с.
- [8] Белл Дж.Ф. Экспериментальные основы механики деформируемых твердых тел. Часть II. М.: Наука, 1984. 432с.
- [9] Хилл Р. Математическая теория пластичности. М.: ГИТТЛ, 1956. 407с.
- [10] Пальмов В.А. Колебания упруго-пластических тел. М.: Наука, 1976. 328с.
- [11] Palmov V. Vibrations of Elasto-Plastic Bodies. Berlin: Springer, 1998.
- [12] Годунов С.К. Элементы механики сплошной среды. М.: Наука, 1978. 303с.
- [13] Жилин П.А. Тензор поворота в описании кинематики абсолютно твердого тела.//Механика и процессы управления. Труды СПбГТУ, №443, С.–Петербург, 1992, сс.100–121.
- [14] Zhilin P.A. A New Approach to the Analysis of Free Rotations of Rigid Bodies.//ZAMM Z. angew. Math. Mech. **76** (1996), **4**, pp.187-204.
- [15] Жилин П.А. Реальность и Механика. //Труды XXIII школы–семинара "Анализ и синтез нелинейных механических систем". С.–Петербург, 1996, сс.6–49.
- [16] Жилин П.А. Исходные понятия и фундаментальные законы рациональной механики.//Труды XXII школы–семинара "Анализ и синтез нелинейных механических систем". С.–Петербург, 1995, сс.10–36.
- [17] Cosserat E. et F. Théorie des corps deformables. Hermann, Paris, 1909.
- [18] Kafadar C.B., Eringen A.C. Micropolar media — I. The classical theory. Int. J. Engng. Sci. (1971), vol.9, pp.271–305.

- [19] Eringen A.C. Theory of Micropolar Media.
- [20] Truesdell C. Rational Thermodynamics. Springer-Verlag, New-York, 1984. 578p.
- [21] Truesdell C., Toupin R. The classical field theories. Handbuch der Physik. Vol. III/1. Springer-Verlag, 1960.
- [22] Лойцянский Л.Г., Лурье А.И. Курс теоретической механики. Том II. М.: Наука, 1983. 640с.
- [23] Курант Р. Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964. 830с.
- [24] Zhilin P.A. Mechanics of Deformable Directed Surfaces. Int. J. Solids Structures, 1976, vol.12, pp.635-648.
- [25] Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1979. 744с.
- [26] Френкель Я.И. Введение в теорию металлов. М.: ГИФМЛ, 1958. 368с.
- [27] Кукушкин С.А., Осипов А.В. Теория фазовых переходов первого рода вблизи тройной точки газ — жидкость — кристалл. Неорганические материалы, 1999, том 35, №6, с.661-668.