

Динамика и устойчивость положений равновесия твердого тела на нелинейно упругом основании*

Аннотация

В статье представлена постановка задач динамики твердого тела на нелинейно упругом основании. Вводится общее определение потенциального момента. Обсуждается метод возмущений на множестве собственно ортогональных тензоров. Даются примеры решения конкретных задач.

1 Введение

Известна роль, которую играет обычный осциллятор в ньютоновской механике. В эйлеровской механике аналогичную роль играет твердое тело на упругом основании. Такая система может быть названа твердотельным осциллятором. Последний необходим при построении динамики мультиполярных сред, но в общем случае в литературе не только не исследован, но даже и не описан. Хотя частные случаи твердотельного осциллятора, конечно, рассматривались, например, при анализе ядерного магнитного резонанса, а также в многочисленных работах прикладного характера, но при малых углах поворота.

Во введении к статье [1] описана постановка задач динамики твердого тела в терминах тензора поворота и вводится в рассмотрение вектор поворота, но практически он не применяется. Между тем, определение, например, потенциального момента или задание энергии деформации упругого основания требует применения вектора поворота. Поэтому в п. 2 данной статьи приводится подробное описание вектора поворота и его применений. В п. 3 дается вывод уравнений движения твердотельного осциллятора. В п. 4 приводится пример точного интегрирования уравнений динамики твердого тела на нелинейно упругом основании. Метод интегрирования любопытен тем, что приходится использовать одновременно обе системы основных уравнений через левую и правую угловые скорости. Пункты 5 – 8 посвящены анализу устойчивости положения равновесия при различных типах внешнего момента.

*Жилин П.А. Динамика и устойчивость положений равновесия твердого тела на нелинейно упругом основании // Труды XXIV летней школы "Анализ и синтез нелинейных механических колебательных систем", Санкт-Петербург, 1997. С. 90–122.

2 Математические приготовления

Ниже дается краткая сводка математического аппарата, используемого в основном тексте статьи. Большая часть приводимых формул публикуется впервые.

2.1 Вектор поворота. Тензор-интегратор

Большую роль в динамике твердого тела играет тензор поворота и его представления. Основные сведения о тензоре поворота изложены во вводной части статьи [1]. Там же доказана основная теорема о представлении тензора поворота, и введен в рассмотрение вектор поворота, причем последний в литературе, включая [1], практически не применяется. Между тем, существуют обширные классы задач, которые без применения вектора поворота трудно даже сформулировать, не говоря уже об их решении. По этой причине ниже приводятся некоторые факты, относящиеся к вектору поворота и его применению.

Тензор поворота будет обозначаться символом $\mathbf{P}(t)$ или $\mathbf{Q}(\theta\mathbf{n})$. Справедлива теорема Эйлера [1]

$$\mathbf{Q}(\theta\mathbf{n}) = (1 - \cos \theta)\mathbf{nn} + \cos \theta\mathbf{E} + \sin \theta\mathbf{n}\times\mathbf{E}, \quad (1)$$

где $\mathbf{Q}(\theta\mathbf{n})$ означает поворот на угол θ вокруг \mathbf{n} , вектор $\theta\mathbf{n}$ называется вектором поворота. Часто вместо (1) удобнее использовать представление через логарифмический тензор поворота \mathbf{R}

$$\mathbf{Q}(\theta\mathbf{n}) = \mathbf{E} + \frac{\sin \theta}{\theta}\mathbf{R} + \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2}\mathbf{R}^2 = \exp \mathbf{R}, \quad \mathbf{R} = \theta\mathbf{n}\times\mathbf{E} \quad (2)$$

В представлении (2), в отличие от (1), величина θ может рассматриваться как модуль вектора θ , т.е. $\theta = |\theta| \geq 0$. Справедливы формулы

$$1 + 2 \cos \theta = \text{tr} \mathbf{Q}, \quad -2 \frac{\sin \theta}{\theta}\theta = \mathbf{Q}_\times, \quad (\mathbf{ab})_\times = \mathbf{a}\times\mathbf{b} \quad (3)$$

Рассмотрим композицию поворотов

$$\mathbf{Q}(\theta\mathbf{n}) = \mathbf{Q}(\alpha\mathbf{p})\cdot\mathbf{Q}(\beta\mathbf{q}), \quad |\mathbf{p}| = |\mathbf{q}| = 1 \quad (4)$$

Вектор поворота композиции вычисляется по формулам

$$1 + 2 \cos \theta = \cos \alpha + \cos \beta + \cos \alpha \cos \beta + (1 - \cos \alpha)(1 - \cos \beta)(\mathbf{p}\cdot\mathbf{q})^2 - 2 \sin \alpha \sin \beta (\mathbf{p}\cdot\mathbf{q}), \quad (5)$$

$$2 \sin \theta\mathbf{n} = [\sin \alpha(1 + \cos \beta) - (1 - \cos \alpha) \sin \beta (\mathbf{p}\cdot\mathbf{q})]\mathbf{p} + [\sin \beta(1 + \cos \alpha) - \sin \alpha(1 - \cos \beta)(\mathbf{p}\cdot\mathbf{q})]\mathbf{q} + [\sin \alpha \sin \beta - (1 - \cos \alpha)(1 - \cos \beta)(\mathbf{p}\cdot\mathbf{q})]\mathbf{p}\times\mathbf{q} \quad (6)$$

Следует обратить внимание на достаточно сложный характер суммарного угла поворота. Например, если $\mathbf{p} = \mathbf{q}$, то $\theta = \alpha + \beta$, что вполне естественно. Однако, если $\mathbf{p}\cdot\mathbf{q} = 0$, то из (5) следует довольно неожиданный вывод: если $\beta = \pi$, то $\theta = \pi$

независимо от угла α . В этом случае от угла α зависит вектор \mathbf{n} , который находится по (6) после раскрытия неопределенности. Левая (истинная) $\boldsymbol{\omega}$ и правая $\boldsymbol{\Omega}$ угловые скорости находятся по уравнениям Пуассона [1]

$$\dot{\mathbf{P}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{P}, \quad \dot{\mathbf{P}} = \mathbf{P} \times \boldsymbol{\Omega}, \quad \boldsymbol{\omega} = \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\Omega} \quad (\dot{f} = df/dt) \quad (7)$$

Важную роль играют формулы, связывающие угловые скорости с производной от вектора поворота

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{Z}(\theta) \cdot \dot{\theta}, \quad \boldsymbol{\Omega} = \mathbf{Z}^T(\theta) \cdot \dot{\theta} \quad (8)$$

или в обращенной форме

$$\dot{\theta} = \mathbf{Z}^{-1}(\theta) \cdot \boldsymbol{\omega}, \quad \dot{\theta} = \mathbf{Z}^{-T}(\theta) \cdot \boldsymbol{\Omega} \quad (9)$$

причем для тензора-интегратора $\mathbf{Z}^{-1}(\theta)$, играющего роль интегрирующего множителя, справедливы представления

$$\mathbf{Z}(\theta) = \mathbf{E} + \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} \mathbf{R} + \frac{\theta - \sin \theta}{\theta^3} \mathbf{R}^2, \quad \det \mathbf{Z} = 2(1 - \cos \theta)/\theta^2 \quad (10)$$

$$\mathbf{Z}^{-1}(\theta) = \mathbf{E} - \frac{1}{2} \mathbf{R} + \frac{1-g}{\theta^2} \mathbf{R}^2, \quad g = \frac{\theta \sin \theta}{2(1 - \cos \theta)} \quad (\theta \neq 2\pi s) \quad (11)$$

Обратим внимание, что при $\theta = 2\pi s$ ($s = 1, 2, \dots$) тензор $\mathbf{Z}(\theta)$ необратим.

$$\mathbf{Z}(2\pi m) = \mathbf{m}\mathbf{m} \quad \implies \quad \boldsymbol{\omega} = \mathbf{Z}(2\pi m) \cdot \dot{\theta} = \dot{\theta} \mathbf{m}$$

Это обстоятельство не должно удивлять. На самом деле модуль вектора поворота может достигать значения 2π только в том случае, если вращение происходит вокруг фиксированной во времени и пространстве оси. Доказательство этого интуитивно очевидного факта мне неизвестно. Однако, легко доказывается, что если $|\theta| \gg 1$, то вращение происходит вокруг фиксированной оси. Чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть выражение

$$\cos \eta = \frac{\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\Omega}}{|\boldsymbol{\omega}|^2} = \frac{\dot{\theta} \cdot \mathbf{Z} \cdot \dot{\theta}}{\dot{\theta} \cdot \mathbf{Z} \cdot \mathbf{Z}^T \cdot \dot{\theta}} = \frac{\theta^4 |\dot{\theta}|^2 - [\theta^2 - \sin^2 \theta + (1 - \cos \theta)^2] |\boldsymbol{\theta} \times \dot{\theta}|^2}{\theta^4 |\dot{\theta}|^2 - [\theta^2 - \sin^2 \theta - (1 - \cos \theta)^2] |\boldsymbol{\theta} \times \dot{\theta}|^2}$$

Отсюда видно, что при больших θ^2 справедливы пределы

$$\theta^2 \rightarrow \infty \quad \Rightarrow \quad \cos \eta \rightarrow 1 \quad \Rightarrow \quad \eta \rightarrow 0$$

Это означает, что при больших θ^2 справедливо равенство

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\Omega} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Omega} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\Omega} = \dot{\theta} \mathbf{n}, \quad \mathbf{n} = \text{const}$$

Наш собственный опыт показывает, что в случае неодноосных вращений модуль вектора поворота не превышает значения π . Впрочем, наш опыт не так уж и значителен.

При вычислениях полезны формулы

$$\mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{R}^{2k+1} = (-\theta^2)^k \mathbf{R}, \quad \mathbf{R}^{2k} = (-\theta^2)^{k-1} \mathbf{R}^2, \quad (k = 1, 2, \dots)$$

Тензор-интегратор \mathbf{Z} обладает многими замечательными свойствами. Перечислим некоторые из них.

$$\mathbf{Z}(\boldsymbol{\theta}) \cdot \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}, \quad \mathbf{Z}^\top = \mathbf{P}^\top \cdot \mathbf{Z}, \quad (\mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}) \quad (12)$$

Тензор $\mathbf{Z}(\boldsymbol{\theta})$ является гиротропной функцией вектора поворота $\boldsymbol{\theta}$

$$\mathbf{Z}(\mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\theta}) = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Z}(\boldsymbol{\theta}) \cdot \mathbf{Q}^\top, \quad \forall \mathbf{Q}: \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^\top = \mathbf{E}, \quad \det \mathbf{Q} = +1 \quad (13)$$

Если $\mathbf{Q} = \mathbf{P}$, где $\mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}$, то

$$\mathbf{Z}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{P} \cdot \mathbf{Z}(\boldsymbol{\theta}) \cdot \mathbf{P}^\top \implies \mathbf{P} \cdot \mathbf{Z} = \mathbf{Z} \cdot \mathbf{P}, \quad \mathbf{P}^\top \cdot \mathbf{Z} = \mathbf{Z} \cdot \mathbf{P}^\top \quad (14)$$

Пользуясь (12) – (14), можно вывести много других тождеств. Например,

$$\mathbf{Z}^{-1}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{Z}^{-\top} \cdot \mathbf{P}^\top = \mathbf{P}^\top \cdot \mathbf{Z}^{-\top} \quad (15)$$

При выводе многих уравнений тождества (12) – (15) чрезвычайно облегчают выкладки.

В заключение этого пункта приведем вывод первой из двух формул (8). Вычисляя след от обеих частей левого уравнения Пуассона и учитывая (3), получаем

$$\text{tr } \dot{\mathbf{P}} = (\text{tr } \mathbf{P}) \cdot = (1 + 2 \cos \theta) \cdot = -2 \dot{\theta} \sin \theta = \text{tr}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{P}) = -\frac{2 \sin \theta}{\theta} \boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\omega}$$

Отсюда имеем

$$\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\omega} = \theta \dot{\theta} = \frac{1}{2} (\theta^2) \cdot = \frac{1}{2} (\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\theta}) \cdot = \boldsymbol{\theta} \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}} \quad (16)$$

Умножая обе части левого уравнения Пуассона (8) скалярно на вектор поворота и учитывая равенство $\mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}$, получаем

$$\dot{\mathbf{P}} \cdot \boldsymbol{\theta} = (\mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\theta}) \cdot - \mathbf{P} \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}} = (\mathbf{E} - \mathbf{P}) \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\theta}$$

Умножая обе части последнего равенства векторно на $\boldsymbol{\theta}$, получаем с учетом (17)

$$\boldsymbol{\theta} \times (\mathbf{E} - \mathbf{P}) \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{\theta} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{\omega} \theta^2 - (\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\theta}) \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\omega} \theta^2 - \boldsymbol{\theta} (\boldsymbol{\theta} \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}})$$

или

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{\theta^2} [\boldsymbol{\theta} \times (\mathbf{E} - \mathbf{P}) + \boldsymbol{\theta} \boldsymbol{\theta}] \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}} = \frac{1}{\theta^2} [\mathbf{R} \cdot (\mathbf{E} - \mathbf{P}) + \boldsymbol{\theta} \boldsymbol{\theta}] \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}}$$

Подставляя сюда выражение (2) и учитывая тождество

$$\mathbf{R}^2 = \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{E} \times \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta} \boldsymbol{\theta} - \theta^2 \mathbf{E}$$

получаем искомую формулу (8).

2.2 Потенциальные или консервативные моменты

Введем понятие консервативного момента, необходимость в котором возникает во многих задачах, но которое, видимо, до сих пор не было введено в общем случае.

Определение: момент \mathbf{M} называется потенциальным или консервативным, если существует такая скалярная функция $U(\boldsymbol{\theta})$, зависящая только от вектора поворота $\boldsymbol{\theta}$, что выполняется равенство

$$\mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\omega} = -\dot{U}(\boldsymbol{\theta}) = -\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\theta}} \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}} = -\frac{dU}{d\boldsymbol{\theta}} \cdot \mathbf{Z}^{-1}(\boldsymbol{\theta}) \cdot \boldsymbol{\omega} \quad (17)$$

Из этого определения немедленно следует, что

$$\mathbf{M} = -\mathbf{Z}^{-T}(\boldsymbol{\theta}) \cdot \frac{dU}{d\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\omega}) \times \boldsymbol{\omega} \quad (18)$$

Определение: консервативный момент называется позиционным, если он зависит только от вектора поворота в данный момент времени, т.е. в (18) следует принять $\mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\omega}) = \mathbf{0}$.

Включение в определение консервативного момента слагаемого, зависящего от скорости, оправдывается следующими обстоятельствами. Первое: именно (18) следует из определения (17). Второе: включение члена, зависящего от скорости, не препятствует сохранению энергии. Третье: включение слагаемого, зависящего от скорости, где $\mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\omega})$ следует понимать как функционал от векторов поворота и угловой скорости, оказывается необходим при учете (частичном) инерционных свойств упругого основания.

Для практических целей важными оказываются частные случаи потенциала $U(\boldsymbol{\theta})$.

Определение: потенциал $U(\boldsymbol{\theta})$ называется трансверсально изотропным с осью изотропии \mathbf{k} , если равенство

$$U(\boldsymbol{\theta}) = U(\mathbf{Q}(\alpha \mathbf{k}) \cdot \boldsymbol{\theta}) \quad (19)$$

выполняется для любого тензора поворота $\mathbf{Q}(\alpha \mathbf{k})$. Найдем общий вид трансверсально изотропного потенциала. Для этого рассмотрим непрерывно дифференцируемое семейство тензоров $\mathbf{Q}(\alpha(\tau) \mathbf{k})$, где τ — параметр семейства. Продифференцируем теперь (19) по параметру τ и учтем, что левая часть (19) от τ не зависит. Тогда получим

$$\frac{dU}{d\tau} = \frac{dU}{d\boldsymbol{\theta}'} \cdot \frac{d\boldsymbol{\theta}'}{d\tau} = \frac{dU}{d\boldsymbol{\theta}'} \cdot (\alpha \mathbf{k} \times \boldsymbol{\theta}') = 0, \quad \boldsymbol{\theta}' \equiv \mathbf{Q}(\alpha \mathbf{k}) \cdot \boldsymbol{\theta}$$

Таким образом трансверсально изотропный потенциал должен удовлетворить условию

$$\frac{dU}{d\boldsymbol{\theta}} \cdot (\mathbf{k} \times \boldsymbol{\theta}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dU}{d\boldsymbol{\theta}} = \psi_1 \mathbf{k} + \psi_2 \boldsymbol{\theta},$$

где ψ_1 и ψ_2 скалярные функции $\boldsymbol{\theta}$. Умножая последнее равенство скалярно на $d\boldsymbol{\theta}$, получаем

$$dU = \frac{dU}{d\boldsymbol{\theta}} \cdot d\boldsymbol{\theta} = \psi_1 d(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta}) + \frac{1}{2} \psi_2 d(\boldsymbol{\theta}^2)$$

Отсюда видим, что трансверсально изотропный потенциал есть функция двух аргументов

$$U(\boldsymbol{\theta}) = U(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}^2) \quad (20)$$

Если $U(\boldsymbol{\theta})$ есть функция только от θ^2 , то такой потенциал называется изотропным. По (20) имеем

$$\frac{dU}{d\theta} = 2 \frac{\partial U}{\partial(\theta^2)} \boldsymbol{\theta} + \frac{\partial U}{\partial(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta})} \mathbf{k} \quad (21)$$

Следовательно, согласно (18) позиционный консервативный момент имеет вид

$$\mathbf{M} = -2 \frac{\partial U}{\partial(\theta^2)} \boldsymbol{\theta} - \frac{\partial U}{\partial(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta})} \mathbf{Z}^{-T} \cdot \mathbf{k} \quad (22)$$

Для изотропного потенциала в этом выражении сохраняется только первое слагаемое в правой части. Отметим очевидные тождества, справедливые для любого вектора \mathbf{a} .

$$(\mathbf{E} - \mathbf{P}) \cdot \boldsymbol{\theta} = (\mathbf{E} - \mathbf{P}^T) \cdot \boldsymbol{\theta} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{a} - \mathbf{a}') \cdot \boldsymbol{\theta} = 0, \quad \mathbf{a}' = \mathbf{P} \cdot \mathbf{a}$$

С учетом этих тождеств и равенства (22) имеем

$$\begin{aligned} (\mathbf{E} - \mathbf{P}^T) \cdot \mathbf{M} &= -\frac{\partial U}{\partial(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta})} (\mathbf{E} - \mathbf{P}^T) \cdot \mathbf{Z}^{-T} \cdot \mathbf{k} = \frac{\partial U}{\partial(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta})} (\mathbf{Z}^{-1} - \mathbf{Z}^{-T}) \cdot \mathbf{k} = \\ &= -\frac{\partial U}{\partial(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta})} \mathbf{R} \cdot \mathbf{k} = -\frac{\partial U}{\partial(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta})} \mathbf{k} \times \boldsymbol{\theta} \end{aligned}$$

Умножая это равенство скалярно на \mathbf{k} , получим

$$(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{M} = 0 \quad (23)$$

Это равенство справедливо для любого трансверсально изотропного потенциала. Для изотропного потенциала (23) справедливо для любого вектора \mathbf{a} , а не только для \mathbf{k} .

2.3 Метод возмущений на множестве собственно ортогональных тензоров

Поскольку возмущенные тензоры поворота не должны выходить за пределы собственно ортогональной группы, то это налагает определенные ограничения на всю технику метода возмущений. Существует несколько способов возмущения тензоров поворота. Один из них изложен в [2]. Здесь будет использована другая техника, основанная на том факте, что векторы поворота являются элементами линейного пространства и на их возмущения никаких ограничений не налагается.

Возмущенный тензор поворота определим равенством

$$\mathbf{P}_\varepsilon = \exp \mathbf{R}_\varepsilon = \exp[\boldsymbol{\theta}_\varepsilon \times \mathbf{E}], \quad \boldsymbol{\theta}_\varepsilon = \boldsymbol{\theta}_0 + \varepsilon \boldsymbol{\varphi}, \quad |\varepsilon| \ll 1 \quad (24)$$

где вектор $\boldsymbol{\varphi}$ называется вариацией вектора поворота. Рассматривая параметр ε как независимую переменную, вводим левую $\boldsymbol{\eta}_\varepsilon$ и правую $\boldsymbol{\zeta}_\varepsilon$ скорости возмущения.

$$\frac{\partial \mathbf{P}_\varepsilon}{\partial \varepsilon} = \boldsymbol{\eta}_\varepsilon \times \mathbf{P}_\varepsilon, \quad \frac{\partial \mathbf{P}_\varepsilon}{\partial \varepsilon} = \mathbf{P}_\varepsilon \times \boldsymbol{\zeta}_\varepsilon, \quad \boldsymbol{\eta}_\varepsilon = \mathbf{P}_\varepsilon \cdot \boldsymbol{\zeta}_\varepsilon \quad (25)$$

Возмущенные угловые скорости вычисляются по тензору \mathbf{P}_ε .

$$\dot{\mathbf{P}}_\varepsilon = \boldsymbol{\omega}_\varepsilon \times \mathbf{P}_\varepsilon, \quad \dot{\mathbf{P}}_\varepsilon = \mathbf{P}_\varepsilon \times \boldsymbol{\Omega}_\varepsilon, \quad \boldsymbol{\omega}_\varepsilon = \mathbf{P}_\varepsilon \cdot \boldsymbol{\Omega}_\varepsilon \quad (26)$$

Выписывая условия интегрируемости (25) и (26), приходим к уравнениям структуры Картана

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}_\varepsilon}{\partial \varepsilon} = \boldsymbol{\eta}_\varepsilon + \boldsymbol{\eta}_\varepsilon \times \boldsymbol{\omega}_\varepsilon, \quad \frac{\partial \boldsymbol{\Omega}_\varepsilon}{\partial \varepsilon} = \dot{\boldsymbol{\zeta}}_\varepsilon - \boldsymbol{\zeta}_\varepsilon \times \boldsymbol{\Omega}_\varepsilon, \quad (27)$$

Для скоростей возмущения имеем формулы аналогичные (8).

$$\boldsymbol{\eta}_\varepsilon = \mathbf{Z}_\varepsilon \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\theta}_\varepsilon}{\partial \varepsilon} = \mathbf{Z}_\varepsilon \cdot \boldsymbol{\varphi}, \quad \boldsymbol{\zeta}_\varepsilon = \mathbf{Z}_\varepsilon^T \cdot \boldsymbol{\varphi}, \quad \boldsymbol{\varphi} = \partial \boldsymbol{\theta}_\varepsilon / \partial \varepsilon \quad (28)$$

Возмущенные угловые скорости находятся по формулам

$$\boldsymbol{\omega}_\varepsilon = \mathbf{Z}_\varepsilon \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}}_\varepsilon, \quad \boldsymbol{\Omega}_\varepsilon = \mathbf{Z}_\varepsilon^T \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}}_\varepsilon$$

Если $\boldsymbol{\theta}_0$ не зависит от времени (положение равновесия), то

$$\boldsymbol{\omega}_\varepsilon = \varepsilon \mathbf{Z}_\varepsilon \cdot \dot{\boldsymbol{\varphi}}_\varepsilon, \quad \boldsymbol{\Omega}_\varepsilon = \varepsilon \mathbf{Z}_\varepsilon^T \cdot \dot{\boldsymbol{\varphi}}_\varepsilon \quad (29)$$

Пусть дана функция $f(\varepsilon, t)$. Величина

$$f(t)^* = [\partial f(\varepsilon, t) / \partial \varepsilon]_{\varepsilon=0}$$

называется первой вариацией функции $f(\varepsilon, t)$. Для первых вариаций тензора поворота и скоростей имеем

$$\mathbf{P}^* = \boldsymbol{\eta}_0 \times \mathbf{P}_0, \quad \boldsymbol{\eta}_0 = \mathbf{Z}_0 \cdot \boldsymbol{\varphi}, \quad \boldsymbol{\omega}^* = \dot{\boldsymbol{\eta}}_0 + \boldsymbol{\eta}_0 \times \boldsymbol{\omega}_0, \quad (30)$$

где индексами 0 отмечены невозмущенные величины, но $\boldsymbol{\eta}_0 = \boldsymbol{\eta}|_{\varepsilon=0}$. Аналогичные формулы справедливы для правых величин

$$\mathbf{P}^* = \mathbf{P}_0 \times \boldsymbol{\zeta}_0, \quad \boldsymbol{\zeta}_0 = \mathbf{Z}_0^T \cdot \boldsymbol{\varphi}, \quad \boldsymbol{\Omega}^* = \dot{\boldsymbol{\zeta}}_0 - \boldsymbol{\zeta}_0 \times \boldsymbol{\Omega}_0, \quad \boldsymbol{\zeta}_0 = \boldsymbol{\zeta}|_{\varepsilon=0} \quad (31)$$

Если возмущения накладываются на равновесные (статические) состояния, то $\boldsymbol{\omega}_0 = \boldsymbol{\Omega}_0 = 0$. Отметим формулы для первой вариации модуля вектора поворота

$$\theta^* = \frac{1}{\theta_0} \boldsymbol{\theta}_0 \cdot \boldsymbol{\varphi} = \frac{1}{\theta_0} \boldsymbol{\theta}_0 \cdot \boldsymbol{\eta}_0 = \frac{1}{\theta_0} \boldsymbol{\theta}_0 \cdot \boldsymbol{\zeta}_0 \quad (32)$$

3 Постановка задачи. Основные уравнения

Вообразим следующую ситуацию. Пусть дан тонкий стержень, расположенный вдоль орта \mathbf{k} . Пусть его нижний конец закреплен от смещений в неподвижной точке O , которую примем за начало в инерциальной системе отсчета. Пусть, наконец, рассматриваемый воображаемый стержень удерживается от поворотов упругим основанием рис.1. Когда стержень направлен вертикально и не повернут вокруг своей оси, упругое основание считается недеформированным. Насадим теперь на воображаемый стержень твердое тело произвольного вида. Тогда воображаемый стержень станет некой материальной осью в теле, упруго защемленной в упругое основание. Положение тела, при котором упругое основание недеформировано, будем называть

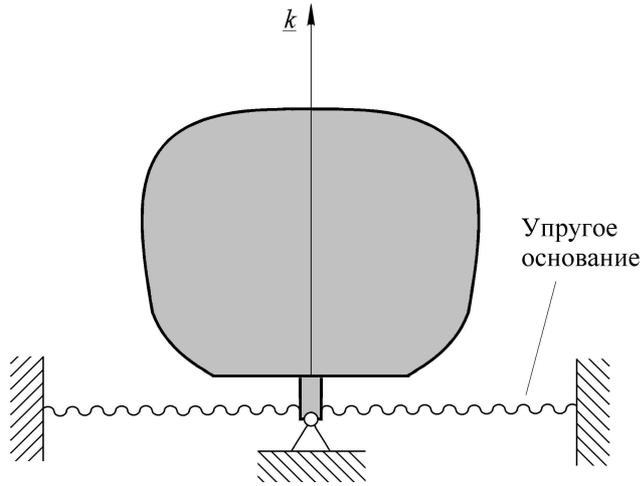


Рис. 1: Твердое тело на упругом основании

отсчетным. Тензор инерции тела в отсчетном положении, вычисленный относительно неподвижной точки O , будем обозначать символом \mathbf{A} . Тензор \mathbf{A} симметричен и положительно определен. Вектор вертикали \mathbf{k} не обязан совпадать с главной осью \mathbf{A} . Ситуация такого рода возникает в динамике неуровновешенных центрифуг. Правда в дальнейшем считается, что ротор жестко закреплен в статоре. В динамике центрифуг вместо твердого тела нужно рассматривать гироскоп, что, конечно, вносит некоторые технические усложнения, но для целей данной работы эти усложнения совершенно излишни.

Важное значение имеет случай трансверсально изотропного тензора инерции с осью изотропии \mathbf{k} . В этом случае тензор \mathbf{A} имеет вид

$$\mathbf{A} = A_1(\mathbf{E} - \mathbf{k}\mathbf{k}) + A_3\mathbf{k}\mathbf{k} \quad (33)$$

где A_1, A_3 — экваториальный и осевой моменты инерции, вычисленные относительно осей, проходящих через неподвижную точку O .

В актуальном положении тела, т.е. в положении тела в данный момент времени, тензор инерции находится по формуле

$$\mathbf{A}(t) = \mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}^T(t) = A_1(\mathbf{P} - \mathbf{k}'\mathbf{k}') + A_3\mathbf{k}'\mathbf{k}', \quad \mathbf{k}' = \mathbf{P} \cdot \mathbf{k} \quad (34)$$

Первый знак равенства здесь относится к тензору \mathbf{A} общего вида, а второй знак равенства относится к трансверсально изотропному тензору инерции. В представлении (34) символом \mathbf{P} обозначен тензор поворота тела. Кинетический момент определяется выражением

$$\mathbf{K} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}^T \cdot \boldsymbol{\omega} = A_1\boldsymbol{\omega} + (A_3 - A_1)(\mathbf{k}' \cdot \boldsymbol{\omega})\mathbf{k}' \quad (35)$$

или

$$\mathbf{K} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\Omega} = \mathbf{P} \cdot [A_1\boldsymbol{\Omega} + (A_3 - A_1)(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\Omega})\mathbf{k}] \quad (36)$$

В (35) используется левая угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$, а в (36) правая угловая скорость.

Упругое основание будем характеризовать упругим потенциалом $U(\boldsymbol{\theta})$. Тогда упругий момент, действующий со стороны основания на тело, определяется выражением (18)

$$\mathbf{M}_e = -\mathbf{Z}^{-T}(\boldsymbol{\theta}) \cdot \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\theta}} + \mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\omega}) \times \boldsymbol{\omega}, \quad (37)$$

где последнее слагаемое в правой части в дальнейшем будет игнорироваться. Если потенциал $U(\boldsymbol{\theta})$ трансверсально изотропен, то выражение (37) упрощается см.(21) – (22).

$$\mathbf{M}_e = -2 \frac{\partial U}{\partial(\boldsymbol{\theta}^2)} - \frac{\partial U}{\partial(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta})} \mathbf{Z}^{-T} \cdot \mathbf{k} \quad (38)$$

Оно еще больше упрощается для изотропного основания, у которого $\partial U / \partial(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta}) = 0$. В дальнейшем будем предполагать, что выполнено неравенство

$$\mathbf{a} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}} \cdot \mathbf{a} > 0, \quad \forall \mathbf{a} : |\mathbf{a}| \neq 0, \quad (39)$$

где

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}} = & 2 \frac{\partial U}{\partial(\boldsymbol{\theta}^2)} \mathbf{E} + 2 \frac{\partial^2 U}{\partial(\boldsymbol{\theta}^2) \partial(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta})} (\boldsymbol{\theta} \mathbf{k} + \mathbf{k} \boldsymbol{\theta}) + \\ & + 4 \frac{\partial^2 U}{\partial(\boldsymbol{\theta}^2) \partial(\boldsymbol{\theta}^2)} \boldsymbol{\theta} \boldsymbol{\theta} + \frac{\partial^2 U}{\partial(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta}) \partial(\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{k})} \mathbf{k} \mathbf{k} \end{aligned} \quad (40)$$

Второй закон динамики Эйлера записывается в форме

$$[\mathbf{P} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}^T \cdot \boldsymbol{\omega}] + \mathbf{Z}^{-T} \cdot \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \mathbf{M}_{ext}, \quad (41)$$

где \mathbf{M}_{ext} — внешний момент, вычисленный относительно неподвижной точки O. Через правую угловую скорость уравнение (41) записывается следующим образом

$$\mathbf{A} \cdot \dot{\boldsymbol{\Omega}} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\Omega} + \mathbf{Z}^{-1} \cdot \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{M}_{ext}, \quad (42)$$

где использовано тождество (15). Внешний момент представим в виде суперпозиции потенциальной и непотенциальной части

$$\mathbf{M}_{ext} = -\mathbf{Z}^{-T} \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial \boldsymbol{\theta}} + \mathbf{M}_{ex}. \quad (43)$$

Тогда уравнение (42) можно переписать в виде

$$\mathbf{A} \cdot \dot{\boldsymbol{\Omega}} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\Omega} + \mathbf{Z}^{-1} \cdot \frac{\partial(U + \Pi)}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \mathbf{P}^T(\boldsymbol{\theta}) \cdot \mathbf{M}_{ex} \quad (44)$$

К уравнениям (41) или (44) необходимо добавить одно из двух уравнений связи

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{Z}^{-1} \cdot \boldsymbol{\omega}, \quad \dot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{Z}^{-T} \cdot \boldsymbol{\Omega}, \quad (45)$$

а также начальные условия

$$t = 0: \quad \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0, \quad \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_0, \quad \boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Omega}_0 \quad (46)$$

Основными неизвестными в принятой постановке задачи является вектор поворота $\boldsymbol{\theta}$ и вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ или $\boldsymbol{\Omega}$.

4 Движение твердого тела на изотропной упругой опоре

В качестве иллюстрации рассмотрим простейшую задачу о движении твердого тела с шаровым тензором инерции на изотропной упругой опоре

$$\mathbf{A} = A\mathbf{E}, \quad \mathbf{U} = u(\theta^2), \quad \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \theta} = 2u'(\theta^2)\boldsymbol{\theta} = c(\theta^2)\boldsymbol{\theta}, \quad (47)$$

где штрих означает производную по аргументу θ^2 . Уравнения (42) и (43) принимают вид

$$A\dot{\boldsymbol{\omega}} + b\boldsymbol{\omega} + c(\theta^2)\boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}, \quad A\dot{\boldsymbol{\Omega}} + b\boldsymbol{\Omega} + c(\theta^2)\boldsymbol{\theta} = \mathbf{0} \quad (48)$$

В уравнения (48) добавлен момент трения $\mathbf{M}_f = -b\boldsymbol{\omega}$, где $b = \text{const}$, $b > 0$. Разумеется, уравнения (48) не являются независимыми. К уравнениям (48) следует добавить уравнения (45).

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{\omega} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\omega} + \frac{1-g}{\theta^2}\boldsymbol{\theta} \times (\boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\omega}) = \boldsymbol{\Omega} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\Omega} + \frac{1-g}{\theta^2}\boldsymbol{\theta} \times (\boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\Omega}) \quad (49)$$

и начальные условия

$$t = 0: \quad \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0, \quad \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_0 \quad (\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Omega}_0 = \mathbf{P}^T(\boldsymbol{\theta}_0) \cdot \boldsymbol{\omega}_0) \quad (50)$$

Систему (48) – (50) можно решать либо с использованием левой угловой скорости (первые уравнения системы), либо с использованием правой угловой скорости (вторые уравнения системы). Система (48) – (49) существенно нелинейна. Чтобы подчеркнуть различие в подходах к решению этой системы, рассмотрим сначала классический подход. При этом обычно работают с правыми угловыми скоростями. Кроме того, используют какую-либо систему параметров для представления тензора поворота. Наиболее популярной является система углов Эйлера, которой мы и воспользуемся.

$$\mathbf{P}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{Q}(\psi \mathbf{k}) \cdot \mathbf{Q}(\vartheta \mathbf{p}) \cdot \mathbf{Q}(\varphi \mathbf{k}) = \mathbf{Q}(\vartheta \mathbf{p}') \cdot \mathbf{Q}(\beta \mathbf{k}), \quad (51)$$

где

$$\beta = \varphi + \psi, \quad \mathbf{p}' = \mathbf{Q}(\psi \mathbf{k}) \cdot \mathbf{p}, \quad \mathbf{p}' \cdot \mathbf{k} = \mathbf{p} \cdot \mathbf{k} = 0 \quad (52)$$

Для нахождения вектора поворота через углы Эйлера следует воспользоваться формулами (5), (6). Тогда система (48) – (49) эквивалентна следующим трем уравнениям для углов Эйлера ψ, ϑ, φ

$$\begin{aligned} A[\dot{\beta} - \dot{\psi}(1 - \cos \vartheta)] + \frac{c(\theta^2)\theta}{2 \sin \theta} \sin \beta (1 + \cos \vartheta) &= 0 \\ A[\ddot{\vartheta} + \dot{\psi} \dot{\varphi} \sin \vartheta] + \frac{c(\theta^2)\theta}{2 \sin \theta} \sin \vartheta (1 + \cos \beta) &= 0 \\ A[(\dot{\psi} \sin \vartheta) - \dot{\varphi} \vartheta] + \frac{c(\theta^2)\theta}{2 \sin \theta} \sin \beta \sin \vartheta &= 0 \end{aligned} \quad (53)$$

Дополнительно имеем уравнение связи (5) для выражения θ через ϑ и β

$$1 + 2 \cos \theta = \cos \vartheta + \cos \beta + \cos \vartheta \cos \beta, \quad \beta = \varphi + \psi \quad (54)$$

В системе (53) принято, что $\mathbf{b} = 0$, т.е. трение отсутствует. Система (53) – (54) достаточно неприятна, и нам не удалось сколь-нибудь полно проанализировать ее.

Показательно, что при выводе (53) мы воспользовались априорным представлением (51) для тензора поворота. Оно допустимо, равно как совершенно правильной является система (53) – (54). Можно было бы воспользоваться какой-либо другой системой углов, но неизменным остался бы априорный характер выбора представления для тензора поворота. Между тем, этот выбор является чрезвычайно важным. На самом деле в каждой задаче тензор поворота должен представляться только в одной форме, если мы хотим получить обозримое решение. Это единственное представление должно не угадываться, а определяться в процессе решения задачи. Именно это обстоятельство подчеркивалось в работе [1]. Там выбор представления для тензора поворота определялся строением интеграла энергии. Для рассматриваемой нами системы (48) – (49) интеграла энергии нет. Однако, существуют интегралы другого типа. Покажем, как интегрируется система (48) – (49).

Из уравнений (48) следует, что

$$A(\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\Omega})' + \mathbf{b}(\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\Omega}) = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\Omega} = \exp\left(-\frac{\mathbf{b}}{A}t\right)(\boldsymbol{\omega}_0 - \boldsymbol{\Omega}_0) \quad (55)$$

Таким образом получили три интеграла. Теперь возможны два случая

$$\text{a) } \boldsymbol{\omega}_0 - \boldsymbol{\Omega}_0 = \mathbf{0}, \quad \text{b) } \boldsymbol{\omega}_0 - \boldsymbol{\Omega}_0 = |\boldsymbol{\omega}_0 - \boldsymbol{\Omega}_0| \mathbf{e} \neq 0$$

В первом случае решение элементарно, поскольку (55) дает

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\Omega} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Omega} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\Omega}(t) = \lambda(t)\boldsymbol{\theta}(t)$$

Подставляя это выражение в (48) и (49), получаем

$$A\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + c(\theta^2)\theta = 0, \quad \dot{\theta} = \lambda(t)\theta(t)$$

Из второго уравнения этой системы следует, что вектор поворота неизменен по направлению. Поэтому векторные уравнения сразу переписываются в скалярной форме

$$A\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + c(\theta^2)\theta = 0, \quad \dot{\theta} = \lambda\theta, \quad \boldsymbol{\theta} = \theta \mathbf{m}, \quad \mathbf{m} = \text{const} \quad (56)$$

Второе уравнение этой системы служит для определения функции λ , которая мало интересна. Первое уравнение легко интегрируется в случаях: а) $\mathbf{b} = 0$, $c(\theta^2) > 0$ — любая функция; б) $c(\theta^2) = c = \text{const}$ — линейно упругое основание. Качественный анализ системы (56) очевиден и хорошо известен.

Обратимся к случаю, когда $\boldsymbol{\omega}_0 \neq \boldsymbol{\Omega}_0$. Из уравнения (49) следует, что

$$\mathbf{g}(\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\Omega}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\theta} \times (\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\Omega}) \quad (57)$$

С учетом (55) это равенство можно переписать в виде

$$\mathbf{g}(\theta) \exp\left(-\frac{\mathbf{b}}{A}t\right)(\boldsymbol{\omega}_0 - \boldsymbol{\Omega}_0) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\theta} \times (\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\Omega}) \quad (58)$$

С учетом формул (8) правую часть (58) можно переписать в виде

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{\theta} \times (\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\Omega}) = \sin \theta \boldsymbol{\theta} \times \dot{\boldsymbol{\theta}}$$

Тогда уравнение (58) примет вид

$$\frac{2(1 - \cos \theta)}{\theta^2} \boldsymbol{\theta} \times \dot{\boldsymbol{\theta}} = (\boldsymbol{\omega}_0 - \boldsymbol{\Omega}_0) \exp\left(-\frac{b}{A}t\right) \quad (59)$$

Из этого уравнения видно, что вектор $\boldsymbol{\theta}$ лежит в плоскости, ортогональной вектору $\boldsymbol{\omega}_0 - \boldsymbol{\Omega}_0$. Следовательно, его можно представить в виде

$$\boldsymbol{\theta}(t) = \theta(t) \mathbf{Q}(\psi \mathbf{e}) \cdot \mathbf{m}, \quad \mathbf{m} = \boldsymbol{\theta}_0 / \theta_0, \quad \mathbf{m} \cdot \mathbf{e} = 0, \quad \psi(0) = 0, \quad (60)$$

где \mathbf{e} есть орт вектора $\boldsymbol{\omega}_0 - \boldsymbol{\Omega}_0$. Из (60) сразу следует, что

$$\boldsymbol{\theta} \times \dot{\boldsymbol{\theta}} = \dot{\psi} \theta^2 \mathbf{e} \quad (61)$$

Подставляя (61) в (59), получаем

$$\dot{\psi} = \frac{|\boldsymbol{\omega}_0 - \boldsymbol{\Omega}_0|}{2(1 - \cos \theta)} \exp\left(-\frac{b}{A}t\right) > 0$$

Это выражение можно переписать в виде

$$\dot{\psi} = \frac{1 - \cos \theta_0}{1 - \cos \theta} \dot{\psi}_0 \exp\left(-\frac{b}{A}t\right), \quad \dot{\psi}_0 > 0 \quad (62)$$

Получим уравнение для нахождения угла поворота θ . Для этого вычислим правую угловую скорость

$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{\dot{\theta}}{\theta} \boldsymbol{\theta} + \frac{\sin \theta}{\theta} \dot{\psi} \mathbf{e} \times \boldsymbol{\theta} - (1 - \cos \theta) \dot{\psi} \mathbf{e}$$

Подставляя это выражение во второе уравнение системы (48) и проецируя получившееся уравнение на вектор поворота $\boldsymbol{\theta}$, вектор \mathbf{e} и вектор $\mathbf{e} \times \boldsymbol{\theta}$, получаем три скалярных уравнения. Причем, проекции на \mathbf{e} и $\mathbf{e} \times \boldsymbol{\theta}$ оказываются тождествами в силу (62), а проекция на $\boldsymbol{\theta}$ дает уравнение для угла поворота θ

$$A(\ddot{\theta} - \sin \theta \dot{\psi}^2) + b\dot{\theta} + c(\theta^2)\theta = 0 \quad (63)$$

Если трение отсутствует, т.е. $b = 0$, то уравнение (63) с учетом (62) допускает решение в квадратурах. При этом, в частности, уравнение (63) показывает существование регулярной прецессии тела на упругом основании. Скорость прецессии $\dot{\psi}$ постоянна и определяется выражением

$$\dot{\psi}^2 = \frac{c(\theta^2)\theta}{A \sin \theta}, \quad \theta = \text{const} \quad (64)$$

Регулярная прецессия относится к случаю, когда ось поворота и ось вращения тела ортогональны между собой

$$\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\Omega} = 0$$

При наличии трения уравнение (63) допускает ясное качественное исследование, но не интегрируется в квадратурах даже для линейного упругого основания, когда $c(\theta^2) = c = \text{const}$.

Согласно (60) для тензора поворота имеем представление

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q}(\theta) = \mathbf{Q}(\psi \mathbf{e}) \cdot \mathbf{Q}(\theta \mathbf{m}) \cdot \mathbf{Q}^T(\psi \mathbf{e}) \quad (65)$$

Как видим, это выражение отличается от (51) если $\mathbf{e} \neq \mathbf{k}$. При этом углы θ и ψ также являются углами Эйлера, причем угол собственного вращения φ равен $\varphi = -\psi$. Однако, выбор осей поворота в (65), осуществленный в процессе решения задачи, оказался отличным от выбора осей в (51). При принятии (51) система (53) в общем случае, видимо, не интегрируется. Однако, если в (51) принять

$$\mathbf{p} = \theta_0 / |\theta_0|, \quad \mathbf{k} = \mathbf{e} = (\boldsymbol{\omega}_0 - \boldsymbol{\Omega}_0) / |\boldsymbol{\omega}_0 - \boldsymbol{\Omega}_0|, \quad \varphi = -\psi, \quad \beta = 0, \quad \vartheta = \theta,$$

то система (53) сводится к уравнениям (62) и (63) при $\mathbf{b} = 0$ и интегрируется в квадратурах.

5 Равновесные положения тела на упругом основании при действии крутящего момента

Рассмотрим равновесные положения тела для некоторых типов внешнего момента.

5.1 Натуральная равновесная конфигурация

В этом случае $\mathbf{M}_{\text{ext}}, \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\Omega} = \mathbf{0}$. Уравнение (41) принимает вид

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \mathbf{0} \Rightarrow 2 \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial (\theta^2)} \boldsymbol{\theta} + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta})} \mathbf{k} = \mathbf{0} \quad (66)$$

Согласно условию (39) имеем, что

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial (\theta^2)} > 0, \quad \forall \boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\theta}, \quad (67)$$

Это одно из необходимых условий, гарантирующих выполнение неравенства (39). Тогда из (66) видим, что вектор $\boldsymbol{\theta}$ направлен по \mathbf{k} . Вместо (66) теперь можем записать

$$2 \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial (\theta^2)} (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta}) + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta})} = 0 \quad (68)$$

Дополнительно к условию (39) примем, что выполняется следующее ограничение на энергию

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta})} = F(\theta^2, \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta}) \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta}, \quad F(\theta^2, \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta}) + 2 \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial (\theta^2)} > 0 \quad (69)$$

При выполнении (67) и (69) уравнение (68) имеет единственное решение $\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta} = 0$, т.е. $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}$.

Всюду в дальнейшем условия (39) и (69) будут предполагаться выполненными. Например, эти условия выполнены для энергии вида

$$\mathcal{U}(\theta^2, \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{2} \frac{\alpha^2 C_1 \theta^2}{\alpha^2 - \theta^2 + (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta})^2} + \frac{1}{2} \frac{\beta^2 (C_3 - C_1) (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta})^2}{\beta^2 - (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta})^2}, \quad (70)$$

где $\alpha^2 > 0$, $\beta^2 > 0$, $C_1 > 0$, $C_3 > 0$ являются постоянными, причем, C_1 называется жесткостью на изгиб, а C_3 — жесткостью на кручение. При использовании (70) подразумевается, что начальные условия удовлетворяют неравенствам

$$\theta_0^2 - (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta}_0)^2 < \alpha^2, \quad (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta}_0)^2 < \beta^2$$

Тогда очевидно, что при всех t будут выполнены неравенства

$$\theta^2(t) \leq \alpha^2, \quad \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta}(t) \leq \beta^2$$

Для реальных опор постоянные α^2 и β^2 относительно малы $\alpha^2 \sim 0.1$, $\beta^2 \sim 0.1$. Если параметры α^2 и β^2 устремить к бесконечности (мягкие опоры), то получим простейшую форму энергии

$$\mathcal{U}(\theta^2, \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{2} C_1 (\theta^2 - (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta})^2) + \frac{1}{2} C_3 (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta})^2, \quad (71)$$

которая будет широко использоваться в дальнейшем.

5.2 Мертвый момент

Пусть на тело действует внешний момент

$$\mathbf{M}_{\text{ext}} = \mathbf{M}_{\text{ex}} = L\mathbf{k} \quad (72)$$

Уравнение (41) принимает вид

$$2 \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial (\theta^2)} \boldsymbol{\theta} + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta})} \mathbf{Z}^{-\text{T}} \cdot \mathbf{k} = L\mathbf{k} \quad (73)$$

С учетом представления (11) имеем

$$\mathbf{Z}^{-\text{T}} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{k} + \frac{1-g}{\theta^2} [(\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{k}) \boldsymbol{\theta} - \theta^2 \mathbf{k}] \quad (74)$$

Умножая обе части (73) векторно на \mathbf{k} и учитывая (74) получаем

$$\left[2 \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial (\theta^2)} + \frac{1-g}{\theta^2} (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta}) \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta})} \right] \mathbf{k} \times \boldsymbol{\theta} + \frac{1}{2} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta})} [\boldsymbol{\theta} - (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta}) \mathbf{k}] = \mathbf{0} \quad (75)$$

Покажем, что должно выполняться равенство

$$\mathbf{k} \times \boldsymbol{\theta} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\theta} = (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta}) \mathbf{k} \quad (76)$$

Допустим, что это не так. Тогда из (75) следует два равенства

$$2 \frac{\partial U}{\partial(\theta^2)} + \frac{1-g}{\theta^2} (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta}) \frac{\partial U}{\partial(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta})} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta})} = 0,$$

которые невозможны в силу (67). Следовательно, условие (76) должно быть выполнено. Подставляя (76) в (73), получаем

$$2 \frac{\partial U}{\partial(\theta^2)} (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta}) + \frac{\partial U}{\partial(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta})} = L \quad (77)$$

В силу неравенства (69) это уравнение имеет единственное решение. Если принять (71), то получим

$$\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta} = L/C_3, \quad \boldsymbol{\theta} = L\mathbf{k}/C_3 \quad (78)$$

5.3 Касательный момент

Пусть внешний момент задан выражением

$$\mathbf{M}_{\text{ext}} = \mathbf{M}_{\text{ex}} = L\mathbf{P} \cdot \mathbf{k}, \quad (79)$$

т.е. этот момент стремится повернуть тело вокруг оси $\mathbf{k}' = \mathbf{P} \cdot \mathbf{k}$.

Вместо уравнения (73) здесь имеем

$$2 \frac{\partial U}{\partial(\theta^2)} \boldsymbol{\theta} + \frac{\partial U}{\partial(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta})} \mathbf{Z}^{-1} \cdot \mathbf{k} = L\mathbf{k}, \quad (80)$$

где использованы тождества $\mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}$, $\mathbf{P}^T \cdot \mathbf{Z}^{-T} = \mathbf{Z}^{-1}$. Аналогично предыдущему показывается, что $\boldsymbol{\theta} = (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta})\mathbf{k}$. В результате приходим к (77) или, в частности, к (78).

5.4 Полукасательный момент

Полукасательным будем называть момент, предложенный Е.А.Николаи [3].

$$\mathbf{M}_{\text{ext}} = \mathbf{M}_{\text{ex}} = L(\mathbf{k} + \mathbf{P} \cdot \mathbf{k}) / \sqrt{2(1 + \mathbf{k} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{k})} \quad (81)$$

Уравнение статики принимает вид

$$2 \frac{\partial U}{\partial(\theta^2)} \boldsymbol{\theta} + \frac{\partial U}{\partial(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta})} \mathbf{Z}^{-T} \cdot \mathbf{k} = L(\mathbf{k} + \mathbf{P} \cdot \mathbf{k}) \sqrt{2(1 + \mathbf{k} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{k})} \quad (82)$$

В общем случае уравнение (82) имеет несчетное множество решений, но практический интерес среди них представляет только решение (76) – (78). Для энергии (70) это решение единственно.

Замечание. Моменты (72), (79) и (81) были введены в рассмотрение Е.А.Николаи [3]. Легко убедиться, что все они неконсервативны. Г.Циглер ввел в употребление консервативный полукасательный момент, но последний существенно отличается от момента (81) тем, что его модуль не остается постоянным.

Рассмотрим еще два типа внешних моментов, которые в отличие от уже рассмотренных являются консервативными.

5.5 Консервативный момент - 1

Сначала рассмотрим потенциал, который не является аналитическим. В приложениях случаи неаналитических потенциалов встречаются, хотя и относительно редко. Для данной работы потенциал такого рода представляет определенный интерес, поскольку внешний момент, порождаемый этим потенциалом и потому являющийся консервативным, ведет к так называемому парадоксу Николаи.

Пусть потенциал задан выражением

$$\Pi = -L \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta} \sqrt{\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\theta}} / |\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta}|, \quad L \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta} > 0 \quad (83)$$

Последнее неравенство исключает случай “чистого изгиба без кручения”, который нас не интересует. Далее рассматриваем случай $L > 0$, т.к. случай $L < 0$ по существу приводит к аналогичным результатам. В случае статики уравнение (44) дает ($\mathbf{M}_{\text{ex}} = \mathbf{0}$)

$$\frac{\partial(\Pi + U)}{\partial \boldsymbol{\theta}} = 0 \Rightarrow 2 \frac{\partial U}{\partial(\boldsymbol{\theta}^2)} \boldsymbol{\theta} + \frac{\partial U}{\partial(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta})} \mathbf{k} = L \boldsymbol{\theta} / \sqrt{\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\theta}} \quad (84)$$

Здесь сразу видим, что при выполнении неравенства $\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta} > 0$ вектор поворота направлен по \mathbf{k} и (84) принимает вид

$$2 \frac{\partial U}{\partial(\boldsymbol{\theta}^2)} (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta}) + \frac{\partial U}{\partial(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta})} = L$$

С учетом (69) это уравнение имеет единственное решение. Если принять энергию (71) то решение дается формулами (78).

5.6 Консервативный момент - 2

Зададим внешний потенциал $\Pi(\boldsymbol{\theta})$ в виде

$$\Pi = -L \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta} \Rightarrow \frac{\partial \Pi}{\partial \boldsymbol{\theta}} = -L \mathbf{k} \quad (85)$$

Уравнение статики записывается в форме

$$2 \frac{\partial U}{\partial(\boldsymbol{\theta}^2)} \boldsymbol{\theta} + \frac{\partial U}{\partial(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta})} \mathbf{k} = L \mathbf{k} \quad (86)$$

Отсюда следует, что вектор поворота направлен по \mathbf{k} , т.е. имеем чистое кручение, а решение уравнения (86) единственно. Для энергии (71) оно дается формулами (78).

Итак, выше рассмотрены пять случаев задания внешних моментов. Всем им отвечает одно и то же положение равновесия: тело в упругой опоре закручено вокруг собственной оси. В положении равновесия все рассмотренные моменты неразличимы между собой. Понятно, что положение равновесия реализуется в действительности только тогда, когда оно устойчиво относительно малых возмущений. При наложении малых возмущений на положение равновесия приходится рассматривать уравнения динамики, а при движениях тела все рассмотренные выше моменты ведут себя по разному. Поэтому суждение об устойчивости одного и того же положения равновесия может быть получено только в результате анализа каждого случая в отдельности.

6 Устойчивость в линейном приближении. Уравнения в вариациях

Одним из наиболее употребительных методов исследования устойчивости является подход, основанный на наложении малых колебаний на равновесную конфигурацию, т.е. на анализе так называемых уравнений в вариациях. Известно [4], что такой подход не всегда приводит к правильным результатам, но, тем не менее, он широко используется в силу своей относительной простоты и хорошего соответствия здравому смыслу. Воспользуемся этим методом и в данном случае. Характеристики равновесного положения тела будем снабжать индексом "0": \mathbf{P}_0 , $\boldsymbol{\theta}_0$ и т.д. Введем в рассмотрение возмущенные вектор поворота $\boldsymbol{\theta}_\varepsilon$ и тензор поворота \mathbf{P}_ε .

$$\boldsymbol{\theta}_\varepsilon = \boldsymbol{\theta}_0 + \varepsilon \boldsymbol{\varphi}, \quad \mathbf{P}_\varepsilon = \exp[\boldsymbol{\theta}_\varepsilon \times \mathbf{E}], \quad |\varepsilon| \ll 1, \quad (87)$$

где $\boldsymbol{\varphi}$ есть первая вариация вектора $\boldsymbol{\theta}_\varepsilon$.

Выпишем возмущенные уравнения движения. Для определенности будем использовать уравнение (44).

$$\mathbf{A} \cdot \dot{\boldsymbol{\Omega}}_\varepsilon + \boldsymbol{\Omega}_\varepsilon \times \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\Omega}_\varepsilon + \mathbf{Z}_\varepsilon^{-1} \cdot \frac{\partial(\mathbf{U} + \Pi)}{\partial \boldsymbol{\theta}_\varepsilon} = \mathbf{P}_\varepsilon^\top \cdot \mathbf{M}_{\text{ex}, \varepsilon} \quad (88)$$

Для равновесных состояний ($\boldsymbol{\Omega}_0 = 0$) имеем

$$\mathbf{Z}_0^{-1} \cdot \frac{\partial(\mathbf{U} + \Pi)}{\partial \boldsymbol{\theta}_0} = \mathbf{P}_0^\top \cdot \mathbf{M}_{\text{ex}, 0} \quad (89)$$

Здесь и далее будут использоваться обозначения

$$\frac{\partial(\mathbf{U} + \Pi)}{\partial \boldsymbol{\theta}_0} \equiv \left. \frac{\partial(\mathbf{U} + \Pi)}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right|_{\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0}, \quad \frac{\partial^2(\mathbf{U} + \Pi)}{\partial \boldsymbol{\theta}_0 \partial \boldsymbol{\theta}_0} \equiv \left. \frac{\partial^2(\mathbf{U} + \Pi)}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}} \right|_{\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0}$$

При получении уравнений в вариациях используем технику и обозначения п.2.3. Дифференцируя (88) по ε и полагая $\varepsilon = 0$, получаем

$$\mathbf{A} \cdot \ddot{\boldsymbol{\zeta}}_0 + \mathbf{Z}_0^{-1} \cdot \frac{\partial^2(\mathbf{U} + \Pi)}{\partial \boldsymbol{\theta}_0 \partial \boldsymbol{\theta}_0} \cdot \mathbf{Z}_0^{-\top} \cdot \boldsymbol{\zeta}_0 + (\mathbf{Z}^{-1})^* \cdot \mathbf{Z}_0 \cdot \mathbf{P}_0^\top \cdot \mathbf{M}_{\text{ex}, 0} = -\boldsymbol{\zeta}_0 \times \mathbf{P}_0^\top \cdot \mathbf{M}_{\text{ex}, 0} + \mathbf{P}_0^\top \cdot (\mathbf{M}_{\text{ex}})^* \quad (90)$$

Напомним, что $\mathbf{M}_{\text{ex}, 0}$ это только непотенциальная часть момента. Для первой вариации тензора-интегратора $\mathbf{Z}_\varepsilon^{-1}$ имеем представление

$$\begin{aligned} (\mathbf{Z}^{-1})^* &= -\frac{1}{2} \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{E} + \frac{1-g_0}{\theta_0^2} (\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{E} \times \boldsymbol{\theta}_0 + \boldsymbol{\theta}_0 \times \mathbf{E} \times \boldsymbol{\varphi}) + \\ &+ \left[\frac{d}{d\boldsymbol{\theta}} \left(\frac{1-g}{\theta^2} \right) \right]_{\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0} \left(\frac{1}{\theta_0} \boldsymbol{\theta}_0 \cdot \boldsymbol{\varphi} \right) \boldsymbol{\theta}_0 \times \mathbf{E} \times \boldsymbol{\theta}_0 \end{aligned}$$

Кроме того, для дальнейшего необходима формула

$$\mathbf{Z}^{-\top} \cdot \mathbf{Z}^{-1} = \left(g^2 + \frac{1}{4} \theta^2 \right) \mathbf{E} + \left(\frac{1-g^2}{\theta^2} - \frac{1}{4} \right) \boldsymbol{\theta} \boldsymbol{\theta}$$

Для энергии деформации примем простейшее выражение (71). Тогда будем иметь

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \theta \partial \theta} = C_1 (\mathbf{E} - \mathbf{k}\mathbf{k}) + C_3 \mathbf{k}\mathbf{k}, \quad \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \theta_0 \partial \theta_0} = -\delta_4 C_3 (\mathbf{E} - \mathbf{k}), \quad (91)$$

где $\delta_4 = 1$ для консервативного момента (83) и $\delta_4 = 0$ во всех остальных случаях. Учтем также, что в положении равновесия имеем

$$\theta_0 = L\mathbf{k}/C_3, \quad \mathbf{M}_{\text{ex},0} = \delta_3 L\mathbf{k}, \quad (92)$$

где $\delta_3 = 1$ для моментов (72), (79) и (81); $\delta_3 = 0$ для консервативных моментов.

С учетом сказанного уравнение (90) заметно упрощается и принимает вид

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \ddot{\zeta}_0 + [(C_1 - \delta_4 C_3) \mathbf{Z}_0^{-1} \cdot \mathbf{Z}_0^{-T} + ((1 + \delta_4) C_3 - C_4) \mathbf{k}\mathbf{k}] \cdot \zeta_0 - \frac{1}{2} \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{M}_{\text{ex},0} + \\ + \frac{1 - g_0}{\theta_0^2} \theta_0 \times (\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{M}_{\text{ex},0}) = -\zeta_0 \times \mathbf{M}_{\text{ex},0} + \mathbf{P}_0^T \cdot (\mathbf{M}_{\text{ex}})^* \end{aligned} \quad (93)$$

Примем дополнительно, что тензор инерции \mathbf{A} трансверсально изотропен, а для вариации ζ_0 и $\boldsymbol{\varphi}$ используем разложения

$$\zeta_0 = x\mathbf{k} + \mathbf{y}, \quad \mathbf{y} \cdot \mathbf{k} = 0, \quad \boldsymbol{\varphi} = \mathbf{Z}_0^{-T} \cdot \zeta_0 = x\mathbf{k} + g_0 \mathbf{y} + \theta_0 2\mathbf{k} \times \mathbf{y} \quad (94)$$

В этом случае уравнение (93) эквивалентно двум уравнениям

$$A_3 \ddot{x} + C_3 x = \mathbf{k} \cdot \mathbf{M}_{\text{ex}}^*, \quad (95)$$

$$\begin{aligned} A_1 \ddot{\mathbf{y}} + \left[(C_1 - \delta_4 C_3) \left(g_0^2 + \frac{\theta_0^2}{4} \right) - \frac{\delta_3 L^2}{4C_3} + \delta_3 C_3 g_0 (1 - g_0) \right] \mathbf{y} - \frac{\delta_3 L}{2} \mathbf{k} \times \mathbf{y} = \\ = (\mathbf{P}_0^T - \mathbf{k}\mathbf{k}) \cdot (\mathbf{M}_{\text{ex}})^* \end{aligned} \quad (96)$$

Последние два уравнения справедливы для всех рассмотренных в пункте 5 случаев, которые следует в дальнейшем изучать отдельно.

6.1 Устойчивость натурального состояния

В этом случае внешний момент отсутствует и $\theta_0 = \mathbf{0}$. Уравнения (95) – (96) сводятся к следующим

$$A_3 \ddot{x} + C_3 x = 0, \quad A_1 \ddot{\mathbf{y}} + C_1 \mathbf{y} = \mathbf{0}$$

Колебательный характер решений этих уравнений очевиден, т.е. отсчетное положение тела есть устойчивое положение равновесия при отсутствии внешних моментов.

6.2 Мертвый момент

В этом случае имеем

$$\delta_4 = 0, \quad \delta_3 = 1, \quad \mathbf{M}_{\text{ex}}^* = \mathbf{0}$$

Уравнения (95) – (96) принимают вид

$$A_3 \ddot{x} + C_3 x = 0,$$

$$A_1 \ddot{\mathbf{y}} + \left[C_1 \left(g_0^2 + \frac{\theta_0^2}{4} \right) - \frac{L^2}{4C_3} + C_3 g_0 (1 - g_0) \right] \mathbf{y} - \frac{L}{2} \mathbf{k} \times \mathbf{y} = \mathbf{0} \quad (97)$$

Решения второго из этих уравнений содержат экспоненциально растущую во времени составляющую. Поэтому положения равновесия твердого тела, повернутого вокруг своей оси в упругой опоре, неустойчиво при любом сколь угодно малом мертвом моменте. Это явление получило название парадокса Николаи [5], [6].

6.3 Касательный момент

В этом случае имеем

$$\delta_4 = 0, \quad \delta_3 = 1, \quad \mathbf{M}_{\text{ex}}^* = L \mathbf{P}_0 \cdot (\mathbf{y} \times \mathbf{k}), \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{M}_{\text{ex}}^* = 0, \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{P}_0 = \mathbf{k}$$

Уравнения (95) – (96) принимают вид

$$A_3 \ddot{x} + C_3 x = 0, \\ A_1 \ddot{\mathbf{y}} + \left[C_1 \left(g_0^2 + \frac{\theta_0^2}{4} \right) - \frac{L^2}{4C_3} + C_3 g_0 (1 - g_0) \right] \mathbf{y} + \frac{L}{2} \mathbf{k} \times \mathbf{y} = \mathbf{0} \quad (98)$$

И в этом случае имеем неустойчивость при сколь угодно малом значении касательного внешнего момента L . Сравнивая уравнения (97) и (98) замечаем, что они различаются только знаком у гироскопического члена. Поэтому при сложении этих уравнений гироскопический член исчезает. Отсюда у Е.А.Николаи и возникла идея введения полукасательного момента.

6.4 Полукасательный момент

В этом случае имеем

$$\delta_4 = 0, \quad \delta_3 = 1, \quad \mathbf{M}_{\text{ex}}^* = \frac{1}{2} L \mathbf{P}_0 \cdot (\mathbf{y} \times \mathbf{k}), \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{M}_{\text{ex}}^* = 0$$

Уравнения (95) – (96) принимают вид

$$A_3 \ddot{x} + C_3 x = 0, \quad A_1 \ddot{\mathbf{y}} + \left[C_1 \left(g_0^2 + \frac{\theta_0^2}{4} \right) - \frac{L^2}{4C_3} + C_3 g_0 (1 - g_0) \right] \mathbf{y} = \mathbf{0} \quad (99)$$

Здесь анализ устойчивости сводится к отысканию наименьших по модулю значений L , которые нарушают неравенство

$$C_1 (g_0^2 + \theta_0^2/4) + C_3 g_0 (1 - g_0) > \frac{L^2}{4C_3} \quad (100)$$

Заметим, что при малых L имеем

$$g_0 = \frac{\theta_0 \sin \theta_0}{2(1 - \cos \theta_0)} \simeq 1 - \frac{1}{12} \frac{L^2}{C_3^2},$$

т.е. неравенство (100) выполнено и положение равновесия устойчиво. Структура уравнения (99) дала основание думать [5], что полукасательный момент Николаи консервативен.

6.5 Консервативный момент - 1

В этом случае имеем

$$\delta_4 = 1, \quad \delta_3 = 0, \quad \mathbf{M}_{\text{ex}}^* = \mathbf{0}$$

Уравнения (95) – (96) принимают вид

$$A_3 \ddot{x} + C_3 x = 0, \quad A_1 \ddot{y} + (C_1 - C_3) \left(g_0^2 + \frac{\theta_0^2}{4} \right) \mathbf{y} = \mathbf{0} \quad (101)$$

В этом случае при $C_1 - C_3 > 0$ имеем устойчивость, а при $C_1 - C_3 < 0$ имеем неустойчивость при любых значениях внешнего момента. Поскольку случай $C_1 - C_3 \leq 0$ вполне реален, например он имеет место для упругого основания в форме круглой тонкой пластины, то очевидно, что природа парадокса Николаи отнюдь не сводится к неконсервативному характеру внешнего момента, как это иногда утверждается в литературе.

6.6 Консервативный момент - 2

Для потенциала (85) имеем

$$\delta_4 = 0, \quad \delta_3 = 0, \quad \mathbf{M}_{\text{ex}}^* = \mathbf{0}$$

уравнения (95) – (96) сводятся к следующим

$$A_3 \ddot{x} + C_3 x = 0, \quad A_1 \ddot{y} + C_1 \left(g_0^2 + \frac{\theta_0^2}{4} \right) \mathbf{y} = \mathbf{0} \quad (102)$$

Здесь положение равновесия устойчиво при всех значениях внешнего момента L .

7 Обсуждение результатов

В пп. 5–6 показано существование равновесного положения тела, повернутого вокруг собственной оси внешним моментом, характер которого может меняться. Сама по себе упругая опора обеспечивает устойчивое положение равновесия ненагруженного тела, и в этом смысле она не содержит в себе пороков. Если теперь повернуть тело вокруг собственной оси внешним моментом, величина которого мала, т.е. отношение модуля момента $|L|$ к величине жесткости на кручение $C_3 > 0$ много меньше единицы, то возникающее положение равновесия оказывается неустойчивым для некоторых типов внешних моментов, как неконсервативных, так и консервативных. С чисто теоретической точки зрения в этом нет ничего удивительного. Однако, с практической точки зрения ситуация кажется достаточно неприятной. В самом деле, при малом внешнем моменте можно ожидать, что задачу допустимо анализировать в линейном приближении. Именно так и поступают при анализе динамики ротора в упругих опорах в большинстве работ прикладного характера. Для малых поворотов имеем

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\Omega} = \dot{\boldsymbol{\theta}}, \quad \mathbf{Z} = \mathbf{E}, \quad \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\theta}, \quad \mathbf{P} = \mathbf{E} + \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{E},$$

где для энергии принята аппроксимация (71). Тогда для касательного момента (79) уравнение (43) в линейном приближении дает

$$\mathbf{A} \cdot \ddot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{C} \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{Lk}, \quad t = 0: \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0, \quad \dot{\boldsymbol{\theta}} = \dot{\boldsymbol{\theta}}_0 \quad (103)$$

Поскольку тензоры \mathbf{A} и \mathbf{C} симметричны и положительно определены, то решение задачи (103) имеет колебательный характер и не сулит нам никаких неожиданностей. Результаты предыдущего пункта показывают, что это не так. Если мы учтем малые второго порядка, а именно таков порядок слагаемого $\mathbf{Lk} \times \mathbf{y}$ в (98), то получим неустойчивые решения. И вообще, для очень многих типов внешних моментов получаются неустойчивые решения. Эксперименты, хотя и недостаточно чистые, показывают, что на самом деле эти неустойчивые решения никогда не проявляются. Как объяснить это явное противоречие между теорией и практикой? Известно несколько объяснений. Первое заключается во влиянии сил трения. Конечно, учет трения устраняет неустойчивость при малых значениях момента L . Однако, и здесь не все понятно. Прежде всего нет полной ясности в законах трения. В работе [7] ставилась задача выяснить дестабилизирующий характер касательного момента (79), который создавался парой реактивных сил. Предполагалось, что трение, каково бы оно ни было, будет влиять примерно одинаково на движение системы при наличии момента и при его отсутствии. В этом случае мы должны иметь следующее. Выведем систему из положения равновесия и предоставим ей совершать свободные колебания. Существующее в реальности трение приведет к затуханию свободных колебаний. Можно измерить время затухания τ_* . Теперь проводим второе испытание. Системе даем то же самое начальное отклонение, но в момент уничтожения сил, создающих начальное отклонение, включаем действие касательного момента. После этого измеряем время затухания возникающих колебаний. Результат: через время τ_{**} система приходит в положение равновесия (78). Исходя из результатов п. 6, следовало ожидать, что τ_{**} будет больше τ_* т.к. положение равновесия при действии касательного момента является неустойчивым, т.е. в систему идет накачка энергии. Измерения показали, что τ_{**} почти вдвое меньше, чем τ_* . Вывод: либо при наличии касательного момента, создаваемого реактивными струями, резко возрастает трение в системе, либо при анализе устойчивости не были учтены какие-то существенные свойства системы, например, инерционные свойства упругих опор. Второе объяснение, данное Е.А.Николаи [3] заключается в том, что необходимо учитывать нарушения в трансверсальной изотропии как в тензоре инерции \mathbf{A} , так и в тензоре упругости \mathbf{C} . Тогда, согласно Николаи, потери устойчивости при сколь угодно малом L не происходит, но при малых отклонениях от трансверсальной изотропии значения критических моментов неправдоподобно малы. Наконец, третье объяснение расхождения теории и эксперимента могло бы заключаться в том, что суждение об устойчивости на основе анализа уравнений в вариациях в задачах рассматриваемого типа оказывается неверным, что теоретически вполне возможно [4]. Однако, как будет показано в следующем пункте, нелинейный анализ подтверждает факт неустойчивости.

8 Нелинейный анализ движения твердого тела на упругой опоре при действии внешнего момента

Пусть на тело на упругой трансверсально изотропной опоре действует комбинация моментов (72) и (69)

$$\mathbf{M}_{\text{ex}} = \gamma L(l_1 \mathbf{k} + l_2 \mathbf{P} \cdot \mathbf{k}), \quad \gamma = (l_1^2 + l_2^2 + 2l_1 l_2 \mathbf{k} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{k})^{-\frac{1}{2}}, \quad (104)$$

где при $l_1 = 1, l_2 = 0$ имеем мертвый момент; при $l_1 = 0, l_2 = 1$ имеем касательный момент при $l_1 = l_2 = 1$ имеем полукасательный момент.

Тензор инерции тела и энергию деформации опоры считаем трансверсально изотропными

$$\mathbf{A}(t) = \mathbf{P} \cdot [\mathbf{A}_1 \mathbf{E} + (\mathbf{A}_3 - \mathbf{A}_1) \mathbf{k} \mathbf{k}] \cdot \mathbf{P}^T = \mathbf{A}_1 \mathbf{E} + (\mathbf{A}_3 - \mathbf{A}_1) \mathbf{k}' \mathbf{k}', \quad \mathbf{k}' = \mathbf{P} \cdot \mathbf{k};$$

$$\frac{dU}{d\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{B}(x, \boldsymbol{\theta}^2) \boldsymbol{\theta} + \mathbf{D}(x, \boldsymbol{\theta}^2) \mathbf{k}, \quad x \equiv \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta}$$

Для вектора кинетического момента имеем формулы (35) и (36). Выпишем уравнение баланса энергии для внешнего момента (36).

$$\dot{\varepsilon} = \gamma L(l_1 \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{k} + l_2 \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{k}), \quad \varepsilon = \frac{1}{2} A_1 \omega^2 + \frac{1}{2} (A_3 - A_1) (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\Omega})^2 + U(\boldsymbol{\theta}) \quad (105)$$

Отсюда получаем, что

$$\varepsilon - \varepsilon_0 = L \int_0^t \gamma(\tau) \mathbf{k} \cdot (l_1 \boldsymbol{\omega}(\tau) + l_2 \boldsymbol{\Omega}(\tau)) d\tau \quad (106)$$

Если интеграл в левой части (106) ограничен при всех t , то при малых $|L|$ энергия ε мало отличается от ε_0 , и можно говорить об устойчивости. Если интеграл в правой части (106) неограниченно растет при $t \rightarrow \infty$, то имеет место накачка энергии в систему, что влечет за собой неустойчивость при любом сколь угодно малом $|L|$. Г.Циглер указывает [6], с.159-160, что при $l_1 = 1, l_2 = 0$ происходит накачка энергии, но он не приводит строгого доказательства, которое совсем не очевидно. Во всяком случае, автору не удалось получить это доказательство аналитически. Численные расчеты, проведенные с помощью Т.П.Товстик, показали, что при $l_1 = 1, l_2 = 0$ или $l_1 = 0, l_2 = 1$ энергия неограниченно растет, а при $l_1 = l_2 = 1$ энергия колеблется около значения ε_0 . Однако, анализировалось малое число различных вариантов начальных условий, поэтому сказанное носит предварительный характер. Для получения более определенных результатов будем рассуждать несколько иначе. Выпишем уравнения движения.

$$[\mathbf{A}_1 \boldsymbol{\omega} + (\mathbf{A}_3 - \mathbf{A}_1) (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{k}') \mathbf{k}'] + \mathbf{B} \boldsymbol{\theta} + \mathbf{D} \mathbf{Z}^{-T} \cdot \mathbf{k} = \gamma L (l_1 \mathbf{k} + l_2 \mathbf{k}') \quad (107)$$

Здесь использованы левые угловые скорости. Через правую угловую скорость уравнение (107) переписывается в виде

$$[\mathbf{A}_1 \boldsymbol{\Omega} + (\mathbf{A}_3 - \mathbf{A}_1) (\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{k}) \mathbf{k}] + (\mathbf{A}_3 - \mathbf{A}_1) (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\Omega}) \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{k} + \mathbf{B} \boldsymbol{\theta} + \mathbf{D} \mathbf{Z}^{-1} \cdot \mathbf{k} = \gamma L (l_1 \mathbf{k} + l_2 \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{k}) \quad (108)$$

где $\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{k}' = \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{k}$.

Вычитая (108) из (107) получаем

$$\begin{aligned} [A_1(\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\Omega}) + (A_3 - A_1)(\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{k})(\mathbf{k}' - \mathbf{k})] + (A_3 - A_1)(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\Omega})\mathbf{k} \times \boldsymbol{\Omega} + D\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{k} = \\ = \gamma L[(l_1 - l_2)\mathbf{k} + l_2\mathbf{k}' - l_1\mathbf{P}^T \cdot \mathbf{k}] \end{aligned} \quad (109)$$

Проецируя (109) на орт \mathbf{k} , получаем

$$[A_1(\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\Omega}) \cdot \mathbf{k} + (A_1 - A_3)\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\Omega}(1 - \cos \vartheta)] = \gamma L(l_1 - l_2)(1 - \cos \vartheta), \quad (110)$$

где $\cos \vartheta = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}' = \mathbf{k} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{k}$.

Преобразуем (110) к другому виду. Согласно (8) и (10) имеем

$$\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\Omega} = (\mathbf{Z} - \mathbf{Z}^T) \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}} = 2 \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} \boldsymbol{\theta} \times \dot{\boldsymbol{\theta}} \quad (111)$$

Представим $\boldsymbol{\theta}$ в виде разложения

$$\boldsymbol{\theta} = x\mathbf{k} + \mathbf{y}, \quad \mathbf{y} \cdot \mathbf{k} = 0, \quad \mathbf{y} = y(t)\mathbf{Q}(\psi(t)\mathbf{k}) \cdot \mathbf{m}, \quad (112)$$

где $\mathbf{m} \cdot \mathbf{k} = 0$, $\theta^2 = x^2 + y^2$.

Легко получить, что

$$\begin{aligned} \mathbf{k} \cdot (\boldsymbol{\theta} \times \dot{\boldsymbol{\theta}}) &= \mathbf{k} \cdot (\mathbf{y} \times \dot{\mathbf{y}}), \quad \mathbf{y} \times \dot{\mathbf{y}} = \dot{\psi} y^2 \mathbf{k}, \\ \mathbf{k} \cdot (\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\Omega}) &= 2(1 - \cos \theta) \frac{y^2}{\theta^2} \dot{\psi}, \quad (1 - \cos \vartheta) = (1 - \cos \theta) \frac{y^2}{\theta^2} \end{aligned}$$

С учетом этих соотношений равенство (110) можно переписать в виде¹

$$[(1 - \cos \vartheta)F] = \gamma L(l_1 - l_2)(1 - \cos \vartheta), \quad (113)$$

где

$$F = 2A_1\dot{\psi} + (A_1 - A_3)\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{k}$$

Заметим, что правая часть (113) знакопостоянна, причем ее знак определяется числом $L(l_1 - l_2) = \text{const}$. Пусть правая часть (113) положительна. выберем начальные условия так, что бы функция F при $t = 0$ была положительной. Тогда произведение $(1 - \cos \vartheta)F$ будет расти до тех пор пока правая часть (113) не обратится в нуль, что возможно только тогда, когда $(1 - \cos \vartheta) = 0$. Однако, в этом случае функция F должна обратиться в бесконечность. Если же правая часть (113) не обращается в нуль, то функция F должна тем более возрасть до бесконечности. Если левая часть (113) отрицательна, то начальные условия выбираем так, чтобы F при $t = 0$ была отрицательной, т.е. все рассуждения повторяем, умножив обе части (113) на (-1) . Сказанное означает, что при $l_1 \neq l_2$ тело, в конечном счете, начинает бесконечно быстро прецессировать вокруг вертикального орта \mathbf{k} , и никакое сколь угодно жесткое трансверсально изотропное упругое основание не может воспрепятствовать этому. Указанное обстоятельство, разумеется, объясняет формальные истоки парадокса

¹Равенство (113) было получено другим способом и показывалось автору в частной беседе А.М.Кривцовым.

Е.А.Николаи, но оно отнюдь не устраняет его. Действительно, любой парадокс заключается в противоречии между формально верным утверждением и интуицией или здравым смыслом. В частности, приведенное выше рассуждение вовсе не объясняет ненаблюдаемости бесконечного возрастания скорости прецессии в экспериментах. Как отмечено в предыдущем пункте, учет трения также не вполне объясняет отмеченную ненаблюдаемость потери устойчивости при сколь угодно малом внешнем моменте. Возможное объяснение парадокса Николаи может заключаться в следующем. При возрастании скорости прецессии тела до достаточно больших значений упругое основание заведомо нельзя считать безынерционным. Кроме того, никто и никогда не доказал, что упругий момент (или упругая сила) непременно должны быть позиционными. Возможно, что на самом деле упругий момент должен иметь вид (18). Хотя слагаемое, содержащее скорость, в (18) и не попадает в выражение баланса энергии, но оно определенно влияет на угловые скорости и, следовательно, на правую часть (105) или (106). Поэтому, по мнению автора, вопрос о парадоксе Е.А.Николаи нельзя считать полностью решенным: нужны и тщательные эксперименты, и дальнейшие теоретические разработки.

Список литературы

- [1] Zhilin P.A. A New Approach to the Analysis of Free Rotations of Rigid Bodies.//ZAMM Z. angew. Math. Mech. **76** (1996), **4**, pp.187-204.
- [2] Жилин П.А. Спинорные движения и устойчивость равновесных конфигураций тонких упругих стержней // Механика и процессы управления. Тр. СПбГТУ, N458, С.-Пб.: 1995, с. 56-73.
- [3] Николаи Е.Л. Труды по механике. М.: Гостехиздат, 1955. 584 с.
- [4] Меркин Д.Р. Введение в теорию устойчивости движения. М.: Наука, 1987. 304 с.
- [5] Болотин В.В. Неконсервативные задачи упругой устойчивости. М.: ГИФМЛ, 1961. 339 с.
- [6] Циглер Г. Основы теории упругой устойчивости конструкций. М.: Мир, 1971. 192 с.
- [7] Жилин П.А., Сергеев А.Д. Экспериментальное исследование устойчивости консольного стержня при кручении // Механика и процессы управления. Тр. СПбГТУ, N446, С.-Пб.: 1993, с. 174.