Нелинейная теория тонких стержней*

Аннотация

Доклад посвящен обсуждению динамической теории тонких пространственно изогнутых и естественно закрученных стержней. Предлагаемая теория включает в себя все известные варианты теории стержней, но обладает более широкой областью применимости. Предложен новый метод построения тензоров упругости и установлена их структура. При этом существенно используется новая теория симметрии тензоров, определенных в пространстве с двумя независимыми ориентациями. Для плоских упругих кривых определены все модули упругости. Значительное внимание в докладе уделено анализу ряда классических задач, включая те из них, решение которых ведет к парадоксальным результатам. В частности, подробно рассмотрена знаменитая эластика Эйлера и показано, что наряду с известными равновесными конфигурациями в ней существуют и динамические равновесные конфигурации. При этом форма упругой линии не меняется, а изогнутый стержень совершает вращательное движение вокруг вертикальной оси. Энергия деформации при этом не меняется. Подчеркнем, что речь не идет о движениях стержня как жесткого целого, поскольку заделанный торец стержня остается неподвижным. Отсюда следует, что изогнутая равновесная конфигурация в эластике Эйлера является, вопреки общепринятой точке зрения, неустойчивой. С другой стороны, этот вывод не подтверждается экспериментальными данными. Поэтому возникает парадоксальная ситуация, которая требует своего решения. Аналогичная ситуация, известная под названием парадокса Николаи, возникает при кручении стержня торцевым моментом. В этом случае эксперимент показывает, что крутящий момент, оказывает стабилизирующее действие, что находится в резком противоречии с теорией.

1 Теория стержней и современная механика

Теория тонких стержней в истории развития механики и математической физики сыграла выдающуюся роль. Чтобы яснее отобразить вклад теории тонких стержней в развитие естественных наук, перечислим только некоторые факты.

*Жилин П.А. Нелинейная теория тонких стержней // Доклад на XXXIII летней школе “Актуальные проблемы механики”, Санкт-Петербург, 2005.

Рождение обыкновенных дифференциальных уравнений. В 1691 году Якоб Бернулли вывел дифференциальное уравнение равновесия каната (нити)

$$\mathbf{T}' + \rho\mathbf{F} = \mathbf{0}. \tag{1}$$

Это было первое дифференциальное уравнение в истории науки.

Рождение уравнений в частных производных. В 1742 году Жак Даламбер вывел уравнение поперечных колебаний струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial^2 t^2} = 0. \tag{2}$$

Это было первое дифференциальное уравнение в частных производных. Разработка методов его решения привело к созданию ***теории разложения функций в ряды*** — Даниил Бернулли и Леонард Эйлер.

Рождение теории ветвления решений нелинейных дифференциальных уравнений. В 1744 году Л. Эйлер решил задачу о продольном изгибе стержня, названную впоследствии ***Эластикой Эйлера,*** и положившую начало теории ветвлений решений и теории собственных значений нелинейных операторов.

Рождение новой механики и доказательство неполноты ньютоновой механики. В 1771 году Л. Эйлер впервые вывел общие уравнения равновесия стержней

$$\mathbf{T}' + \rho\mathbf{F} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{M}' + \mathbf{R}' \times \mathbf{T} + \rho\mathbf{L} = \mathbf{0}. \tag{3}$$

Чтобы вывести уравнения (3) Л. Эйлеру понадобилось около 50 лет размышлений. При этом он совершил одно из величайших открытий в механике и физике, которое в полной мере не осознается большинством механиков и физиков вплоть до настоящего времени. А именно, он осознал, что помимо сил и моментов сил в механике фундаментальную роль играют моменты как самостоятельные сущности, не определяемые через понятие момента силы. Это означало, во-первых, необходимость введения нового фундаментального закона физики и, во-вторых, принципиальную неполноту ньютоновой механики. Это открытие Л. Эйлера имеет громадное значение во всей физике, но в полной мере ученые осознают его значение в ближайшем будущем при разработке явлений микромира, в котором второй закон динамики Эйлера играет определяющую роль. Хотя Л. Эйлер сделал решающий шаг по введению моментов, независимых от понятия момента силы, но общее определение момента было дано сравнительно недавно П.А. Жилиным, и оно еще не вошло в учебники механики.

Рождение теории устойчивости неконсервативных систем. В 1927 году Е.Л. Николаи сообщил результаты анализа устойчивости равновесной конфигурации скрученного стержня и показал, что она неустойчива при любом сколь угодно малом значении крутящего момента (парадокс Николаи). Этот результат буквально шокировал ученых того времени, привыкших к понятию критических сил по Эйлеру. Тогда же П.Ф. Папкович указал, что речь идет об анализе неконсервативной системы и потому не стоит удивляться полученному результату, поскольку возможна накачка энергии в систему. Последующее развитие теории устойчивости неконсервативных систем выявило и другие удивительные факты, например, дестабилизирующую роль внутреннего трения. В докладе будет показано, что парадокс Николаи объясняется причинами, не связанными непосредственно с неконсервативностью системы. Тем не менее, теория устойчивости неконсервативных систем в настоящее время является одним из важных разделов механики.

Рождение теории симметрии в многоориентированных пространствах. В 1977 году П.А. Жилин при построении определяющих уравнений в теории стержней и оболочек обнаружил, что применение классической теории симметрии ведет к абсурдным результатам. Анализ показал, что причиной создавшегося тупика является тот факт, что в теории стержней и оболочек вводимые тензорные объекты действуют в пространствах с двумя независимыми ориентациями. Поэтому в таком пространстве существуют тензоры четырех различных типов. Классическая теория симметрии применима только к полярным тензорам, т.е. объектам, не зависящим от выбора ориентаций в пространстве. После осознания этих фактов, не составило особого труда разработать обобщенную теорию симметрии, применимую к тензорам любого типа. Следует указать, что без обобщенной теории симметрии корректное построение общей теории стержней и оболочек оказывается невозможным, а также теории микрополярных сред оказывается невозможным. Разумеется, можно обойтись и без этой теории, если материал стержня или оболочки подчиняется известным уравнениям теории упругости, что справедливо далеко не всегда. Но даже в этом частном случае возникают, строго говоря, непреодолимые проблемы.

Выше были отмечены только те факты, которые повлияли и продолжают влиять на становление теоретического фундамента современной механики и математической физики. О громадном значении теории стержней при решении актуальных проблем техники и строительства в данном докладе можно и не говорить. К сожалению, рамки доклада не позволяют рассказать о замечательных достижениях многих исследователей при решении интереснейших конкретных задач теории стержней.

Нерешенные проблемы теории стержней. В теории стержней получено немало удивительных и даже парадоксальных результатов, которые требуют ясных объяснений. Крайне слабо изучены пространственные формы движения стержней. В рамках существующей теории стержней трудно строго исследовать важные для приложений задачи совместной динамики стержней и, например, абсолютно твердых тел, поскольку эти два два раздела механики изложены на различных и трудно совместимых языках. Основным препятствием на пути преодоления всех этих трудностей является отсутствие достаточно общей нелинейной теории стержней, изложенной на удобном для приложений языке. Первая презентация такой теории является одной из целей данного доклада. Другой, не менее важной, целью доклада является обсуждение с позиций представленной теории ряда классических задач теории стержней и выявление в них новых обстоятельств, скрытых в существующих решениях. В частности, будет дано новое истолкование парадокса Николаи, основанное на полном анализе другой классической задачи об эластике Эйлера. Автор располагает решениями целого ряда новых задач, но, к сожалению, вынужден оставить их за рамками доклада.

2 Модель стержня и его движения

Моделью тонкого стержня является оснащенная кривая, которая определяется заданием репера

$$\{\mathbf{r}(s),\ \mathbf{d}_1(s),\ \mathbf{d}_2(s),\ \mathbf{d}_3(s)\},\quad \mathbf{d}_m\cdot\mathbf{d}_n=\delta_{mn},\quad 0\le s\le l, \tag{4}$$

где s есть длина дуги кривой, l — длина кривой.

Вектор $\mathbf{r}(s)$ в (4) определяет несущую кривую, для которой задан трехгранник Френе $\{\mathbf{t}_1 \equiv \mathbf{t}, \mathbf{t}_2 \equiv \mathbf{n}, \mathbf{t}_3 \equiv \mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}\}$, где векторы $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$ и $\mathbf{b}$ суть единичные векторы касательной, главной нормали и бинормали соответственно. Для естественного трехгранника имеем формулы Серре–Френе

$$\mathbf{t}_i' = \boldsymbol{\tau} \times \mathbf{t}_i, \quad \boldsymbol{\tau}(s) = R_t^{-1}(s)\mathbf{t}(s) - R_c^{-1}(s)\mathbf{b}(s), \tag{5}$$

где R_c — радиус кривизны и R_t — радиус кручения несущей кривой, $\boldsymbol{\tau}$ — вектор Дарбу несущей кривой.

Таким образом, в каждой точке несущей кривой заданы два трехгранника: естественный трехгранник $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ и дополнительный трехгранник $\{\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3 = \mathbf{t}\}$. Векторы $(\mathbf{n}, \mathbf{b})$ и $(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2)$ лежат в нормальной плоскости к недеформированной несущей кривой, но, в общем случае, не совпадают между собой. Поперечное сечение стержня лежит в нормальной плоскости и занимает в ней область F.

Изменение трехгранника $\mathbf{d}_k(s)$ при движении вдоль несущей кривой будем характеризовать вектором $\mathbf{q}(s)$ таким, что

$$\mathbf{d}_k'(s) = \mathbf{q}(s) \times \mathbf{d}_k(s), \tag{6}$$

где $\mathbf{q}(s)$ называется вектором Дарбу оснащения.

Нетрудно установить связь между векторами Дарбу оснащения $\mathbf{q}$ и несущей кривой $\boldsymbol{\tau}$

$$\mathbf{q} = \left(\varphi' + R_t^{-1}\right)\mathbf{t} - R_c^{-1}\mathbf{b} = \varphi'\mathbf{t} + \boldsymbol{\tau}, \tag{7}$$

где φ называется углом естественной крутки стержня.

Обратимся к описанию движений стержня. Недеформированное состояние оснащенной кривой (стержня) будем называть отсчетной конфигурацией. Конфигурацию стержня в данный момент времени t будем называть актуальной. Переход стержня из отсчетной конфигурации в актуальную называется движением стержня и определяется заданием отображений

$$\mathbf{r}(s) \quad \to \quad \mathbf{R}(s,t); \qquad \mathbf{d}_k(s) \quad \to \quad \mathbf{D}_k(s,t).$$

Движение будем характеризовать заданием вектора перемещения $\mathbf{u}(s,t)$ и тензора поворота $\mathbf{P}(s,t)$

$$\mathbf{R}(s,t) = \mathbf{r}(s) + \mathbf{u}(s,t), \qquad \mathbf{D}_k(s,t) = \mathbf{P}(s,t)\cdot\mathbf{d}_k(s). \tag{8}$$

Трансляционная скорость вершины репера, т.е. точки несущей кривой с координатой s, и угловая скорость вращения трехгранника $\mathbf{D}_k(s,t)$ определяются стандартным образом

$$\mathbf{V}(s,t) = \dot{R}(s,t), \quad \dot{\mathbf{P}}(s,t) = \boldsymbol{\omega}(s,t) \times \mathbf{P}(s,t), \quad \dot{f} \equiv df/dt. \tag{9}$$

Второе из уравнений (9) называется уравнением Пуассона. Если тензор поворота задан, то угловая скорость вычисляется по формуле

$$\boldsymbol{\omega}(s,t) = -\frac{1}{2}\left[\dot{\mathbf{P}}\cdot\mathbf{P}^T\right]_\times, \quad (\mathbf{a}\otimes\mathbf{b})_\times \equiv \mathbf{a}\times\mathbf{b}. \tag{10}$$

3 Фундаментальные законы механики

Первый и второй законы динамики Эйлера

$$\mathbf{N}'(s,t) + \rho_0 \mathcal{F}(s,t) = \rho_0 \left(\mathbf{V} + \underline{\mathbf{\Theta}_1 \cdot \boldsymbol{\omega}}\right)^{\cdot}, \tag{11}$$

$$\mathbf{M}' + \mathbf{R}' \times \mathbf{N} + \rho_0 \mathcal{L} = \underline{\rho_0 \mathbf{V} \times \mathbf{\Theta}_1 \cdot \boldsymbol{\omega}} + \rho_0 \left(\underline{\mathbf{V} \cdot \mathbf{\Theta}_1} + \mathbf{\Theta}_2 \cdot \boldsymbol{\omega}\right)^{\cdot}, \tag{12}$$

причем подчеркнутые слагаемые ранее в теории стержней не фигурировали.

Уравнение баланса энергии (Дж. Грин, 1839)

$$\rho_0 \dot{\mathcal{U}} = \mathbf{N} \cdot (\mathbf{V}' + \mathbf{R}' \times \boldsymbol{\omega}) + \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\omega}' + h' + \rho_0 \mathcal{Q}, \tag{13}$$

Введем в рассмотрение векторы деформации: $\mathcal{E}$ — вектор деформации растяжения–поперечного сдвига, $\mathbf{\Phi}$ — вектор деформации изгиба–кручения. Они определяются формулами

$$\mathcal{E} = \mathbf{R}' - \mathbf{P} \cdot \mathbf{t}, \quad \mathbf{P}' = \mathbf{\Phi} \times \mathbf{P}. \tag{14}$$

Векторы деформации удовлетворяют условиям интегрируемости Картана

$$\dot{\mathcal{E}} - \boldsymbol{\omega} \times \mathcal{E} = \mathbf{V}' + \mathbf{R}' \times \boldsymbol{\omega}, \quad \dot{\mathbf{\Phi}} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{\Phi} = \boldsymbol{\omega}'. \tag{15}$$

Для иллюстрации покажем смысл второго вектора деформации

$$\mathbf{\Phi}_\times = \left[\left(\tilde{\varphi}' - \varphi' + \left(\frac{1}{\tilde{R}_t} - \frac{1}{R_t}\right)\right)\mathbf{t} - \left(\frac{\cos(\tilde{\varphi} - \varphi)}{\tilde{R}_c} - \frac{1}{R_c}\right)\mathbf{b} - \frac{\sin(\tilde{\varphi} - \varphi)}{\tilde{R}_c}\mathbf{n}\right].$$

Подставляя (15) в (13), получаем

$$\rho_0 \dot{\mathcal{U}} = \mathbf{N} \cdot \left(\dot{\mathcal{E}} - \boldsymbol{\omega} \times \mathcal{E}\right) + \mathbf{M} \cdot (\dot{\mathbf{\Phi}} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{\Phi}) + h' + \rho_0 \mathcal{Q}, \tag{16}$$

Уравнение баланса энергии в форме (16) является основой для последующего анализа.

4 Введение энтропии и соотношения Коши-Грина

Усилие и момент в стержне представим в виде суперпозиции упругих ($\mathbf{N}_e$, $\mathbf{M}_e$) и диссипативных ($\mathbf{N}_d$, $\mathbf{M}_d$) слагаемых

$$\mathbf{N} = \mathbf{N}_e(\mathcal{E}, \mathbf{\Phi}, \mathbf{P}) + \mathbf{N}_d(s,t), \quad \mathbf{M} = \mathbf{M}_e(\mathcal{E}, \mathbf{\Phi}, \mathbf{P}) + \mathbf{M}_d(s,t).$$

Упругими называют составляющие усилий и моментов, которые не зависят от скоростей. Диссипативные составляющие могут зависеть, как от скоростей, так и от всей предыстории движения.

Обозначим через ϑ температуру стержня, измеряемую каким либо термометром, т.е. температура является экспериментально определяемым параметром. Для простоты считаем, что температура не меняется по сечению стержня. Введем новую функцию η, называемую энтропией. По определению, она находится по уравнению

$$\vartheta \dot{\eta} = h' + \rho_0 \mathcal{Q} + \mathbf{N}_d \cdot \left(\dot{\mathcal{E}} - \boldsymbol{\omega} \times \mathcal{E}\right) + \mathbf{M}_d \cdot (\dot{\mathbf{\Phi}} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{\Phi}) \tag{17}$$

Принятое определение энтропии отличается от традиционного и не нуждается в понятиях обратимых и необратимых процессов. Введение энтропии равенством (17) возможно для любых процессов. Равенство (17) называется уравнением теплопроводности и описывает процесс распространения тепла в стержне.

Используя (17), уравнение баланса энергии (16) переписываем в следующем виде

$$\rho_0\dot{\mathcal{U}} = \mathbf{N}_e \cdot \left(\dot{\mathcal{E}} - \boldsymbol{\omega} \times \mathcal{E}\right) + \mathbf{M}_e \cdot \left(\dot{\boldsymbol{\Phi}} - \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\Phi}\right) + \vartheta\dot{\eta}. \tag{18}$$

Уравнение (18) называется *приведенным уравнением баланса энергии*. Важность этого уравнения определяется тем, что оно указывает от каких аргументов зависит внутренняя энергия. Примем, что внутренняя энергия есть функция следующих аргументов

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}(\mathcal{E}, \boldsymbol{\Phi}, \mathbf{P}, \eta).$$

Понятно, что внутренняя энергия должна быть инвариантна относительно наложения жестких движений. Рассмотрим два движения стержня: $\mathbf{R}(s,t)$, $\mathbf{P}(s,t)$ и $\mathbf{R}_*(s,t)$, $\mathbf{P}_*(s,t)$, которые связаны соотношением

$$\mathbf{R}_*(s,t) - \mathbf{R}_*(\tilde{s},t) = \mathbf{Q}(\alpha) \cdot [\mathbf{R}(s,t) - \mathbf{R}(\tilde{s},t)], \quad \mathbf{P}_*(s,t) = \mathbf{Q}(\alpha) \cdot \mathbf{P}(s,t),$$

где $\mathbf{Q}(\alpha)$ семейство собственно ортогональных тензоров, непрерывно зависящее от параметра α, s и $\tilde{s}$ - две произвольно выбранные точки стержня.

Согласно определению векторов деформации (14)и формуле (10), имеем

$$\mathcal{E}_*(s,t) = \mathbf{R}'_* - \mathbf{P}_* \cdot \mathbf{t} = \mathbf{Q}(\alpha) \cdot \mathcal{E}(s,t),$$

$$\boldsymbol{\Phi}_*(s,t) = -\frac{1}{2}\left[\mathbf{P}'_* \cdot \mathbf{P}_*^{\mathsf{T}}\right]_\times = -\frac{1}{2}\left[\mathbf{Q} \cdot \mathbf{P}' \cdot \mathbf{P}^{\mathsf{T}} \cdot \mathbf{Q}^{\mathsf{T}}\right]_\times = \mathbf{Q}(\alpha) \cdot \boldsymbol{\Phi}(s,t).$$

Инвариантность внутренней энергии относительно преобразования (4) требует выполнения следующего равенства

$$\mathcal{U}(\mathcal{E}_*, \boldsymbol{\Phi}_*, \mathbf{P}_*, \eta) = \mathcal{U}[\mathbf{Q}(\alpha) \cdot \mathcal{E},\ \mathbf{Q}(\alpha) \cdot \boldsymbol{\Phi},\ \mathbf{Q}(\alpha) \cdot \mathbf{P},\ \eta] = \mathcal{U}(\mathcal{E}, \boldsymbol{\Phi}, \mathbf{P}, \eta). \tag{19}$$

Для тензора $\mathbf{Q}(\alpha)$ примем

$$\frac{d}{d\alpha}\mathbf{Q}(\alpha) = \zeta(\alpha) \times \mathbf{Q}(\alpha), \quad \mathbf{Q}(0) = \mathbf{E}, \quad \zeta(0) = \boldsymbol{\omega}(t).$$

Учитывая эти равенства, дифференцируя предыдущее равенство по α и полагая в получившемся уравнении $\alpha = 0$, получаем уравнение, которому должна удовлетворять внутренняя энергия

$$-\left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathcal{E}} \times \mathcal{E} + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \boldsymbol{\Phi}} \times \boldsymbol{\Phi}\right) \cdot \boldsymbol{\omega} + \left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathbf{P}}\right)^{\mathsf{T}} \cdot\cdot\, (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{P}) = 0. \tag{20}$$

Вычислим производную по времени от внутренней энергии

$$\frac{d\mathcal{U}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \eta}\dot{\eta} + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathcal{E}} \cdot \dot{\mathcal{E}} + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \boldsymbol{\Phi}} \cdot \dot{\boldsymbol{\Phi}} + \left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathbf{P}}\right)^{\mathsf{T}} \cdot\cdot\, (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{P}) = 0.$$

Исключая из этого равенства последнее слагаемое с помощью (20), получаем

$$\frac{d\mathcal{U}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \eta}\dot{\eta} + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \boldsymbol{\mathcal{E}}} \cdot \left(\dot{\boldsymbol{\mathcal{E}}} - \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\mathcal{E}}\right) + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \boldsymbol{\Phi}} \cdot \left(\dot{\boldsymbol{\Phi}} - \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\Phi}\right).$$

Подставляя это равенство в приведенное уравнение баланса энергии (18), получаем

$$\left(\frac{\partial \rho_0 \mathcal{U}}{\partial \boldsymbol{\mathcal{E}}} - \mathbf{N}_e\right) \cdot \left(\dot{\boldsymbol{\mathcal{E}}} - \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\mathcal{E}}\right) + \left(\frac{\partial \rho_0 \mathcal{U}}{\partial \boldsymbol{\Phi}} - \mathbf{M}_e\right) \cdot \left(\dot{\boldsymbol{\Phi}} - \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\Phi}\right) + \\ + \left(\frac{\partial \rho_0 \mathcal{U}}{\partial \eta} - \vartheta\right)\dot{\eta} = 0. \quad (21)$$

Поскольку это уравнение должно выполняться для произвольных значений векторов $\dot{\boldsymbol{\mathcal{E}}} - \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\mathcal{E}}$ и $\dot{\boldsymbol{\Phi}} - \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\Phi}$, то отсюда следуют соотношения Коши–Грина

$$\mathbf{N}_e = \frac{\partial \rho_0 \mathcal{U}}{\partial \boldsymbol{\mathcal{E}}}, \quad \mathbf{M}_e = \frac{\partial \rho_0 \mathcal{U}}{\partial \boldsymbol{\Phi}}, \quad \vartheta = \frac{\partial \rho_0 \mathcal{U}}{\partial \eta}. \quad (22)$$

Кроме того, выбирая в соотношении (19) $\mathbf{Q} = \mathbf{P}^T$, получаем, что фактически внутренняя энергия является функцией следующих аргументов

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}(\boldsymbol{\mathcal{E}}_\times,\ \boldsymbol{\Phi}_\times,\ \eta), \quad \boldsymbol{\mathcal{E}}_\times \equiv \mathbf{P}^T \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}}, \quad \boldsymbol{\Phi}_\times \equiv \mathbf{P}^T \cdot \boldsymbol{\Phi}. \quad (23)$$

Векторы $\boldsymbol{\mathcal{E}}_\times$ и $\boldsymbol{\Phi}_\times$ называют энергетическими векторами деформации.

Для завершения общей теории осталось задать конкретный вид внутренней энергии и определяющие уравнения для диссипативных усилия $\mathbf{N}_d$ и $\mathbf{M}_d$. Для термоупругих стержней они равны нулю.

Пример. Осесимметричные колебания кольца. *При осесимметричных колебаниях движение кольца задается следующим образом*

$$\mathbf{R}(s,t) = [a + w(t)]\mathbf{n}(s), \quad \mathbf{P}(s,t) = \mathbf{E} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{V} = \dot{w}(t)\mathbf{n}(s),\ \boldsymbol{\omega} = \mathbf{0},$$

где a *есть радиус несущей кривой. Примем, что процесс изотермический, трение и внешние нагрузки отсутствуют*

$$\mathcal{F} = \mathbf{N}_d = \mathbf{0}, \quad \mathcal{L} = \mathbf{M}_d = \mathbf{0}, \quad \mathcal{Q} = 0, \quad \vartheta = \mathrm{const}, \quad \eta = \mathrm{const}.$$

Примем, что несущая линия проходит через центры инерции поперечных сечений кольца, а главные оси инерции поперечного сечения повернуты относительно естественного трехгранника на угол α

$$\mathbf{d}_1 = \cos\alpha\,\mathbf{n} + \sin\alpha\,\mathbf{b}, \quad \mathbf{d}_2 = -\sin\alpha\,\mathbf{n} + \cos\alpha\,\mathbf{b}. \quad (24)$$

Вычислим инерционные члены в уравнениях (11) и (12)

$$\rho_0\dot{\mathbf{V}} = \tilde{\rho}F\ddot{w}\mathbf{n} = -\tilde{\rho}Fa\ddot{w}\,\mathbf{t}', \quad \rho_0\dot{\mathbf{V}} \cdot \boldsymbol{\Theta}_1 = -\ddot{w}\,\mathbf{n} \times \mathbf{d} = -\lambda\ddot{w}\,\mathbf{t} = -a\lambda\ddot{w}\,\mathbf{n}',$$

где

$$\lambda = \tilde{\rho}\frac{\sin 2\alpha}{2a}\int\limits_{(F)}(x^2 - y^2)dxdy.$$

Для стержня прямоугольного сечения, после простых преобразований, уравнения движения (11) и (12) принимают следующий вид

$$[\mathbf{N}(s,t) + \tilde{\rho}Fa\ddot{w}(t)\mathbf{t}(s)]' = \mathbf{0},$$

$$\left[\mathbf{M} - \frac{\tilde{\rho}F}{24}(H^2 - h^2)\sin 2\alpha\ddot{w}(t)\mathbf{n}(s)\right]' + \left(1 + \frac{\ddot{w}(t)}{a}\right)\mathbf{t}\times\mathbf{N} = \mathbf{0}.$$

Интегрируя эти уравнения и учитывая, что возникающие при этом постоянные векторы обязаны равняться нулю, получаем

$$\mathbf{N}(s,t) = -\tilde{\rho}Fa\ddot{w}(t)\mathbf{t}(s), \quad \mathbf{M} = \frac{\tilde{\rho}F}{24}(H^2 - h^2)\sin 2\alpha\ddot{w}(t)\mathbf{n}(s). \tag{25}$$

Обращает на себя внимание тот факт, что при $H \neq h$ *и* $\alpha \neq 0$, *вектор момента* $\mathbf{M}$ *отличен от нулевого вектора. Уравнения (25) полезны при тестировании определяющих уравнений и будут использованы позднее именно для этих целей. Первое уравнение системы (25) приводит к уравнению нелинейного осциллятора*

$$\ddot{w}(t) + f(w) = 0,$$

где вид функции $f(w)$ *определяется заданием внутренней энергии.*

Заметим, что из уравнений (25) следует универсальная связь между усилиями и моментами

$$24a\,\mathbf{M}\cdot\mathbf{n} + (H^2 - h^2)\sin 2\alpha\,\mathbf{N}\cdot\mathbf{t} = 0, \tag{26}$$

которая должна выполняться при любом задании внутренней энергии.

Парадокс. *Очевидно, что тензор зеркального отражения от плоскости, проходящей через центр кольца ортогонально вектору касательной к несущей линии* $\mathbf{Q} = \mathbf{E} - 2\,\mathbf{t}\otimes\mathbf{t}$ *должен принадлежать к группе симметрии всех величин, встречающихся в данной задаче. Однако для вектора усилий имеем* $\mathbf{Q}\cdot\mathbf{N} = -\mathbf{N} \neq \mathbf{N}$, *т.е.* $\mathbf{Q}$ *не принадлежит к группе симметрии* $\mathbf{N}$. *Решение этого кажущегося парадокса будет приведено ниже.*

5 Простейшая форма внутренней энергии

Чтобы не загромождать изложение, ниже будут рассматриваться изотермические процессы при отсутствии диссипации. Для внутренней энергии примем следующую аппроксимацию

$$\begin{aligned}\rho_0\mathcal{U}(\mathcal{E}_\times, \mathbf{\Phi}_\times) &= \mathcal{U}_0 + \mathbf{N}_0\cdot\mathcal{E}_\times + \mathbf{M}_0\cdot\mathbf{\Phi}_\times + \\ &+ \frac{1}{2}\mathcal{E}_\times\cdot\mathbf{A}\cdot\mathcal{E}_\times + \mathcal{E}_\times\cdot\mathbf{B}\cdot\mathbf{\Phi}_\times + \frac{1}{2}\mathbf{\Phi}_\times\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{\Phi}_\times + \mathbf{\Phi}_\times\cdot(\mathcal{E}_\times\cdot\mathbf{D})\cdot\mathbf{\Phi}_\times,\end{aligned} \tag{27}$$

где векторы $\mathbf{N}_0$, $\mathbf{M}_0$, тензоры второго ранга $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ и тензор третьего ранга $\mathbf{D}$ определены в отсчетной конфигурации, не зависят от деформации стержня и называются тензорами упругости.

В представлении (27) удержаны не все слагаемые третьего порядка. Повести полный анализ кубических слагаемых несложно, но требует много места. Основной факт здесь заключается в том, что для стержней, поперечные сечения которых имеют две плоскости симметрии, кубическое по $\mathbf{\Phi}_\times$ слагаемое отсутствует. Удержание линейного по $\boldsymbol{\mathcal{E}}_\times$ и квадратичного по $\mathbf{\Phi}_\times$ слагаемого связано с необходимостью учета эффекта Пойнтинга в стержнях. Полный учет кубических слагаемых нецелесообразен еще и потому, что отсутствуют данные по определению входящих в них модулей упругости. Линейные по $\boldsymbol{\mathcal{E}}_\times$ и $\mathbf{\Phi}_\times$ слагаемые обычно игнорируются, что иногда ведет к недоразумениям. Действительно, как правило, эти слагаемые малы и могут игнорироваться, но в общем случае их удержание необходимо. Рассмотрим, например, прямолинейный стержень с круговым поперечным сечением, торцы которого стеснены вертикальными стенками без трения. Допустим, что этот стержень нагружен сжимающим нормальным давлением. В этом случае легко убедиться, что векторы деформации $\boldsymbol{\mathcal{E}}_\times$ и $\mathbf{\Phi}_\times$ равны нулю, но продольная сила в стержне при этом отлична от нуля.

Представление (27) удобнее переписать в терминах векторов деформации $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ и $\mathbf{\Phi}$.

$$\rho_0\mathcal{U}(\boldsymbol{\mathcal{E}}_\times, \mathbf{\Phi}_\times) = \mathcal{U}_0 + \tilde{\mathbf{N}}_0\cdot\boldsymbol{\mathcal{E}} + \tilde{\mathbf{M}}_0\cdot\mathbf{\Phi} + \\ + \frac{1}{2}\boldsymbol{\mathcal{E}}\cdot\tilde{\mathbf{A}}\cdot\boldsymbol{\mathcal{E}} + \boldsymbol{\mathcal{E}}\cdot\tilde{\mathbf{B}}\cdot\mathbf{\Phi} + \frac{1}{2}\mathbf{\Phi}\cdot\tilde{\mathbf{C}}\cdot\mathbf{\Phi} + \mathbf{\Phi}\cdot(\boldsymbol{\mathcal{E}}\cdot\tilde{\mathbf{D}})\cdot\mathbf{\Phi}, \quad (28)$$

где величины с тильдами

$$(\tilde{\mathbf{N}}_0, \tilde{\mathbf{M}}_0) = \mathbf{P}\cdot(\mathbf{N}_0, \mathbf{M}_0), \quad (\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}}, \tilde{\mathbf{C}}) = \mathbf{P}\cdot(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})\cdot\mathbf{P}^{\mathsf{T}}, \quad \tilde{\mathbf{D}} = \overset{3}{\underset{1}{\otimes}}\mathbf{P}\odot\mathbf{D}$$

определены в актуальной конфигурации.

Здесь использовано обозначение для тензора $\mathbf{S}$ ранга k

$$\overset{k}{\underset{1}{\otimes}}\mathbf{P}\odot\mathbf{S} \equiv \overset{k}{\underset{1}{\otimes}}\mathbf{P}\odot\left(S^{i_1\ldots i_k}\mathbf{e}_{i_1}\otimes\ldots\otimes\mathbf{e}_{i_k}\right) \equiv S^{i_1\ldots i_k}\mathbf{P}\cdot\mathbf{e}_{i_1}\otimes\ldots\otimes\mathbf{P}\cdot\mathbf{e}_{i_k}.$$

Чтобы установить вид тензоров упругости, необходимо воспользоваться теорией симметрии тензоров. Но классическая теория симметрии применима только в неориентированных пространствах, и в рассматриваемом случае ее следует распространить на ориентированные пространства [3]. Включение в теорию таких понятий, как вектор поворота, угловая скорость, вектор момента и т.д. требует введения ориентированного пространства, в котором определены объекты двух типов: полярные и аксиальные объекты. В теории стержней трехмерное ориентированное пространство разложено на прямую сумму одномерного пространства, натянутого на вектор единичной касательной $\mathbf{t}$, и двумерного пространства, ортогонального $\mathbf{t}$. В таком расслоенном пространстве можно ввести, в общем случае, три независимых ориентации. Однако для наших целей достаточно ограничиться двумя независимыми ориентациями: ориентацией трехмерного пространства и ориентацией одномерного подпространства. Трехмерное ориентированное пространство будем обозначать символом $E_3^{(o)}$, а одномерное пространство, натянутое на $\mathbf{t}$, — символом $E_1^{(o)}$. Ориентацию на двумерном пространстве будем определять из условия согласования $E_3^{(o)} = E_1^{(o)} \oplus E_2^{(o)}$.

Определение: *объекты, не зависящие от выбора ориентации $E_3^{(o)}$ и $E_1^{(o)}$, называются полярными; объекты, зависящие от ориентации $E_3^{(o)}$ и не зависящие от ориентации $E_1^{(o)}$, называются аксиальными; объекты, не зависящие от выбора* *ориентации* $E_3^{(o)}$*, но зависящие от ориентации* $E_1^{(o)}$*, называются полярными* t-*ориентированными; объекты, зависящие от ориентации, как в* $E_3^{(o)}$*, так и в* $E_1^{(o)}$*, называются аксиальными* t-*ориентированными.*

В рассматриваемой теории объекты: ρ_0, ϑ, η, $\mathcal{U}$, $\mathbf{r}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{u}$, $\mathcal{F}$, $\mathbf{a}_c$, $\mathbf{d}$, $\mathbf{P}$, $\mathbf{\Theta}_2$, $\mathbf{A}$, $\mathbf{C}$ являются полярными; R_t, $\boldsymbol{\psi}$, $\boldsymbol{\omega}$, $\mathcal{L}$, $\mathbf{\Theta}_1$, $\mathbf{B}$ — аксиальными; R_c, $\mathbf{N}_0, \mathbf{N}, \mathcal{E}$, $\mathcal{E}_\times$, $\mathbf{D}$ — полярными t-ориентированными; $\mathbf{q}$, $\boldsymbol{\tau}$, $\mathbf{M}_0, \mathbf{M}$, $\mathbf{\Phi}$, $\mathbf{\Phi}_\times$ — аксиальными t-ориентированными. Заметим, что дифференцирование по дуге несущей кривой меняет тип объекта. Например, вектор $\mathbf{N}'$ является полярным.

В определение группы симметрии тензора входит определение ортогонального преобразования тензора, которое зависит от типа этого тензора.

Определение: *ортогональным преобразованием тензора* k-*го ранга* $\mathbf{S}$ *называется тензор* $\mathbf{S}'$*, определяемый по формуле*

$$\mathbf{S}' \equiv (\mathbf{t} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{t})^\beta (\det \mathbf{Q})^\alpha \overset{k}{\underset{1}{\otimes}} \mathbf{Q} \odot \mathbf{S}, \tag{29}$$

где $\alpha = 0$, $\beta = 0$*, если* $\mathbf{S}$ *полярен;* $\alpha = 1$, $\beta = 0$*, если* $\mathbf{S}$ *аксиален;* $\alpha = 0$, $\beta = 1$*, если* $\mathbf{S}$ *полярен* t-*ориентирован;* $\alpha = 1$, $\beta = 1$*, если* $\mathbf{S}$ *аксиален* t-*ориентирован.*

Определение: *группой симметрии тензора* $\mathbf{S}$ *называется множество ортогональных тензоров, не меняющих вида тензора* $\mathbf{S}$*, т.е. множество ортогональных решений уравнения*

$$\mathbf{S}' = \mathbf{S}, \tag{30}$$

где $\mathbf{S}$ *задан, а ищутся ортогональные тензоры* $\mathbf{Q}$*, причем ортогональное преобразование* $\mathbf{S}'$ *определено посредством формулы (29).*

При определении структуры тензоров упругости, помимо их типа, необходимо учитывать следующие обстоятельства. Во-первых, они зависят от анизотропии материала, из которого изготовлен стержень, и от распределения этого материала по сечению стержня. Далее будет предполагаться, что эти факторы таковы, что они не нарушают симметрии поперечного сечения. Во-вторых, тензоры упругости зависят от геометрии несущей кривой, т.е. от ее вектора Дарбу $\boldsymbol{\tau}$, и от наличия естественной крутки стержня, т.е. от вектора Дарбу оснащения $\mathbf{q}$. Поскольку эти векторы связаны соотношением (7), то можно считать, что тензоры упругости зависят от $\boldsymbol{\tau}$ и от интенсивности угла крутки φ'. Указанные обстоятельства не позволяют определить тензоры упругости экспериментальными методами, поскольку эксперименты проводятся с конкретными стержнями и, следовательно, определяют тензоры упругости только для этого конкретного стержня. В-третьих, рассматриваются тонкие стержни. Поэтому, если в качестве единицы длины принять наибольший диаметр поперечного стержня, то модуль вектора $\boldsymbol{\tau}$ будет малой величиной.

Итак, все входящие в энергию (27) тензоры упругости представим в виде разложения по вектору $\boldsymbol{\tau}$, определенному формулой (5),

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_0 + \mathbf{f}_1 \cdot \boldsymbol{\tau},$$

причем ограничимся только первыми двумя членами разложения. Коэффициенты $\mathbf{f}_0$ могут быть найдены из экспериментов с прямолинейными в недеформированном состоянии стержнями.

Используя приведенные выше определения симметрии и типов искомых тензоров, получаем следующие представления для тензоров упругости. Тензор упругости $\mathbf{A}$ полярен и симметричен. Представляя его в виде разложения

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1 \cdot \boldsymbol{\tau},$$

получаем, что тензор $\mathbf{A}_0$ является полярным, а тензор $\mathbf{A}_1$ — аксиален и t-ориентирован. Тогда

$$\mathbf{A} = A_1 \mathbf{d}_1\, \mathbf{d}_1 + A_2 \mathbf{d}_2\, \mathbf{d}_2 + A_3 \mathbf{d}_3\, \mathbf{d}_3 + \frac{A_{12}}{R_t} (\mathbf{d}_1\, \mathbf{d}_2 + \mathbf{d}_2\, \mathbf{d}_1) + \\ + \frac{1}{R_c} \left[A_{13} (\mathbf{d}_1\, \mathbf{d}_3 + \mathbf{d}_3\, \mathbf{d}_1) \cos\alpha + A_{23} (\mathbf{d}_2\, \mathbf{d}_3 + \mathbf{d}_3\, \mathbf{d}_2) \sin\alpha\right], \quad (31)$$

где смысл угла α установлен формулами (24), $\mathbf{d}_3 \equiv \mathbf{t}$, $\mathbf{a}\, \mathbf{b} \equiv \mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$.

Если естественная крутка стержня отсутствует, то к группе симметрии тензоров $\mathbf{A}_0$ и $\mathbf{A}_1$ принадлежит зеркальное отражение $\mathbf{E} - 2\,\mathbf{t} \otimes \mathbf{t}$. В этом случае тензор $\mathbf{A}_1$ равен нулю и выражение (31) резко упрощается.

Аналогичное представление имеет место для полярного тензора $\mathbf{C}$

$$\mathbf{C} = C_1 \mathbf{d}_1\, \mathbf{d}_1 + C_2 \mathbf{d}_2\, \mathbf{d}_2 + C_3 \mathbf{d}_3\, \mathbf{d}_3 + \frac{C_{12}}{R_t} (\mathbf{d}_1\, \mathbf{d}_2 + \mathbf{d}_2\, \mathbf{d}_1) + \\ + \frac{1}{R_c} \left[C_{13} (\mathbf{d}_1\, \mathbf{d}_3 + \mathbf{d}_3\, \mathbf{d}_1) \cos\alpha + C_{23} (\mathbf{d}_2\, \mathbf{d}_3 + \mathbf{d}_3\, \mathbf{d}_2) \sin\alpha\right]. \quad (32)$$

Если естественная крутка отсутствует, то $C_{12} = C_{13} = C_{23} = 0$.

Аксиальный тензор $\mathbf{B}$ имеет другую структуру. Чтобы построить этот тензор, необходимо выполнить несколько операций. Сначала представляем $\mathbf{B}$ в виде разложения

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1 \cdot \boldsymbol{\tau},$$

где $\mathbf{B}_0$ — аксиальный тензор второго ранга, $\mathbf{B}_1$ — t-ориентированный тензор третьего ранга.

Аксиальный тензор $\mathbf{B}_0$ отвечает за естественную крутку стержня. Кажется разумным потребовать, чтобы он линейно зависел от вектора $\varphi'\mathbf{t}$. В таком случае имеем

$$\mathbf{B}_0 = \mathbf{B}_* \cdot \varphi'\mathbf{t} = \varphi' \left(B_{01} \mathbf{d}_1\, \mathbf{d}_1 + B_{02} \mathbf{d}_2\, \mathbf{d}_2 + B_{03} \mathbf{t}\, \mathbf{t}\right),$$

где B_{01}, B_{02}, B_{03} суть абсолютные скаляры, отвечающие за эффекты, связанные с естественной круткой стержня, φ' — аксиальный скаляр.

Интуитивно ясно, что существенным является только модуль B_{03}, отвечающий за связанность растяжения и кручения. Модули B_{01} и B_{02} связывают деформации поперечного сдвига и изгиб несущей линии, и, видимо, могут игнорироваться. Именно так мы и будем считать, т.е. тензор $\mathbf{B}_0$ примем в следующем виде

$$\mathbf{B}_0 = \varphi' B_0\, \mathbf{t}\, \mathbf{t}. \quad (33)$$

Видим, что для естественно закрученных стержней эффект Пойнтинга проявляется уже в линейной теории. Этот факт важен при анализе работы ударно-сверлильных машин.

Общий вид тензора $\mathbf{B}$ с учетом естественной закрутки имеет вид

$$\mathbf{B} = \varphi' B_0\, \mathbf{t}\,\mathbf{t} + \frac{1}{R_t}\left[B_1 \mathbf{d}_1 \mathbf{d}_1 + B_2 \mathbf{d}_2 \mathbf{d}_2 + B_3 \mathbf{t}\,\mathbf{t} + \varphi' \left(b_1 \mathbf{d}_1 \mathbf{d}_1 + b_2 \mathbf{d}_2 \mathbf{d}_2\right) \times \mathbf{t}\right] + \\ + \frac{1}{R_c}\left[\left(B_{13} \mathbf{d}_1\, \sin\alpha + B_{23} \mathbf{d}_2\, \cos\alpha\right)\mathbf{t} + \mathbf{t}\left(B_{31}\, \mathbf{d}_1 \sin\alpha + B_{32} \mathbf{d}_2 \cos\alpha\right)\right] + \\ + \frac{\varphi'}{R_c}\left[\left(b_{13} \mathbf{d}_1 \cos\alpha + b_{23} \mathbf{d}_2 \sin\alpha\right)\mathbf{t} + \mathbf{t}\left(b_{31} \mathbf{d}_1 \cos\alpha + b_{32} \mathbf{d}_2 \sin\alpha\right)\right]. \quad (34)$$

Если естественная крутка стержня отсутствует, то $\varphi' = 0$. Если поперечное сечение стержня есть правильный многоугольник или круг, то можно немного упростить это выражение

$$\mathbf{B} = \varphi' B_0\, \mathbf{t}\,\mathbf{t} + \frac{1}{R_t}\left[B_1\left(\mathbf{E} - \mathbf{tt}\right) + B_3 \mathbf{t}\,\mathbf{t} + \varphi' b_1 \mathbf{E} \times \mathbf{t}\right] + \\ + \frac{1}{R_c}\left[B_{13}\left(\mathbf{d}_1\, \sin\alpha + \mathbf{d}_2\, \cos\alpha\right)\mathbf{t} + B_{31}\, \mathbf{t}\left(\mathbf{d}_1 \sin\alpha + \mathbf{d}_2 \cos\alpha\right)\right] + \\ + \frac{\varphi'}{R_c}\left[b_{13}\left(\mathbf{d}_1 \cos\alpha + \mathbf{d}_2 \sin\alpha\right)\mathbf{t} + b_{31}\, \mathbf{t}\left(\mathbf{d}_1 \cos\alpha + \mathbf{d}_2 \sin\alpha\right)\right].$$

Кроме того, для круглого сечения обязаны равняться нулю модули B_0, B_1, B_2, B_{13}, B_{31}, B_{23}, B_{32}, поскольку повернутое сечение в этом случае не отличается от неповернутого. Учитывая это обстоятельство и вспоминая выражения (24), последнее представление переписываем в виде

$$\mathbf{B} = \frac{1}{R_t}\left[B_1\left(\mathbf{E} - \mathbf{tt}\right) + B_3 \mathbf{t}\,\mathbf{t}\right] + \frac{1}{R_c}\left[B_{13} \mathbf{bt} + B_{31}\, \mathbf{tb}\right], \quad (35)$$

где следует обратить внимание, что вектор бинормали $\mathbf{b}$ аксиален.

Выпишем свертку тензора $\mathbf{B}$ с вектором деформации растяжения-сдвига

$$\mathcal{E} \cdot \mathbf{B} = \varphi' B_0\, \epsilon \mathbf{t} + \frac{1}{R_t}\left[B_1 \Gamma_1 \mathbf{d}_1 + B_2 \Gamma_2 \mathbf{d}_2 + B_3 \epsilon\, \mathbf{t} + \varphi' \left(b_1 \Gamma_1 \mathbf{d}_1 + b_2 \Gamma_2 \mathbf{d}_2\right) \times \mathbf{t}\right] + \\ + \frac{1}{R_c}\left[\left(B_{13} \Gamma_1\, \sin\alpha + B_{23} \Gamma_2\, \cos\alpha\right)\mathbf{t} + \epsilon\left(B_{31}\, \mathbf{d}_1 \sin\alpha + B_{32} \mathbf{d}_2 \cos\alpha\right)\right] + \\ + \frac{\varphi'}{R_c}\left[\left(b_{13} \Gamma_1 \cos\alpha + b_{23} \Gamma_2 \sin\alpha\right)\mathbf{t} + \epsilon\left(b_{31} \mathbf{d}_1 \cos\alpha + b_{32} \mathbf{d}_2 \sin\alpha\right)\right]. \quad (36)$$

Поскольку деформации поперечного сдвига, как правило, малы, то при отсутствии естественной крутки существенными, видимо, являются только модули B_3, B_{31}, B_{32}. Нетрудно установить общий вид t-ориентированного тензора $\mathbf{D}$, но, видимо, в этом нет особой необходимости. Мы ограничимся той его частью, которая не зависит от вектора Дарбу несущей кривой

$$\mathcal{E} \cdot \mathbf{D} = \epsilon\left(D_1 \mathbf{d}_1\, \mathbf{d}_1 + D_2 \mathbf{d}_2\, \mathbf{d}_2 + D_3 \mathbf{d}_3\, \mathbf{d}_3\right) + \\ + \Gamma_1 D_{13}\left(\mathbf{d}_1\, \mathbf{d}_3 + \mathbf{d}_3\, \mathbf{d}_1\right) + \Gamma_2 D_{23}\left(\mathbf{d}_2\, \mathbf{d}_3 + \mathbf{d}_3\, \mathbf{d}_2\right).$$

Кубические члены в энергии, если и существенны, то только при очень больших поворотах, либо для эластомеров. При больших поворотах тонкого металлического стержня деформации поперечного сдвига пренебрежимо малы. Поэтому предыдущее выражение допустимо принимать в упрощенном виде

$$\mathcal{E} \cdot \mathbf{D} = \epsilon \left(D_1 \mathbf{d}_1 \, \mathbf{d}_1 + D_2 \mathbf{d}_2 \, \mathbf{d}_2 + D_3 \mathbf{d}_3 \, \mathbf{d}_3 \right). \qquad (37)$$

Простейшая теория стержней без естественной крутки, описывающая эффект Пойнтинга, дается следующими значениями модулей

$$D_1 = D_2 = 0, \quad D_3 = C_3,$$

где C_3 есть жесткость стержня на кручение.

При дальнейшем анализе кубические члены в энергии будем игнорировать, поскольку в настоящее время необходимость их учета не вполне ясна. Величины $A_1, \ldots A_{23}$; $C_1, \ldots C_{23}$ и т.д. называются упругими модулями и зависят только от упругих постоянных материала, распределения материала по сечению стержня, формы и размеров поперечного сечения.

Представленная выше технология не пригодна для нахождения векторов $\mathbf{N}_0$ и $\mathbf{M}_0$, которые, в отличие от тензоров упругости, характеризуют не только свойства стержня, но и внешние нагрузки, действующие на боковую поверхность стержня. Можно утверждать, что они линейно зависят от внешних нагрузок. Как правило, их влияние пренебрежимо мало. Однако их игнорирование может привести к недоразумениям при определении значений упругих модулей.

6 Определение упругих модулей

Естественно закрученные стержни встречаются относительно редко. Поэтому вначале будем считать, что естественная крутка отсутствует. Кроме того, отбросим кубические члены в энергии. В таком случае тензоры упругости $\mathbf{A}$ и $\mathbf{C}$ принимают простой относительно вид

$$\mathbf{A} = A_1 \mathbf{d}_1 \, \mathbf{d}_1 + A_2 \mathbf{d}_2 \, \mathbf{d}_2 + A_3 \mathbf{d}_3 \, \mathbf{d}_3, \quad \mathbf{C} = C_1 \mathbf{d}_1 \, \mathbf{d}_1 + C_2 \mathbf{d}_2 \, \mathbf{d}_2 + C_3 \mathbf{d}_3 \, \mathbf{d}_3. \qquad (38)$$

Тензоры упругости $\mathbf{A}$ и $\mathbf{C}$ могут быть найдены из экспериментов с прямолинейными стержнями. Тензор упругости $\mathbf{B}$ тоже упрощается, но незначительно

$$\mathbf{B} = \frac{1}{R_t} \left(B_1 \mathbf{d}_1 \, \mathbf{d}_1 + B_2 \mathbf{d}_2 \, \mathbf{d}_2 + B_3 \mathbf{d}_3 \, \mathbf{d}_3 \right) + \\ + \frac{1}{R_c} \left[\left(B_{23} \mathbf{d}_2 \, \mathbf{d}_3 + B_{32} \mathbf{d}_3 \, \mathbf{d}_2 \right) \cos\alpha + \left(B_{13} \mathbf{d}_1 \, \mathbf{d}_3 + B_{31} \mathbf{d}_3 \, \mathbf{d}_1 \right) \sin\alpha \right]. \qquad (39)$$

Поскольку тензоры упругости $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$ не зависят от деформации, то они могут быть найдены по данным линейной теории. Модули A_1, A_2, A_3, C_1, C_2, C_3 могут быть определены по экспериментам с прямолинейными стержнями. Модули B_{13}, B_{31}, B_{23}, B_{32} могут быть найдены по экспериментам с плоскими искривленными стержнями. Модули B_1, B_2, B_3 могут быть найдены только по экспериментам с пространственно искривленными стержнями. Основное затруднение при определении упругих модулей связано с тем, что они зависят от формы поперечного сечения стержня. Частично задача по определению упругих модулей стержней уже решена. В частности, для однородных стержней из изотропного материала определены жесткости стержня на растяжение A_3 и поперечный сдвиг — модули A_1 и A_2

$$A_3 = E\,F, \quad A_1 = k_1\,G\,F, \quad A_2 = k_2\,G\,F, \tag{40}$$

где E — модуль Юнга, $G = E/2(1+\nu)$ — модуль сдвига материала стержня.

Безразмерные коэффициенты k_1 и k_2 в (40) называются коэффициентами поперечного сдвига и, в принципе, зависят от формы поперечного сечения. При определении модулей упругости следует иметь в виду, что они являются физическими характеристиками стержня. Поэтому их следует определять через некие физические характеристики, не зависящие от того рассматриваем ли мы данное тело как трехмерное или как одномерное (стержень). Наиболее подходящими характеристиками такого рода являются низшие собственные частоты, которые легко измеряются экспериментально. Можно использовать и мысленные (численные) эксперименты. Собственные частоты можно найти по трехмерной теории упругости, которая позволяет определять частоты, хорошо согласующиеся с экспериментальными данными. Собственные частоты можно найти и по теории стержней, они будут выражаться через модули упругости. Требуя совпадения собственных частот, найденных по разным теориям, получаем условия, из которых определяются упругие модули. Проиллюстрируем сказанное на примере определения коэффициентов поперечного сдвига.

Рассмотрим следующую динамическую задачу для призматического тела, занимающее область: $-h/2 \le x \le h/2$, $-H/2 \le y \le H/2$, $0 \le z \le l$. Оси декартовой системы координат выберем так что: $\mathbf{i} = \mathbf{d}_1$, $\mathbf{j} = \mathbf{d}_2$, $\mathbf{k} = \mathbf{t}$. Пусть боковая поверхность призмы свободна от напряжений, а на торцах заданы следующие условия

$$z = 0,\, l: \quad \mathbf{u}_{(3)} \cdot \mathbf{d}_1 = \mathbf{u}_{(3)} \cdot \mathbf{d}_2 = 0, \quad \mathbf{t} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{t} = 0,$$

где $\mathbf{u}_{(3)}$ и $\mathbf{T}$ суть вектор перемещений и тензор напряжений в трехмерной среде соответственно.

Рассмотрим сдвиговые колебания призмы следующего вида

$$\mathbf{u}_{(3)} = W e^{i\omega t} \sin\lambda x\, \mathbf{t}, \quad \mathbf{T} = G\lambda W e^{i\omega t} \cos\lambda x (\mathbf{t}\,\mathbf{d}_1 + \mathbf{d}_1\,\mathbf{t}), \quad \lambda = (2k+1)\pi/h,$$

где ω — частоты собственных колебаний.

Эти выражения удовлетворяют краевым условиям. Осталось подчинить их уравнениям движения, из которых и находятся собственные частоты

$$\nabla \cdot \mathbf{T} = \tilde{\rho}\ddot{\mathbf{u}}_{(3)} \quad \Rightarrow \quad \omega^2 = \frac{G}{\tilde{\rho}}\,\frac{(2k+1)^2\pi^2}{h^2}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{41}$$

Рассмотрим эту же задачу с точки зрения теории стержней. Ей соответствуют следующие представления основных величин

$$\mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\psi} = \psi_2 \mathbf{d}_2 = \mathrm{const}, \quad \mathbf{N} = N_1 \mathbf{d}_1, \quad \mathbf{M} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{N}_0 = \mathbf{0}, \quad \mathbf{M}_0 = \mathbf{0}.$$

Векторы деформации имеют вид

$$\mathbf{e} \equiv \mathbf{u}' + \mathbf{t} \times \boldsymbol{\psi} = -\psi_2 \mathbf{d}_1, \quad \boldsymbol{\kappa} \equiv \boldsymbol{\psi}' = \mathbf{0}$$

Соотношения Коши–Грина дают

$$\mathbf{N} = \frac{\partial \rho_0 \mathcal{U}}{\partial \mathbf{e}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{e} = -A_1 \psi_2 \mathbf{d}_1, \quad \mathbf{M} = \mathbf{0}.$$

Уравнения движения для данной задачи имеют вид

$$\mathbf{N}'(s,t) = \mathbf{0}, \quad -A_1 \psi_2 \mathbf{d}_2 = \Theta_2 \ddot{\psi} \mathbf{d}_2 \quad \Rightarrow \quad \omega^2 = \frac{A_1}{\Theta_2}, \quad \Theta_2 = \tilde{\rho} F \frac{h^2}{12}. \tag{42}$$

Сравнивая частоты, найденные по трехмерной теории (41), и частоту, найденную по теории стержней (42), видим огромное различие. Трехмерная теория дает целый спектр сдвиговых колебаний, в то время как теория стержней дает всего одну частоту. Это и не удивительно, ибо область применимости трехмерной теории несоизмеримо больше области применимости теории стержней. Последняя может претендовать на хорошее описание только относительно низкочастотных колебаний. Заметим, что сдвиговые колебания — это уже высокочастотные колебания, их частоты стремятся к бесконечности при $h \to 0$. В то время как частоты изгибных колебаний стержня стремятся к нулю при $h \to 0$, а частоты продольных колебаний ограничены при $h \to 0$. Поэтому вполне естественно, что теория стержней не позволяет описать весь сдвиговой спектр, но она может описать низшую частоту из спектра (41). Для этого достаточно принять

$$\frac{A_1}{\Theta_2} = \frac{G}{\tilde{\rho}} \frac{\pi^2}{h^2} \quad \Rightarrow \quad A_1 = \frac{\pi^2}{12} GF \quad \Rightarrow \quad k_1 = \frac{\pi^2}{12}.$$

Рассматривая сдвиговые колебания в другой плоскости, получаем, что $k_1 = k_2$. Таким образом, для стержней прямоугольного сечения коэффициенты поперечного сдвига определены и все жесткости в (40) выражены через известные характеристики. Кроме того, из сравнения (41) и (42) видим, что частотный диапазон, описываемый теорией стержней заведомо ограничен сверху неравенством

$$\omega^2 < \frac{G}{\tilde{\rho}} \frac{9\pi^2}{h^2} \quad \Rightarrow \quad \omega < \frac{3\pi}{h} \sqrt{\frac{G}{\tilde{\rho}}}. \tag{43}$$

Для тонких стержней ограничение (43) является очень слабым, ибо типичные частоты колебаний стержневых систем заведомо удовлетворяют ограничению (43).

Полезно рассмотреть некий кажущийся парадокс, связанный с определением коэффициента поперечного сдвига. Попробуем определить его из точного решения статической задачи о чистом сдвиге призматического стержня, которое дается формулами

$$\mathbf{T} = \tau (\mathbf{t}\, \mathbf{d}_1 + \mathbf{d}_1\, \mathbf{t}), \quad G \mathbf{u}_{(3)} = \tau x\, \mathbf{t}.$$

Используя формулы, связывающие смещения и повороты точек стержня с вектором перемещений частиц трехмерной среды, получаем

$$\mathbf{N} = \tau F \mathbf{d}_1, \quad \mathbf{M} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad G \boldsymbol{\psi} = -\tau \mathbf{d}_2.$$

С другой стороны, вектор усилий связан с вектором деформации посредством соотношений упругости

$$\mathbf{N} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{t} \times \boldsymbol{\psi}) \quad \Rightarrow \quad \tau F = -A_1\, \mathbf{d}_2 \cdot \boldsymbol{\psi} \quad \Rightarrow \quad k_1 = 1. \qquad (44)$$

Получили значение коэффициента поперечного сдвига, которое отличается от полученного ранее. Оба они получены из сравнений точных решений. С практической точки зрения это обстоятельство, как правило, несущественно, ибо влияние поперечного сдвига заметно сказывается далеко не во всех задачах. Например, переход от теории, учитывающей сдвиг, к классической теории стержней осуществляется посредством предельного перехода $k_1, k_2 \to \infty$. Тем не менее, с теоретической точки зрения этот факт неприятен и хотелось бы понять причину подобного расхождения в определении коэффициента поперечного сдвига. Ответ прост: на самом деле никакого расхождения нет. Значение $k_1 = 1$ было получено, хотя и из точного решения, но некорректно. Следует еще раз обратиться к выражению для внутренней энергии (27). В него входят векторы $\mathbf{N}_0$ и $\mathbf{M}_0$, относительно которых известно только то, что они являются линейными функционалами нагрузок, действующими на боковую поверхность стержня. К сожалению, в отличие от теории оболочек, в теории стержней общий вид этих функционалов пока не установлен. Ясно только то, что векторы $\mathbf{N}_0$ и $\mathbf{M}_0$ отличны от нуля. Поэтому равенства (44) следовало записать в следующем виде

$$\mathbf{N} = \mathbf{N}_0 + \mathbf{A} \cdot (\mathbf{t} \times \boldsymbol{\psi}) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{N}_0 = \tau F (1 - k_1) \mathbf{d}_1.$$

Таким образом, задача о чистом сдвиге не позволяет вычислить коэффициент поперечного сдвига, но позволяет установить вектор $\mathbf{N}_0$ в данной задаче. В других задачах вид вектора $\mathbf{N}_0$ будет другим. Из всего сказанного следует общий вывод о том, что *модули упругости должны определяться из задач, в которых действуют только краевые, но не поверхностные, нагрузки*. С физической точки зрения этот вывод очевиден. Действительно, приложением поверхностных нагрузок можно вызвать в стержне какие угодно деформации. При этом свойства самого стержня отходят на второй план. При действии краевых нагрузок деформации стержня определяются свойствами стержня и ничем другим. Насколько важен учет векторов $\mathbf{N}_0$ и $\mathbf{M}_0$ в практических задачах? Как правило, совершенно не важен, исключая задачи типа рассмотренной выше. Дело в том, что учет векторов $\mathbf{N}_0$ и $\mathbf{M}_0$ определяет напряжения в стержне, которые остаются ограниченными при стремлении площади поперечного сечения к нулю. Однако напряжения, типичные для стержневых систем, при стремлении площади поперечного сечения к нулю стремятся к бесконечности. Иными словами, поправки, вносимые векторами $\mathbf{N}_0$ и $\mathbf{M}_0$, как правило пренебрежимо малы.

В теории оболочек удается доказать, что коэффициент поперечного сдвига лежит в интервале

$$\pi^2/12 \le k < 1.$$

Аналогичный результат в теории стержней не доказан, но можно думать, что он остается справедливым. Отметим, что в теории пластин предложены различные значения коэффициента поперечного сдвига: $k = 5/6$ (Э. Рейсснер, 1944), $k = \pi^2/12$ (Р. Миндлин, 1951), $k = 5/(6 - \nu)$ (П. Жилин, 1983). Последнее значение рекомендуется в задачах с ярко выраженным изгибом. Например, при вычислении собственных частот изгибных колебаний стержня.

Обратимся к определению модулей C_3, C_1, C_2. Эти модули носят названия: C_3 — жесткость стержня на кручение, C_1 и C_2 — жесткости стержня на изгиб. Как уже отмечалось, они могут быть установлены в экспериментах с прямолинейными стержнями. Определение жесткостей прямолинейного незакрученного стержня представляет собой давно решенную проблему, но за деталями следует обратиться к специальной литературе. Проще всего находятся жесткости стержня на изгиб. Для стержней из однородного изотропного материала они определяются по формулам, установленным еще Г. Кирхгофом (1859)

$$C_1 = E\,J_1, \quad C_2 = E\,J_2, \quad J_1 \equiv \int\limits_{(F)} y^2 dx dy, \quad J_2 \equiv \int\limits_{(F)} x^2 dx dy, \tag{45}$$

где E — модуль Юнга материала стержня, J_1 и J_2 — моменты инерции поперечного сечения стержня.

Для неоднородных, например многослойных, стержней формулы для изгибных жесткостей меняются, но этот вопрос оставим в стороне. При решении прикладных задач теории стержней конкретный вид модулей упругости не имеет значения. Они важны только при определении величины, но не вида, напряжений, т.е. это важный, но сугубо прикладной аспект проблемы.

Явную формулу для жесткости стержня на кручение указать нельзя. Но методика ее определения хорошо разработана и приводится в справочниках [4]. В общем случае жесткость на кручение стержня с односвязным поперечным сечением определяется по формуле

$$C_3 = G\,J_r, \quad J_r = 2\int\limits_{(F)} U(x,y) dx dy, \quad \triangle U = -2, \quad U = 0 \text{ на } \partial F, \tag{46}$$

где J_r есть так называемая геометрическая жесткость на кручение.

Например, для стержня эллиптического сечения имеем

$$U(x,y) = \frac{a^2 b^2}{a^2+b^2}\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) \quad \Rightarrow \quad C_3 = \frac{\pi a^3 b^3}{a^2+b^2} G,$$

где a, b — полуоси эллипса.

Можно доказать следующую оценку (Е.Л. Николаи)

$$C_3 = G\,J_r \le G\,\frac{4 J_1 J_2}{J_p}, \quad J_p \equiv \int (x^2+y^2) dx dy,$$

где J_p есть полярный момент инерции.

Знак равенства достигается для стержней эллиптического сечения. Максимальной жесткостью на кручение обладают стержни кругового сечения. Для многосвязных сечений приведенные выше формулы требуют небольшой модификации [4]. Отметим, что изложенную выше методику определения геометрической жесткости на кручение J_r разработал Барри де Сен-Венан (1879).

Обратимся к определению модулей, входящих в тензор **B**. В известной автору литературе они не определены. Исключением является модуль B_0, который может быть найден и на самом деле определен из мысленных экспериментов с прямолинейными естественно закрученными стержнями. Чтобы яснее представит себе роль, которую играет модуль B_0, рассмотрим растяжение естественно закрученного прямолинейного стержня. Необходимыми условиями положительности энергии деформации в этом случае являются неравенства

$$A_i > 0, \quad C_i > 0, \quad A_3\,C_3 > \varphi'^2\,B_0^2.$$

Последнее из этих неравенств налагает ограничение на величину естественной крутки стержня. Поскольку модули могут быть найдены по линейной теории, то рассмотрим малые растяжения естественно закрученного стержня. Имеем очевидные равенства

$$\mathbf{u} = u\,\mathbf{t}, \quad \boldsymbol{\psi} = \psi\,\mathbf{t} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{e} = u'\,\mathbf{t} \equiv \varepsilon\,\mathbf{t}, \quad \boldsymbol{\kappa} = \psi'\,\mathbf{t}.$$

По условиям статики и соотношениям упругости имеем

$$N\,\mathbf{t} = (A_3\,\varepsilon + \varphi'\,B_0\,\psi')\,\mathbf{t}, \quad \mathbf{M} = (\varepsilon\,\varphi'\,B_0 + C_3\,\psi')\,\mathbf{t} = \mathbf{0}.$$

Решая эту систему относительно ε и ψ', получаем

$$\varepsilon = \frac{C_3\,N}{A_3\,C_3 - \varphi'^2\,B_0^2} \quad \psi' = -\frac{N}{A_3\,C_3 - \varphi'^2\,B_0^2}\varphi'\,B_0 \quad \Rightarrow \quad B_0 > 0.$$

Последнее неравенство следует из физически очевидного требования, чтобы при растяжении стержень раскручивался. В литературе [4] предложена следующая формула для B_0

$$B_0 = E\,(J_p - J_r) \geq 0, \tag{47}$$

причем знак равенства достигается только для стержней круглого сечения.

В существующих теориях стержней, не обладающих естественной круткой, принято, что $\mathbf{B} = \mathbf{0}$. С прикладной точки зрения это, видимо, не ведет к существенной погрешности. Однако этот вопрос требует более тщательного анализа. Игнорирование тензора $\mathbf{B}$ интуитивно можно оправдать следующим образом. Массовая плотность внутренней энергии есть локальная характеристика стержня. Локально не слишком сильно изогнутые стержни почти не отличаются от прямолинейных стержней. Поэтому разумно допустить, что массовая плотность внутренней энергии стержня не зависит от кривизны и кручения несущей линии. С другой стороны, сравнения с немногими точными решениями трехмерной теории упругости не подтверждают допущения о возможности игнорирования тензора $\mathbf{B}$, особенно при определении перемещений. Поэтому определение тензора $\mathbf{B}$ представляется желательным или даже необходимым. Например, из представления (36) и равенства (26) вытекает следующее соотношение для модулей

$$B_{32} = EJ_4 + B_{31}, \quad J_4 \equiv \int (x^2 - y^2)\,dx\,dy. \tag{48}$$

Поэтому принятие условия $B_{32} = B_{31} = 0$, вообще говоря, ведет к противоречию. Чтобы определить модуль B_{32}, достаточно рассмотреть задачу Ламе для полого цилиндра малой высоты H, нагруженного внутренним давлением [5]. Простые вычисления (смотри следующий пункт) дают следующее значение модуля $B_{32} = C_2$. С учетом связи (48) окончательно получаем

$$B_{32} = C_2, \quad B_{31} = C_1.$$

К сожалению, об остальных модулях, входящих в тензор $\mathbf{B}$ в настоящее время нельзя сказать ничего определенного. Интуитивно кажется, что для большинства практических потребностей вместо общего выражения (34) достаточно принять тензор $\mathbf{B}$ в следующем виде

$$\mathbf{B} = \varphi' B_0 \, \mathbf{t}\,\mathbf{t} + \frac{1}{R_t} B_3 \mathbf{t}\,\mathbf{t} + \frac{1}{R_c} \mathbf{t} \left(C_1 \, \mathbf{d}_1 \sin\alpha + C_2 \mathbf{d}_2 \cos\alpha \right).$$

В другой записи этому представлению можно придать вид

$$\mathbf{B} = \varphi' B_0 \, \mathbf{t}\,\mathbf{t} + \frac{1}{R_t} B_3 \mathbf{t}\,\mathbf{t} + \frac{1}{R_c} \mathbf{t} \otimes \mathbf{C} \cdot \mathbf{b}. \tag{49}$$

Модуль B_3 здесь остался неопределенным, и сделать вывод о его роли можно только на основе решения ряда задач для пространственно изогнутых стержней. Этот вопрос требует более тщательного анализа.

7 Продольно-крутильные волны в стержне.

Если стержень имеет естественное кручение, то продольные и крутильные деформации оказываются связанными, и задача сводится к интегрированию следующей системы уравнений

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} - \frac{1}{c_l^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\varphi' B_0}{EF} \frac{\partial^2 \psi}{\partial s^2} + \frac{1}{c_l^2} \mathcal{F}_t = 0, \qquad c_l^2 = \frac{E}{\rho}. \tag{50}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial s^2} - \frac{1}{c_t^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + \frac{\varphi' B_0}{G J_r} \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{\rho F}{G J_r} \mathcal{L}_t = 0, \quad c_t^2 = \frac{G J_r}{\rho J_p}. \tag{51}$$

Если естественная крутка отсутствует, т.е. $\varphi' = 0$, то система (50) – (51) распадается на два независимых уравнения, а продольные и крутильные деформации находятся независимо друг от друга

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} - \frac{1}{c_l^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{1}{c_l^2} \mathcal{F}_t = 0, \qquad c_l^2 = \frac{E}{\rho}. \tag{52}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial s^2} - \frac{1}{c_t^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + \frac{\rho F}{G J_r} \mathcal{L}_t = 0, \quad c_t^2 = \frac{G J_r}{\rho J_p}. \tag{53}$$

Из уравнений (52), (53) видим, что c_l есть скорость распространения продольных волн, а c_t — скорость распространения волн кручения, причем $c_l > c_t$. Покажем, что решение связанной системы (50) – (51) может быть выражено через решения волновых уравнений

$$\frac{\partial^2 \nu}{\partial s^2} - \frac{1}{\Omega_1} \frac{\partial^2 \nu}{\partial t^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial s^2} - \frac{1}{\Omega_2} \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial t^2} = 0, \tag{54}$$

где введены новые неизвестные заранее параметры Ω_1 и Ω_2.

Общее решение однородной системы (50) – (51) имеет вид

$$u(s,t) = \nu(s,t) + \frac{\gamma_1 c_l^2}{\Omega_2 - c_l^2}\vartheta(s,t), \quad \psi(s,t) = \vartheta(s,t) + \frac{\gamma_2 c_t^2}{\Omega_1 - c_t^2}\nu(s,t), \tag{55}$$

где

$$\gamma_1 \equiv \frac{\varphi' B_0}{EF}, \quad \gamma_2 \equiv \frac{\varphi' B_0}{GJ_r},$$

ν и ϑ суть общие решения волновых уравнений (54)

Параметры Ω_1 и Ω_2находятся как корни уравнения

$$\Omega_1^2 - (c_l^2 + c_t^2)\Omega_1 + (1 - \gamma_1\gamma_2)c_l^2 c_t^2 = 0, \quad \Omega_2 < c_t^2, \quad \Omega_1 > c_l^2, \quad c_t^2 < c_l^2.$$

Итак, наличие крутки в стержне не меняет характера волнового процесса в стержне. Это по-прежнему волны без дисперсии, но наличие крутки меняет скорость распространения волн в стержне. Продольно-крутильная волна является решением первого из уравнений (54), причем скорость ее распространения $\sqrt{\Omega_1}$ оказывается выше скорости распространения продольной волны в стержне без крутки. Крутильно-продольная волна является решением второго из уравнений (54), причем скорость ее распространения $\sqrt{\Omega_2}$ оказывается ниже скорости распространения волны кручения в стержне без крутки.

8 Нелинейный изгиб защемленной балки

Выше мы видели, что учет деформации поперечного сдвига в статических задачах для тонких стержней не играет большой роли. Сейчас мы хотим выяснить роль учета нелинейности. Действительно, в линейной теории задачи изгиба и растяжения разделяются. Поэтому продольная сила в стержне не участвует в процессе изгиба. Между тем, интуитивно ясно, что при изгибе защемленного стержня в нем возникает продольная сила и притом весьма значительная. Например, при очень малой жесткости на изгиб стержень мало отличается от нити, в которой растягивающее усилие играет определяющую роль. Поэтому ее игнорирование нуждается в обосновании.

Будем рассматривать изгиб стержня в плоскости, натянутой на векторы $\mathbf{t}$ и $\mathbf{d}_1$. Внешнюю нагрузку примем в виде

$$\rho_0 \mathcal{F} = p\tilde{\mathbf{n}}, \quad p = \text{const},$$

где $\tilde{\mathbf{n}}$ есть нормаль к деформированной несущей линии.

Считаем, что торцы стержня закреплены от смещений и поворотов

$$s = -l/2: \ \mathbf{R} = -(l/2)\mathbf{t}, \quad \mathbf{P} = \mathbf{E}; \quad s = l/2: \ \mathbf{R} = (l/2)\mathbf{t}, \quad \mathbf{P} = \mathbf{E}.$$

При плоском изгибе сечения стержня поворачиваются только вокруг $\mathbf{d}_2$. Поэтому имеем

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q}(\psi\mathbf{d}_2) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{\Phi} = \psi'\mathbf{d}_2.$$

Соотношения упругости принимаем в форме

$$\mathbf{N} = A\varepsilon\,\mathbf{P}\cdot\mathbf{t} + Q\tilde{\mathbf{n}}, \quad \mathbf{M} = \mathbf{P}\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{P}\cdot\mathbf{\Phi} = C_2\,\psi'\mathbf{d}_2. \tag{56}$$

Точные (нелинейные) уравнения статики записываются в виде

$$A\varepsilon' = Q\psi', \quad A\varepsilon\psi' + Q' + p = 0, \quad C_2\psi'' + (1+\varepsilon)Q = 0. \tag{57}$$

Прежде, чем продолжить решение задачи об изгибе стержня, рассмотрим случай очень малой жесткости стержня на изгиб $C_2 \approx 0$, т.е. рассмотрим струну. В этом случае третье и первое уравнения системы (57) дают $Q = 0$, $A\varepsilon = T_0 = \mathrm{const}$. Второе уравнение из (57) позволяет найти угол поворота

$$\psi(s) = -ps/T_0. \tag{58}$$

Чтобы найти продольное усилие T_0 в струне, нужно воспользоваться краевыми условиями. Имеем

$$\mathbf{R}' = (1+\varepsilon)\mathbf{P}\cdot\mathbf{t} = (1+\varepsilon)(\cos\psi\,\mathbf{t} + \sin\psi\,\mathbf{d}_1)$$

Интегрируя это равенство по интервалу $[-l/2, l/2]$, после простых преобразований получаем

$$\frac{pl}{2T_0} = \left(1 + \frac{T_0}{A}\right)\sin\left(\frac{pl}{2T_0}\right). \tag{59}$$

Обратим внимание, что, несмотря на малость величины T_0/A в сравнении с единицей, пренебрегать этой величиной нельзя, ибо тогда уравнение (59) не имеет решения, кроме тривиального. Уравнение (59) перепишем в другой форме

$$x^2 = (x+\gamma)\sin x, \quad x \equiv pl/(2T_0), \quad \gamma \equiv pl/(2A).$$

В этом уравнении γ есть малая величина. Легко видеть, что и единственное решение этого уравнения есть малая величина. Поэтому функцию $\sin x$ можно разложить в ряд по x и ограничиться первыми двумя членами. В результате этой операции получим следующее уравнение

$$x^3 + \gamma x^2 - 6\gamma = 0 \quad \Rightarrow \quad x \simeq \sqrt[3]{3pl/A}. \tag{60}$$

Поскольку $pl/A << 1$, то x мало, и все принятые ранее допущения выполнены. Для продольной силы получили следующее значение

$$T_0 = \frac{1}{2\sqrt[3]{3}}\sqrt[3]{Ap^2l^2} \quad \Rightarrow \quad \psi(s) = -\sqrt[3]{\frac{pl}{24A}}\,\frac{s}{l}. \tag{61}$$

Угол поворота в решении для струны, естественно, не удовлетворяет исходному краевому условию для балки и не обращается в нуль на концах интервала. Чтобы выполнить краевое условие для угла поворота, необходимо учесть жесткость балки на изгиб. Иными словами, необходимо вернуться к системе (57). Она допускает точное решение в эллиптических функциях, но мы ограничимся приближенным решением.

Поскольку относительное удлинение является малым, то ε в последнем уравнении системы (57) может быть отброшено в сравнении с единицей. Исключая из первого уравнения системы (57) поперечную силу Q, находим первый интеграл

$$A\varepsilon = T_0 - \frac{1}{2}C_2\psi'^2, \quad T_0 = \text{const}. \tag{62}$$

Используя (62), второе уравнение системы (57) переписываем в виде

$$-C_2\psi''' + T_0\psi' - \frac{1}{2}C_2\psi'^3 + p = 0. \tag{63}$$

Осталось определить постоянную T_0. Для определения T_0 служат краевые условия. Имеем равенство

$$\mathbf{R}' = (1+\varepsilon)\mathbf{P}\cdot\mathbf{t} = (1+\varepsilon)(\cos\psi\,\mathbf{t} + \sin\psi\,\mathbf{d}_1).$$

Вычисляя интегралы от обеих частей этого равенства по интервалу $[-l/2,\, l/2]$ с учетом нечетности функции $\psi(s)$ и четности функции $\varepsilon(s)$, получаем следующее условие

$$l = 2\int_0^{l/2}[1+\varepsilon(s)]\cos\psi(s)ds = 2\int_0^{l/2}\cos\psi(s)ds + 2\int_0^{l/2}\varepsilon(s)\cos\psi(s)ds.$$

Поскольку повороты и растяжения являются малыми, то $\cos\psi(s)$ можно разложить в ряд по $\psi(s)$ и удержать только главные члены. Тогда получим

$$\int_0^{l/2}\varepsilon(s)ds = \frac{1}{2}\int_0^{l/2}\psi^2(s)ds.$$

Исключая из этого равенства относительное удлинение $\varepsilon(s)$ с помощью соотношения (62), получаем уравнение для определения постоянной T_0

$$l\,T_0 = \int_0^{l/2}\left(A\psi^2 + C_2\psi'^2\right)ds \tag{64}$$

Теперь мы в состоянии определить порядок всех величин, входящих в уравнение (63). С этой целью введем в рассмотрение безразмерную независимую переменную $s = l\,\xi$. Кроме того, будем использовать следующее представление для жесткости на изгиб $C_2 = A\,h^2/12$, справедливое для балки прямоугольного поперечного сечения. В этих обозначениях равенство (64) переписывается в следующей форме

$$\frac{T_0}{A} = \int_0^{1/2}\left(\psi^2 + h_*^2\dot\psi^2\right)d\tau, \quad \dot\psi \equiv \frac{d\psi}{d\xi}, \quad h_*^2 \equiv \frac{h^2}{12\,l^2} << 1. \tag{65}$$

Уравнение (63) также перепишем в безразмерной форме

$$h_*^2\left[\frac{d^3\psi}{d\xi^3} + \left(\frac{d\psi}{d\xi}\right)^3\right] - \int_0^{1/2}\left(\psi^2 + h_*^2\dot\psi^2\right)d\tau\,\frac{d\psi}{d\xi} = \eta, \quad \eta \equiv \frac{pl}{A}. \tag{66}$$

Уравнение (66) содержит два малых параметра h_*^2 и η и является существенно нелинейным. Оно допускает простое решение в двух предельных случаях: линейное приближение и струнное приближение. Найдем условия применимости обоих указанных случаев.

Линейное приближение

$$h_*^2 \frac{d^3\psi}{d\xi^3} = \eta, \quad \Rightarrow \quad \psi = -\frac{\eta}{6h_*^2}\left(\frac{1}{4} - \xi^2\right)\xi. \tag{67}$$

Подставляя это решение в уравнение (66) и оставляя в нем только главное из отброшенных нелинейных слагаемых, получаем

$$\eta + \frac{4}{105}\left(\frac{\eta}{24h_*^2}\right)^3\left(\frac{1}{4} - 3\xi^2\right) = \eta \quad \Rightarrow \quad 1 << \left(\frac{l}{h}\right)^4 << 10\,\frac{E}{p_0}, \tag{68}$$

где $p = p_0\,H$, т.е. p_0 — это давление, действующее на балку.

Левая граница последнего неравенства выражает условие применимости теории стержней. Модуль Юнга E для стали примерно равен $2 \cdot 10^7$ н/см^2. Если давление p_0 есть величина порядка одной атмосферы (10 н/см^2), то неравенство (68) сводится к условию $1 << l/h << 10\sqrt[4]{2000} \simeq 67$. Полученное ограничение является довольно сильным, но следует указать, что оно получено для самой неблагоприятной ситуации. На практике осуществить условия жесткой заделки почти невозможно, да к этому и не стремятся. Податливость заделки приводит к значительному увеличению правой границы неравенства (68) в силу уменьшения продольной силы в стержне.

Оценим точность выполнения уравнения (66), если в него подставить струнное приближение (61). Выполняя эту операцию, получаем

$$-\frac{h_*^2}{24}\,\frac{p_0\,l}{E\,h} + \sqrt[3]{\frac{1}{24}}\,\frac{p_0\,l}{E\,h} = \frac{p_0\,l}{E\,h} \quad \Rightarrow \quad h_*^2 << 4\sqrt[3]{9}.$$

Иными словами, приближение струны является практически точным решением уравнения (66), но оно не удовлетворяет краевым условиям для угла поворота. Тем не менее, сравним максимальные значения нормального прогиба балки, найденного по линейной теории (формула (67)) и по струнному приближению (61)

$$w' = \psi(s) = -\sqrt[3]{\frac{pl}{24A}}\,\frac{s}{l} \quad \Rightarrow \quad w = \frac{1}{8}\sqrt[3]{\frac{pl}{24A}}\left(1 - \frac{4s^2}{l^2}\right).$$

Максимальные значения прогиба для балки $w_b^{(max)}$ и для струны $w_s^{(max)}$ вычисляются по формулам

$$w_b^{(max)} = \frac{l}{32}\,\frac{l^3}{h^3}\,\frac{p_0}{E}, \quad w_s^{(max)} = \frac{l}{16\sqrt[3]{3}}\sqrt[3]{\frac{l}{h}\,\frac{p_0}{E}}.$$

Как видим, зависимость максимальных значений прогибов от параметров задачи в рассматриваемых предельных случаях существенно различаются. Вместе с тем в обоих предельных случаях оказалось возможным отбросить в уравнении (66) слагаемое $h_*^2(d\psi/d\xi)^3$. Поэтому можно предположить, что это слагаемое можно отбросить и в общем случае. Так мы и поступим, а затем покажем, что это оправдано. После указанного отбрасывания и однократного интегрирования уравнение (66) принимает вид

$$\frac{d^2\psi}{d\xi^2} - \lambda^2\psi = \lambda^2\gamma\xi, \quad \lambda^2 \equiv \frac{12l^2T_0}{h^2 A}, \quad \gamma \equiv \frac{p_0 H l}{T_0}. \tag{69}$$

Решение уравнения (69), удовлетворяющее краевым условиям дается выражением

$$\psi(s) = -\frac{pl}{2T_0}\left[\frac{2s}{l} - \frac{\operatorname{sh}\lambda s}{\operatorname{sh}(\lambda l/2)}\right], \quad \lambda^2 \equiv \frac{T_0}{C_2}, \quad -\frac{l}{2} \le s \le \frac{l}{2}. \tag{70}$$

Здесь мы вернулись к исходным переменным. Осталось определить постоянную T_0. При уменьшении жесткости балки на изгиб продольная сила T_0 должна стремиться к величине (61). Угол поворота должен стремиться к величине (58).

Для определения T_0 служит условие (64). Вычисление входящих в него интегралов дает

$$J_1 \equiv \int_0^{l/2} \psi^2 ds = \frac{p^2l^3}{4T_0^2}\left[\frac{1}{6} - \frac{3\operatorname{ch} z}{4z\operatorname{sh} z} - \frac{1}{4\operatorname{sh}^2 z} + \frac{1}{z^2}\right],$$

$$J_2 \equiv \int_0^{l/2} \psi'^2 ds = \frac{p^2l}{4T_0^2}\left[\frac{z^2}{\operatorname{sh}^2 z} + \frac{z\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z} - 2\right], \quad z \equiv \frac{\lambda l}{2}.$$

Используя значения этих интегралов и проводя небольшие преобразования, уравнение (64) переписываем в следующей форме

$$q z^2 = \frac{945}{z^4}\left[\frac{1}{6} - \frac{3\operatorname{ch} z}{4z\operatorname{sh} z} - \frac{1}{4\operatorname{sh}^2 z} + \frac{1}{z^2} + h_*^2\left(\frac{z^2}{\operatorname{sh}^2 z} + \frac{z\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z} - 2\right)\right], \tag{71}$$

$$q \equiv 420\left(\frac{E}{p_0}\right)^2\left(\frac{h}{l}\right)^8, \quad h_*^2 \equiv \frac{C_2}{Al^2}, \quad z \equiv \frac{\lambda l}{2}, \quad \lambda^2 \equiv \frac{T_0}{C_2}, \quad p_0 \equiv \frac{p}{H}.$$

Параметр q в уравнении (71), как легко убедиться, может принимать значения в широком интервале: например, $[10^{-3}, 10^3]$. В представленном виде правая часть уравнения (71) есть монотонно убывающая функция z, не имеет особенности в нуле, а ее значение в нуле примерно равно единице.

Рассмотрим предельные случаи уравнения (71). Переход к струне происходит при больших значениях переменной x. В этом случае уравнение (71) принимает вид

$$\frac{q}{945}z^6 = \frac{1}{6} \quad \Rightarrow \quad T_0 = \frac{1}{2\sqrt[3]{3}}\sqrt[3]{Ap^2l^2}.$$

Получили результат, который для струны уже был представлен формулой (61). Переход к балке осуществляется при малых значениях переменной x. Разлагая правую часть уравнения в ряд по x, получаем

$$qz^2 = 1 - \frac{z^2}{5} + \frac{z^4}{33} + 2h_*^2\left(21 - 4z^2 + \frac{3z^4}{5}\right).$$

Для не слишком длинной балки это уравнение принимает совсем простой вид

$$qz^2 = 1 + 42h_*^2 \quad \Rightarrow \quad T_0 = \frac{4C_2}{l^2}\left(1 + \frac{7h^2}{2l^2}\right)\frac{1}{420}\left(\frac{p_0}{E}\right)^2\left(\frac{l}{h}\right)^8.$$

Вычислим приближенное значение нормального прогиба по формуле

$$w' = \psi \quad \Rightarrow \quad w = \frac{pl}{2T_0}\left(\frac{l}{4} - \frac{l\,\mathrm{ch}\,z}{2z\,\mathrm{sh}\,z} - \frac{s^2}{l} + \frac{\mathrm{ch}\,\lambda s}{\lambda\,\mathrm{sh}\,z}\right).$$

Максимального значения прогиб достигает при $s = 0$

$$w(0) = \frac{pl^2}{4T_0}\left(\frac{1}{2} + \frac{1 - \mathrm{ch}\,z}{z\,\mathrm{sh}\,z}\right).$$

Разлагая это выражение в ряд по степеням z и сохраняя два главных члена, получаем

$$w(0) = W_0\left[1 - \frac{1 + 7h^2/3l^2}{4200}\left(\frac{p_0}{E}\right)^2\left(\frac{l}{h}\right)^8\right], \quad W_0 \equiv \frac{pl^4}{16 \cdot 24C_2},$$

где W_0 есть значение прогиба, найденного по линейной теории.

Это выражение позволяет оценить возможность применения линейной теории. Для сравнительно коротких балок, линейная теория безусловно применима. Но для длинных балок, например при $l = 100h$, она становится сомнительной.

9 Изгиб прямолинейного стержня мертвым моментом

В качестве простой иллюстрации рассмотрим одну из немногих задач, допускающих точное элементарное решение по нелинейной теории. Примем, что в уравнениях (11)–(12) внешние силы и моменты, а также инерционные члены, отсутствуют $\mathbf{F} = \mathbf{0}$, $\mathbf{L} = \mathbf{0}$. Тогда имеем

$$\mathbf{N}'(s,t) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{M}' + \mathbf{R}' \times \mathbf{N} = \mathbf{0}. \tag{72}$$

Краевые условия имеют вид

$$s = 0: \ \mathbf{R} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{P} = \mathbf{E}; \qquad s = l: \ \mathbf{N} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{M} = \mathbf{L} \equiv L\,\mathbf{m}, \tag{73}$$

где $\mathbf{L} = const$ и не зависит от деформации.

Решения уравнений статики (72) с учетом условий (73) имеют вид

$$\mathbf{N} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{M} = \mathbf{L} = L\,\mathbf{m}. \tag{74}$$

Соотношения упругости для первоначально прямолинейных, но естественно закрученных, стержней определены формулами

$$\mathbf{N} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}^T \cdot \mathcal{E} + \varphi' B_0(\mathbf{t} \cdot \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{\Phi})\mathbf{P} \cdot \mathbf{t},$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{\Phi} + \varphi' B_0(\mathcal{E} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{t})\mathbf{P} \cdot \mathbf{t},$$

где φ' — естественная крутка стержня, которая ниже предполагается постоянной: $\varphi = 2\pi s/l$, l — длина, на которой поперечное сечение стержня поворачивается на угол 2π.

Первое из этих соотношений с учетом (74) влечет

$$\mathcal{E} = -\left(\frac{\varphi' B_0}{A_3}\right)(\boldsymbol{\Phi}\cdot\mathbf{P}\cdot\mathbf{t})\mathbf{P}\cdot\mathbf{t} \quad\Rightarrow\quad \mathbf{R}' = \left(1 - \frac{\varphi' B_0}{A_3}\boldsymbol{\Phi}\cdot\mathbf{P}\cdot\mathbf{t}\right)\mathbf{P}\cdot\mathbf{t}. \qquad (75)$$

Соотношения упругости для момента с учетом (74) и (75) переписываются в следующем виде

$$\mathbf{L} = \mathbf{P}\cdot[C_t\mathbf{t}\,\mathbf{t} + C_1\mathbf{d}_1\,\mathbf{d}_1 + C_2\mathbf{d}_2\,\mathbf{d}_2]\cdot\mathbf{P}^{\mathsf{T}}\cdot\boldsymbol{\Phi}, \quad C_t \equiv C_3\left(1 - \frac{\varphi'^2 B_0^2}{C_3 A_3}\right). \qquad (76)$$

В принципе несложно построить решение задачи при произвольных значениях жесткостей стержня на изгиб, ибо она соответствует хорошо изученному случаю Эйлера в динамике твердого тела. Но, чтобы не загромождать решение чисто техническими деталями, ограничимся случаем, когда $C_1 = C_2$. Уравнение (76) перепишем в обращенной форме и добавим к нему уравнение Пуассона (14). Тогда получим систему

$$\boldsymbol{\Phi} = \mathbf{P}\cdot[C_t^{-1}\mathbf{t}\,\mathbf{t} + C_1^{-1}(\mathbf{E}-\mathbf{t}\,\mathbf{t})]\cdot\mathbf{P}^{\mathsf{T}}\cdot\mathbf{L}, \quad \mathbf{P}' = \boldsymbol{\Phi}\times\mathbf{P}. \qquad (77)$$

Для системы (77) легко строится первый интеграл, который называется интегралом энергии и имеет вид

$$\boldsymbol{\Phi}\cdot\mathbf{L} = \mathbf{L}\cdot\mathbf{P}\cdot[C_t^{-1}\mathbf{t}\,\mathbf{t} + C_1^{-1}(\mathbf{E}-\mathbf{t}\,\mathbf{t})]\cdot\mathbf{P}^{\mathsf{T}}\cdot\mathbf{L} = \mathrm{const}. \qquad (78)$$

Интеграл энергии (78) налагает ограничение на вид тензора поворота $\mathbf{P}$. Общий вид тензора поворота, удовлетворяющего интегралу энергии (78), дается представлением

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{Q}(\alpha\,\mathbf{m})\cdot\mathbf{Q}(\beta\,\mathbf{t}), \qquad (79)$$

где использовано стандартное обозначение

$$\mathbf{Q}(\gamma\,\mathbf{p}) \equiv (1-\cos\gamma)\mathbf{p}\;\mathbf{p} + \cos\gamma\,\mathbf{E} + \sin\gamma\;\mathbf{p}\times\mathbf{E}$$

для поворота на угол γ вокруг единичного вектора $\mathbf{p}$.

Если $C_1 \neq C_2$, то представление (79) неприменимо. При любых значениях углов $\alpha(s)$ и $\beta(s)$ энергия (78) остается постоянной. Используя представление (79), систему (77) переписываем в виде

$$\boldsymbol{\Phi} = \mathbf{Q}(\alpha\,\mathbf{m})\cdot[C_t^{-1}\mathbf{t}\,\mathbf{t} + C_1^{-1}(\mathbf{E}-\mathbf{t}\,\mathbf{t})]\cdot\mathbf{L}, \quad \boldsymbol{\Phi} = \mathbf{Q}(\alpha\,\mathbf{m})\cdot(\alpha'\,\mathbf{m} + \beta'\,\mathbf{t}).$$

Исключая отсюда тензор поворота $\mathbf{Q}(\alpha\,\mathbf{m})$, получаем совсем простую систему

$$\alpha'(s)\,\mathbf{m} + \beta'(s)\,\mathbf{t} = L\,[C_t^{-1}\mathbf{t}\,\mathbf{t} + C_1^{-1}(\mathbf{E}-\mathbf{t}\,\mathbf{t})]\cdot\mathbf{m} = L\,[(C_t^{-1} - C_1^{-1})\cos\sigma\;\mathbf{t} + C_1^{-1}\,\mathbf{m}],$$

решение которой дается формулами

$$\alpha'(s) = L\,C_1^{-1}, \quad \beta'(s) = L\,(C_t^{-1} - C_1^{-1})\cos\sigma, \quad \cos\sigma \equiv \mathbf{m}\cdot\mathbf{t}. \qquad (80)$$

Интегрируя эти уравнения и учитывая краевое условие для тензора поворота, находим

$$\alpha(s) = L\,C_1^{-1}s, \quad \beta(s) = L\cos\sigma\,(C_t^{-1} - C_1^{-1})\,s$$

Чтобы найти форму изогнутого стержня, необходимо проинтегрировать второе из равенств (75), но предварительно надо вычислить величину

$$\mathbf{\Phi}\cdot\mathbf{P}\cdot\mathbf{t}=\frac{L\cos\sigma}{C_t}. \tag{81}$$

Чтобы понять смысл этой величины, нужно вспомнить формулу

$$\tilde{\mathbf{q}}=\mathbf{P}\cdot\mathbf{q}+\mathbf{\Phi}=\mathbf{Q}(\alpha\,\mathbf{m})\cdot(\varphi'\mathbf{t}+\alpha'\,\mathbf{m}+\beta'\,\mathbf{t}).$$

Кручение деформированного стержня определяется по формуле

$$\tilde{\mathbf{q}}\cdot\mathbf{P}\cdot\mathbf{t}=\varphi'+\mathbf{\Phi}\cdot\mathbf{P}\cdot\mathbf{t}.$$

Таким образом величина (81) определяет изменение кручения стержня в процессе деформации. Вычислим остальные характеристики деформированного стержня. В данной задаче деформации поперечного сдвига отсутствуют. Относительное удлинение стержня находится по формуле (75)

$$\varepsilon=\boldsymbol{\mathcal{E}}\cdot\mathbf{P}\cdot\mathbf{t}=-\frac{\varphi'\,B_0}{A_3}\,\frac{L\cos\sigma}{C_t}. \tag{82}$$

Отсюда видим, что при отсутствии естественной крутки ($\varphi'=0$) длина стержня при деформации не меняется. Если $\varphi'\neq 0$, то при $L>0$ стержень укорачивается, а при $L<0$ — удлиняется. Для определения кривизны и кручения несущей кривой нужно вычислить ее естественный трехгранник

$$\tilde{\mathbf{t}}=\mathbf{Q}(\alpha\mathbf{m})\cdot\mathbf{t},\quad \tilde{\mathbf{n}}=\tilde{\mathbf{t}}\times\mathbf{m}/\sin\sigma,\quad \tilde{\mathbf{b}}=[\tilde{\mathbf{t}}\cos\sigma-\mathbf{m}]/\sin\sigma.$$

Отсюда прямым вычислением находится вектор Дарбу, кривизна и кручение несущей кривой

$$\tilde{\tau}=\alpha'\cos\sigma\,\tilde{\mathbf{t}}-\alpha'\sin\sigma\,\tilde{\mathbf{b}}=\alpha'\mathbf{m}\quad\Rightarrow\quad \tilde{R}_c^{-1}=\alpha'\sin\sigma,\quad \tilde{R}_t^{-1}=\alpha'\cos\sigma.$$

Интегрируя уравнение (75), находим уравнение деформированной несущей кривой

$$\mathbf{R}=(1+\varepsilon)\left[s\cos\sigma\,\mathbf{m}+\frac{C_1}{L}\mathbf{Q}\left(\frac{Ls}{C_1}\mathbf{m}\right)\cdot(\mathbf{t}\times\mathbf{m})-\frac{C_1}{L}(\mathbf{t}\times\mathbf{m})\right].$$

Вектор, стоящий в квадратных скобках этого выражения, описывает спираль, навитую на цилиндр радиуса $a=C_1\sin\sigma/|L|$. Ось цилиндра натянута на вектор $\mathbf{m}$ и проходит через точку, определяемую вектором $(1+\varepsilon)C_1(\pi\cos\sigma\,\mathbf{m}-2\mathbf{t}\times\mathbf{m})/L$. Длина одного витка спирали равна $2\pi C_1/|L|$. Шаг спирали h равен $l\cos\sigma$.

10 Эластика Эйлера

Обратимся к рассмотрению одной из самых знаменитых задач механики, известной под названием эластики Эйлера (1744 г.). Этой задачей было положено начало новым разделам механики (теория устойчивости упругих конструкций) и математической физики (теория ветвлений решений нелинейных уравнений [8]). Решения многих нелинейных задач статики для тонких стержней можно найти в книге [9].

Эластикой Эйлера называют задачу о нагружении первоначально прямолинейного стержня продольной силой, приложенной к свободному торцу стержня. При этом используется модель нерастяжимого стержня. Для определенности будем рассматривать стержень, у которого жесткости на изгиб одинаковы $C_1 = C_2$. Математически задача сводится к интегрированию уравнений статики

$$\mathbf{N}' = \mathbf{0}, \quad \mathbf{M}' + \mathbf{R}' \times \mathbf{N} = \mathbf{0}. \tag{83}$$

Соотношения упругости принимаем в форме (**??**)

$$\mathbf{M} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{\Phi} = (C_3 - C_1)(\mathbf{t} \cdot \mathbf{P}^{\mathsf{T}} \cdot \mathbf{\Phi})\mathbf{P} \cdot \mathbf{t} + C_1 \mathbf{\Phi}, \tag{84}$$

причем вектор упругого усилия $\mathbf{N}$ определяется по уравнениям статики.

К уравнениям (83) и (84) следует присоединить краевые условия

$$s = 0: \ \mathbf{R} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{P} = \mathbf{E}; \qquad s = l: \ \mathbf{N} = -N\mathbf{t}, \quad \mathbf{M} = \mathbf{0}. \tag{85}$$

Положительные значения N в (85) отвечают сжимающей силе, действующей на прямолинейный стержень. Для сильно изогнутого стержня первоначально сжимающая сила может стать растягивающей.

Следует помнить и выражения для векторов деформации (14) и (**??**)

$$\mathbf{R}' = \mathbf{P} \cdot \mathbf{t}, \quad \mathbf{P}' = \mathbf{\Phi} \times \mathbf{P}, \quad |\mathbf{R}'| = 1.$$

Краевая задача (83) – (85) всегда имеет очевидное решение

$$\mathbf{R}(s) = s\,\mathbf{t}, \quad \mathbf{P} = \mathbf{E}, \quad \mathbf{N} = -N\mathbf{t}, \quad \mathbf{M} = \mathbf{0}, \tag{86}$$

которое отвечает прямолинейной форме равновесия сжатого стержня.

Ниже будет показано, что при достаточно малых значений сжимающего усилия N равновесная конфигурация (86) является единственной. При превышении усилием N некого критического значения, называемого эйлеровой критической силой, появляются дополнительные равновесные конфигурации, в которых стержень изогнут. Чтобы найти эти равновесные конфигурации, сначала нужно выяснить к какому классу кривых принадлежат изогнутые равновесные конфигурации. Оказывается, что в эластике Эйлера существуют только равновесные конфигурации, описываемые плоскими кривыми. Доказательство этого факта начнем с очевидного равенства

$$\mathbf{R}'' = \mathbf{\Phi} \times \mathbf{R}' \quad \Rightarrow \quad \mathbf{R}' \times \mathbf{R}'' = \mathbf{\Phi} - (\mathbf{\Phi} \cdot \mathbf{R}')\mathbf{R}' \quad \Rightarrow \quad \mathbf{\Phi} \cdot \mathbf{R}'' = 0.$$

Используя последнее равенство и второе из соотношений (84), получаем

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{R}'' = 0.$$

Умножая второе из уравнений статики (83) скалярно на $\mathbf{R}'$, получаем интеграл

$$\mathbf{M}' \cdot \mathbf{R}' = (\mathbf{M} \cdot \mathbf{R}')' - \mathbf{M} \cdot \mathbf{R}'' = (\mathbf{M} \cdot \mathbf{R}')' = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{M} \cdot \mathbf{R}' = \text{const}.$$

Согласно краевым условиям имеем

$$\mathbf{M}\cdot\mathbf{R}'=0 \quad\Rightarrow\quad \mathbf{\Phi}\cdot\mathbf{R}'=0.$$

Первое уравнение статики и краевые условия показывают, что $\mathbf{N}=-N\,\mathbf{t}$. Умножая второе из уравнений статики (83) скалярно на $\mathbf{N}$, получаем еще один интеграл

$$(\mathbf{M}\cdot\mathbf{N})'=0 \quad\Rightarrow\quad \mathbf{M}\cdot\mathbf{N}=-N\,\mathbf{M}\cdot\mathbf{t}=0. \tag{87}$$

Окончательное выражение для момента имеет вид

$$\mathbf{M}=C_1\,\mathbf{R}'\times\mathbf{R}''=C_1R_c^{-1}\tilde{\mathbf{t}}\times\tilde{\mathbf{n}}=C_1R_c^{-1}\tilde{\mathbf{b}}, \tag{88}$$

где R_c, $\tilde{\mathbf{t}}$, $\tilde{\mathbf{n}}$ и $\tilde{\mathbf{b}}$ суть радиус кривизны, касательная, нормаль и бинормаль упругой линии в деформированном состоянии соответственно.

Поскольку построение прямолинейной равновесной конфигурации не вызывает никаких затруднений, то дальше будем рассматривать только изогнутые формы равновесия $\mathbf{R}''\neq\mathbf{0}$. Интеграл (87) дает равенство

$$(\mathbf{R}'\times\mathbf{R}'')\cdot\mathbf{t}=-R_c^{-1}(\tilde{\mathbf{t}}\times\tilde{\mathbf{n}})\cdot\mathbf{t}=-R_c^{-1}\tilde{\mathbf{b}}\cdot\mathbf{t}=0,$$

которое показывает, что векторы $\mathbf{R}''$, $\mathbf{R}'$ и $\mathbf{t}$ лежат в одной плоскости.

Поэтому вектор $\mathbf{R}''$ можно представить в виде разложения

$$\mathbf{R}''=\mu\,\mathbf{t}+\lambda\,\mathbf{R}'=\mu\,[\mathbf{t}-(\mathbf{R}'\cdot\mathbf{t})\mathbf{R}'], \quad \mathbf{R}'\cdot\mathbf{R}''=0, \quad \mu\neq 0.$$

Используя это разложение, для бинормали получаем следующее представление

$$\tilde{\mathbf{b}}=-R_c\,(\mathbf{R}'\times\mathbf{R}'')=-R_c\,\mu(\mathbf{R}'\times\mathbf{t}).$$

Дифференцируя это выражение и исключая из получившегося соотношения вектор $\mathbf{R}''$, получаем

$$\tilde{\mathbf{b}}'=-\left[(R_c\,\mu)'-R_c\mu^2(\mathbf{R}'\cdot\mathbf{t})\right](\mathbf{R}'\times\mathbf{t}).$$

Умножая обе части этого уравнения скалярно на вектор $\tilde{\mathbf{b}}$ и учитывая ортогональность векторов $\tilde{\mathbf{b}}$ и $\tilde{\mathbf{b}}'$, получаем, что выражение в квадратных скобках должно быть равно нулю. Это означает, что вектор бинормали имеет не только постоянный модуль (равный единице), но и постоянен по направлению. В дальнейшем тильду у бинормали будем опускать, т.е. $\tilde{\mathbf{b}}\equiv\mathbf{b}$.

Таким образом, для второго вектора деформации получили выражение

$$\mathbf{\Phi}=\mathbf{R}'\times\mathbf{R}''=-R_c^{-1}\mathbf{b}\equiv\psi'(s)\mathbf{b}, \quad \mathbf{b}\equiv\tilde{\mathbf{b}}, \quad \psi'(s)\equiv -R_c^{-1}(s). \tag{89}$$

Зная вектор $\mathbf{\Phi}$ нетрудно найти тензор поворота [10]. Он имеет вид

$$\mathbf{P}=\mathbf{Q}(\psi\mathbf{b}) \quad\Rightarrow\quad \mathbf{R}'=\cos\psi(s)\,\mathbf{t}+\sin\psi(s)\,\mathbf{b}. \tag{90}$$

Итак, выражения для векторов усилий и моментов в эластике Эйлера по необходимости имеют вид

$$\mathbf{N}=-N\mathbf{t}, \quad \mathbf{M}=\mathbf{P}\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{P}\cdot\mathbf{\Phi}=C_1\,\psi'(s)\mathbf{b}. \tag{91}$$

Краевая задача (83) – (85) теперь сводится к скалярной нелинейной задаче для определения угла поворота $\psi(s)$

$$C_1\psi'' + N\sin\psi = 0, \quad \psi(0) = 0, \quad \psi'(l) = 0. \tag{92}$$

Получили однородную нелинейную краевую задачу для угла поворота $\psi(s)$. При любых значениях внешней силы N она имеет нулевое решение $\psi = 0$, которое отвечает прямолинейной форме равновесия стержня. Однако при определенных условиях, налагаемых на внешнюю силу, однородная краевая задача (92) может иметь ненулевое решение.

Без труда находится первый интеграл в задаче (92)

$$\psi'^2 = \frac{2N}{C_2}\left(\cos\psi(s) - \cos\psi(l)\right). \tag{93}$$

Из уравнения (93) следует, что при $N < 0$, т.е. при приложении к стержню растягивающей силы, оно имеет только нулевое решение $\psi = 0$, т.е. стержень остается прямолинейным. При положительных N уравнение (93) может иметь ненулевое решение, а может и не иметь его. В уравнении (93) сделаем замену искомой переменной. Сначала перейдем к половинному углу

$$\cos\psi = 1 - 2\sin^2\left(\frac{\psi}{2}\right)$$

и перепишем уравнение (93) в следующем виде

$$\psi'^2 = \frac{4N}{C_2}\left[\sin^2\left(\frac{\psi(l)}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\psi(s)}{2}\right)\right]. \tag{94}$$

Введем новую переменную ϑ

$$\sin\vartheta = \frac{\sin(\psi/2)}{\sin(\psi_l/2)}, \quad 0 \le \vartheta(s) \le \pi/2, \quad \vartheta(0) = 0, \quad \vartheta(l) = \pi/2.$$

Здесь мы ограничиваемся построением только тех решений, которые удовлетворяют условию $0 \le \psi(s) \le \pi$. Дифференцируя последнее равенство по s и возводя получившееся равенство в квадрат, приходим к уравнению

$$\vartheta'^2 = \frac{N}{C_2}\left[1 - \sin^2\beta\sin^2\vartheta\right] \quad \Rightarrow \quad \vartheta' = \sqrt{\frac{N}{C_2}}\sqrt{1 - \sin^2\beta\sin^2\vartheta}, \tag{95}$$

где $\beta \equiv \psi(l)/2$ и учтено, что $\vartheta' > 0$.

Следует обратить внимание, что уравнение (95) эквивалентно уравнению (94) только в том случае, когда функция $\psi(s)$ не равна тождественно нулю. Для прямолинейной формы равновесия уравнение (95) теряет смысл. Кроме того, следует обратить внимание, что ϑ', в отличие от ψ', не обращается в нуль на свободном торце стержня.

Интегрируя уравнение (95), получаем равенство

$$\sqrt{\frac{N}{C_2}}\, s = \int\limits_0^{\vartheta} \frac{d\tau}{\sqrt{1 - \sin^2\beta\sin^2\tau}}\ , \tag{96}$$

которое определяет s как функцию переменной ϑ и параметра $\psi(l)$. Прежде всего необходимо найти параметр β. Для этого нужно использовать условие $\vartheta(l) = \pi/2$. При этом уравнение (96) принимает вид

$$\sqrt{\frac{N}{C_2}}\, l = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{d\tau}{\sqrt{1-\sin^2\beta\sin^2\tau}} \equiv J(\beta)\,. \tag{97}$$

Правая часть уравнения (97) есть монотонно возрастающая функция параметра β, в чем можно убедиться вычислив производную от нее по β

$$\frac{dJ(\beta)}{d\beta} = \frac{\sin 2\beta}{2} \int\limits_0^{\pi/2} \frac{\sin 2\tau d\tau}{\sqrt{(1-\sin^2\beta\sin^2\tau)^3}} > 0, \quad 0 < 2\beta < \pi.$$

Наименьшее значение функция $J(\beta)$ принимает в нуле, где она равна $J(0) = \pi/2$. При β стремящемся к $\pi/2$ интеграл $J(\beta)$ стремится к бесконечности. Если левая часть (97) меньше $\pi/2$, то уравнение (97) не имеет решения. При выполнении неравенства

$$\sqrt{\frac{N}{C_2}}\, l \geq \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad N \geq \frac{\pi^2 C_2}{4l^2} \tag{98}$$

решение уравнения (97) существует и единственно. Значение N, при котором в неравенстве (98) достигается знак равенства, называется эйлеровой критической силой N_{cr}

$$N_{cr} \equiv \frac{\pi^2 C_2}{4l^2}. \tag{99}$$

При этом из (97) следует, что $\beta \equiv \psi(l)/2 = 0$. Отсюда в свою очередь следует, что $\psi(s) = 0$, т.е. стержень имеет только прямолинейную форму равновесия. При $N > N_{cr}$ уравнение (97) имеет ненулевое решение.

Легко найти решение уравнения (97) при малых $\sin^2\beta$. Для этого достаточно разложить подынтегральное выражение в (97) в ряд по степеням параметра $\sin^2\beta$ и ограничиться только первыми двумя членами разложения.

$$\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\beta\sin^2\tau}} = 1 + \frac{1}{2}\sin^2\beta\sin^2\tau.$$

Подставляя это разложение в (97), получаем

$$\sin^2\beta = 4\left(\sqrt{\frac{N}{N_{cr}}} - 1\right), \quad N \geq N_{cr}. \tag{100}$$

Аналогично вычисляем правую часть равенства (96)

$$\int\limits_0^{\vartheta} \frac{d\tau}{\sqrt{1-\sin^2\beta\sin^2\tau}} = \left(1 + \frac{1}{4}\sin^2\beta\right)\vartheta - \frac{1}{8}\sin^2\beta\sin 2\vartheta.$$

Принимая во внимание это равенство, а также (97), уравнение (96) переписываем в виде

$$\frac{\pi}{2}\frac{s}{l} = \vartheta - \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{\frac{N_{cr}}{N}}\right)\sin 2\vartheta, \quad N \geq N_{cr}.$$

Решая это уравнение методом последовательных приближений и ограничиваясь вторым приближением, получаем

$$\vartheta = \frac{\pi}{2}\frac{s}{l} + \frac{\gamma}{2}\sin\frac{\pi s}{l}, \quad \gamma \equiv 1 - \sqrt{\frac{N_{cr}}{N}}. \tag{101}$$

Видим, что величина ϑ слабо зависит от N, если, конечно, N незначительно превышает N_{cr}. Возвращаясь к исходной переменной ψ и учитывая ее малость, получаем в первом приближении следующее выражение

$$\psi(s) = \psi_l \sin\vartheta = 4\left(\sqrt{\frac{N}{N_{cr}}} - 1\right)^{1/2} \sin\left[\frac{\pi s}{2l} + \frac{\gamma}{2}\sin\frac{\pi s}{l}\right]. \tag{102}$$

Располагая углом поворота нетрудно вычислить все остальные неизвестные в данной задаче.

Подведем итоги. Если к торцу стержня приложена продольная растягивающая сила, то стержень имеет только одну прямолинейную равновесную конфигурацию. Ситуация меняется, если на стержень действует сжимающая сила. В этом случае всегда существует прямолинейная равновесная конфигурация, которая определяется следующими выражениями

$$\mathbf{R}(s) = (1 - N/A)\, s\mathbf{t}, \quad \mathbf{P} = \mathbf{E}, \quad \mathbf{N} = -N\mathbf{t}, \quad \mathbf{M} = \mathbf{0}. \tag{103}$$

В выражениях (103) учтена деформация растяжения, являющаяся малой величиной.

Если модуль сжимающей силы N превышает значение эйлеровой критической силы N_{cr}, определяемой формулой (99), то в эластике Эйлера появляется еще одно решение, представленное формулой (102). Интуитивно ясно, что в действительности при $N > N_{cr}$ реализуется именно второе решение, а первое решение будет неустойчиво. Последнее утверждение нетрудно доказать теоретически, если рассмотреть малые движения относительно прямолинейной равновесной конфигурации. Здесь мы этого делать не будем, но в следующем пункте процедура наложения малых движений на равновесные конфигурации будет описана на примере модельной задачи.

В литературе [8] при суждении об устойчивости равновесной конфигурации часто используют энергетические соображения. А именно, из двух равновесных конфигураций устойчивой считается та, которая имеет меньшую энергию. Строго говоря, сравнение энергий равновесных конфигураций не имеют прямого отношения к понятию устойчивости. Равновесная конфигурация консервативной системы устойчива, если для нее потенциальная энергия имеет изолированный локальный минимум, который никак не связан с энергией другой равновесной конфигурации. Тем не менее, из двух возможных равновесных конфигураций Природа, если это возможно, выбирает конфигурацию с меньшей энергией. Поэтому в эластике Эйлера считается устойчивой именно изогнутая конфигурация, поскольку потенциальная энергия в этом случае меньше [8]. Тем не менее, подобное рассуждение в эластике Эйлера наталкивается на возражение. Дело в том, что в рассматриваемом случае минимум энергии не изолирован. Фактически мы имеем семейство равновесных изогнутых конфигураций, и все они обладают одинаковой энергией. Действительно, полученное решение позволяет однозначно найти угол поворота ψ вокруг вектора бинормали $\mathbf{b}$, но сам вектор $\mathbf{b}$ был определен с точностью до произвольного поворота вокруг $\mathbf{t}$

$$\mathbf{b} = \mathbf{Q}\left(\varphi(t)\mathbf{t}\right)\cdot\mathbf{b}_0,$$

где $\mathbf{b}_0$ есть произвольный фиксированный вектор, ортогональный $\mathbf{t}$; $\varphi(t)$ — произвольный угол поворота вокруг $\mathbf{t}$.

С такой же степенью неопределенности установлены и все искомые величины, определяемые формулами (89) и (90)

$$\mathbf{\Phi} = \mathbf{R}'\times\mathbf{R}'' = \psi'(s)\mathbf{Q}(\varphi\mathbf{t})\cdot\mathbf{b}_0.$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q}(\varphi\mathbf{t})\cdot\mathbf{Q}(\psi\mathbf{b}_0)\cdot\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}(\varphi\mathbf{t}) \quad\Rightarrow\quad \mathbf{R}' = \mathbf{Q}(\varphi\mathbf{t})\cdot\left[\cos\psi(s)\,\mathbf{t}+\sin\psi(s)\,\mathbf{b}_0\right].$$

Если допустить, что угловой параметр φ зависит от времени, то можно вычислить угловую скорость [10]

$$\boldsymbol{\omega} = \dot\varphi\,\mathbf{Q}(\varphi\mathbf{t})\cdot\left[(1-\cos\psi)\,\mathbf{t}-\sin\psi\mathbf{b}_0\times\mathbf{t}\right] = \dot\varphi\left[(1-\cos\psi)\,\mathbf{t}-\sin\psi\mathbf{b}\times\mathbf{t}\right].$$

Таким образом, если в эластике Эйлера мы сообщим изогнутому стержню сколь угодно малую угловую скорость, то он будет медленно вращаться (прецессировать) вокруг вектора $\mathbf{t}$, пробегая все множество равновесных конфигураций. Причем для этого не требуется приложения внешних моментов. Следует подчеркнуть, что речь не идет о вращениях стержня как жесткого целого. Например, заделанный торец стержня не поворачивается, ибо при $s = 0$ тензор поворота становится единичным тензором при любом значении φ. Речь идет о том, что стержень не сопротивляется неким специальным видам деформации, что для реальных стержней не соответствует действительности. Следовательно, указанный факт нужно отнести к некоему дефекту самой теории стержней, который до сих пор не устранен ни в одной из существующих версий теории стержней. Отметим, что от указанного дефекта невозможно избавиться никакими манипуляциями с внутренней энергией стержня. Конечно, можно в этой связи говорить о трении и тому подобных вещах и спрятать проблему. Но проблема существует, и ее необходимо разрешить. В частности, отмеченная особенность проявляется в так называемом парадоксе Николаи [2], который заключается в том, что равновесная конфигурация стержня, скрученного сколь угодно малым моментом оказывается неустойчивой относительно бесконечно малых возмущений. Обычно [2] парадокс Николаи объясняют неконсервативностью задачи о кручении стержня. Однако это объяснение неудовлетворительно, ибо легко показать, что парадокс Николаи существует и в задаче о скручивании стержня потенциальным (консервативным) моментом.

Может показаться, что все рассуждения, связанные с вращением стержня, не вполне корректны, ибо рассматривались статические уравнения. Ниже мы рассмотрим эластику Эйлера в динамической постановке.

11 Стационарные вращения в эластике Эйлера

Запишем уравнения движения, исключив из них вектор $\mathbf{R}$

$$\mathbf{N}'' = \rho F \ddot{\mathbf{R}}', \quad \mathbf{M}' + \mathbf{R}' \times \mathbf{N} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{M} = C_1 \mathbf{R}' \times \mathbf{R}'', \quad \mathbf{R}' = \mathbf{P} \cdot \mathbf{t}. \tag{104}$$

Здесь использовано представление для момента, полученное в предыдущем пункте. Краевые условия принимаем в форме (85)

$$s = 0: \ \mathbf{R} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{P} = \mathbf{E}, \quad \mathbf{N}' = \mathbf{0}; \qquad s = l: \ \mathbf{N} = -N\mathbf{t}, \quad \mathbf{M} = \mathbf{0}. \tag{105}$$

Решение задачи (104)–(105) ищем в следующем виде

$$\mathbf{P}(s,t) = \mathbf{Q}\left[\varphi(t)\mathbf{t}\right] \cdot \mathbf{Q}\left[\psi(s)\mathbf{e}\right] \cdot \mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\left[\varphi(t)\mathbf{t}\right], \quad \mathbf{e} \cdot \mathbf{t} = 0, \tag{106}$$

где $\mathbf{e}$ — постоянный единичный вектор.

Из представления (106) видим, что при $s = 0$ и $\psi(0) = 0$ тензор поворота обращается в единичный тензор, т.е. поворот заделанного торца стержня отсутствует. Вектор изгиба-кручения, отвечающий тензору поворота (106), имеет вид

$$\mathbf{\Phi} = \psi'(s)\mathbf{Q}\left[\varphi(t)\mathbf{t}\right] \cdot \mathbf{e} = \psi'(s)\mathbf{e}_*, \quad \mathbf{e}_*(t) \equiv \mathbf{Q}\left[\varphi(t)\mathbf{t}\right] \cdot \mathbf{e} \tag{107}$$

Для касательной в актуальном положении имеем выражение

$$\mathbf{R}' = \cos\psi(s)\,\mathbf{t} + \sin\psi(s)\,\mathbf{e}_*(t) \times \mathbf{t}.$$

Отсюда имеем

$$\ddot{\mathbf{R}}' = \sin\psi(s)\left(\ddot{\varphi}\mathbf{e}_*(t) - \dot{\varphi}^2\mathbf{e}_*(t) \times \mathbf{t}\right).$$

Вектор усилия $\mathbf{N}$ представим в виде разложения

$$\mathbf{N} = -N\mathbf{t} + Q_*\mathbf{e}_* + Q\mathbf{e}_* \times \mathbf{t}, \quad Q_*'(0,t) = Q'(0,t) = 0, \quad Q_*(l,t) = Q(l,t) = 0.$$

Подставляя эти выражения в первое уравнение системы (104) и проецируя получившееся уравнение на оси $\mathbf{t}$, $\mathbf{e}_*$ и $\mathbf{e}_* \times \mathbf{t}$, получаем

$$Q'' = -\rho F \dot{\varphi}^2 \sin\psi, \quad Q_*'' = \rho F \ddot{\varphi} \sin\psi. \tag{108}$$

При получении последнего равенства были использованы краевые условия. Для вектора момента имеем выражение

$$\mathbf{M} = C_1 \mathbf{R}' \times \mathbf{R}'' = C_1 \psi' \mathbf{e}_*.$$

Второе уравнение системы (104) эквивалентно двум скалярным уравнениям

$$C_1\psi'' + N\sin\psi + Q\cos\psi - Q_*\sin\psi = 0, \quad Q_* = 0. \tag{109}$$

Последнее уравнение в (109) и второе уравнение системы (108) показывают, что в эластике Эйлера возможны только стационарные вращения

$$\ddot{\varphi} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{\varphi} \equiv \omega = \mathrm{const}. \tag{110}$$

Окончательно пришли к следующей системе уравнений

$$Q'' = -\rho F \omega^2 \sin\psi, \quad C_1\psi'' + N\sin\psi + Q\cos\psi = 0. \tag{111}$$

К системе (111) необходимо присоединить краевые условия

$$s = 0: \ Q'(0) = 0, \quad \psi(0) = 0; \qquad s = l: \ Q(l) = 0, \quad \psi'(l) = 0. \tag{112}$$

Нелинейная краевая задача четвертого порядка (111)–(112) достаточно сложна для точного анализа, поскольку допускает только один первый интеграл. Но для наших целей нет нужды строить точное решение. Мы видели, что в эластике Эйлера наряду с равновесными конфигурациями имеются вращающиеся "равновесные" конфигурации, причем скорость вращения осталась неопределенной. Здесь нам нужно показать, что учет сил инерции не уничтожает наличие вращающихся "равновесных" конфигураций, хотя и вносит некоторые уточнения. Прежде всего, выше мы установили, что вращения могут происходить только с постоянной угловой скоростью. Ниже мы ограничимся рассмотрением случая малых скоростей вращения, поскольку в этом случае задачу можно линеаризовать. При малых ω^2 поперечная сила Q мала. Отклонение упругой линии от вертикали, т.е. угол нутации ψ, также незначительно меняется. Поэтому будем искать возмущенный угол нутации в виде разложения

$$\psi(s) = \psi_{st}(s) + \vartheta(s), \quad |\vartheta(s)| << 1,$$

где $\psi_{st}(s)$ есть ненулевое решение статической задачи при $N > N_{cr}$.

Подставляя это разложение в (111) – (112) и ограничиваясь членами первого порядка по ω^2, получаем следующую краевую задачу

$$Q'' = -\rho F \omega^2 \sin\psi_{st}, \quad C_1\vartheta'' + (N\cos\psi_{st})\,\vartheta = Q\cos\psi_{st}; \tag{113}$$

$$s = 0: \ Q'(0) = 0, \quad \vartheta(0) = 0; \qquad s = l: \ Q(l) = 0, \quad \vartheta'(l) = 0. \tag{114}$$

Нетрудно доказать, что задача (113) – (114) имеет единственное решение, норма которого мала, если мала величина ω^2.

Таким образом, учет сил инерции не меняет вывода о наличии вращающихся "равновесных" конфигураций. Это означает, что изогнутые равновесные конфигурации в эластике Эйлера неустойчивы, ибо повернутая изогнутая конфигурация уже не является сколь угодно близкой к неповернутой конфигурации при сколь угодно малых возмущениях.

Следует подчеркнуть, что эксперимент не подтверждает вывода о наличии вращающихся "равновесных" конфигураций. Грубый эксперимент, проведенный автором, показал, что если изогнутую равновесную конфигурацию слегка толкнуть, то начинаются низкочастотные колебания относительно равновесной конфигурации, но не вращения. Это означает, что *используемая нами модель стержня неверно описывает реальную ситуацию*. Между тем, именно эта модель стержня широко используется при анализе многих проблем устойчивости, например, при анализе устойчивости положения равновесия скрученного стержня (парадокс Николаи). В последнем случае потерю устойчивости скрученного сколь угодно малым моментом стержня объясняют неконсервативностью задачи. По мнению автора, это "объяснение" ничего не объясняет, ибо ничего не меняется даже в том случае, когда кручение стержня производится потенциальным моментом, т.е. задача является консервативной. Кроме того, эксперимент также не подтверждает существование парадокса Николаи. Поэтому надо искать другие причины. В частности, необходимо внимательно проанализировать все допущения, сделанные нами при выводе теории стержней и при переходе к модели, описываемой уравнениями (104).

Среди общих допущений теории стержней главным является задание внутренней энергии в виде квадратичной формы (27). Можно показать, что при любом задании внутренней энергии для стержня с трансверсально изотропной энергией парадокс Николаи не исчезает. Не исчезают и стационарные вращения в эластике Эйлера, которые, по существу, и являются причиной возникновения парадокса Николаи. Иными словами, не в этом лежит корень зла.

При переходе от общей теории стержней к модели нерастяжимого стержня (104) были сделаны три допущения. Первое: пренебрегалось деформацией поперечного сдвига. Второе: отбрасывались деформации растяжения. И, наконец, третье допущение состояло в игнорировании инерции вращения. Интуитивно ясно, а во многих случаях и может быть доказано, что первые два допущения вполне оправданы. Более того, отказ от этих допущений не избавляет ни от парадокса Николаи, ни от возникновения стационарных вращений. Остается третье допущение. Оно принимается во всех работах по теории стержней. При плоских движениях учет инерции вращения оказывается важным только при анализе высокочастотных сдвиговых колебаниях. В нашем случае речь идет о медленных движениях, в которых, казалось бы, учет инерции вращения совершенно не важен. С другой стороны, при рассмотрении стационарных вращений в эластике Эйлера речь шла о пространственных движениях, которые исследованы очень мало. Поэтому именно это обстоятельство и требует отдельного рассмотрения. К сожалению, в общем случае исследовать столь сложные уравнения весьма затруднительно. Однако нетрудно убедиться, что при учете инерции вращения решение вида (106) оказывается невозможным.

12 Динамика скрученного стержня. Парадокс Николаи

12.1 Вводные замечания

Тонкие стержни часто выступают в роли элементов тех или иных конструкций. Например, в ультрацентрифугах, работающих в диапазоне 150 – 400 тысяч оборотов в минуту, ротор устанавливается на гибком стержне и приходится рассматривать совместную динамику ротора (твердого тела) и тонкого стержня. Это очень трудная для анализа проблема. Ситуация заметно упрощается, если стержень считать безынерционным. Вообще, исследование динамики и устойчивости вращающихся валов относится к числу важнейших технических проблем, некоторые из которых обсуждаются в книге [2].

12.2 Постановка задачи

Рассмотрим следующую динамическую задачу для нерастяжимого гибкого стержня. Выпишем уравнения движения (11), (12)

$$\mathbf{N}''_\gamma(s,t) = \rho F \ddot{\mathbf{R}}'_\gamma, \quad \mathbf{M}'_\gamma + \mathbf{R}'_\gamma \times \mathbf{N}_\gamma = \rho_0 \left(\boldsymbol{\Theta}_2 \cdot \boldsymbol{\omega}\right)^{\cdot}. \tag{115}$$

В уравнениях (115) индекс γ поставлен просто для удобства. Скоро мы от него избавимся.

Стержень считаем нерастяжимым, т.е. сохраняем условия

$$\mathbf{R}'_\gamma = \mathbf{P}\cdot\mathbf{t}, \quad \mathbf{M}_\gamma = C_3 \left(\boldsymbol{\Phi}_\gamma \cdot \mathbf{R}'_\gamma\right) \mathbf{R}'_\gamma + C_1 \mathbf{R}'_\gamma \times \mathbf{R}''_\gamma, \tag{116}$$

где C_1 и C_3 суть жесткости стержня на изгиб и кручение соответственно.

Тензор инерции считаем трансверсально изотропным

$$\rho_0 \boldsymbol{\Theta}_2 = \Theta_1 \mathbf{E} + (\Theta_3 - \Theta_1)\, \mathbf{R}'_\gamma \otimes \mathbf{R}'_\gamma.$$

Считаем, что основание стержня заделано, а свободный конец нагружен следящим моментом. В этом случае краевые условия имеют вид

$$s=0: \ \mathbf{R}_\gamma = \mathbf{0}, \quad \mathbf{P} = \mathbf{E}; \qquad s=l: \ \mathbf{N}_\gamma = \mathbf{0}, \quad \mathbf{M}_\gamma = L\mathbf{R}'_\gamma. \tag{117}$$

Начальные условия обсудим позднее.

12.3 Решение статической задачи

Начнем с решения статической задачи. В этом случае уравнения (115) – (117) интегрируются элементарно и дают решение

$$\mathbf{N} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{M} = L\,\mathbf{R}' = L\,\mathbf{t} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{R} = s\,\mathbf{t}, \quad \boldsymbol{\Phi} = (L/C_3)\mathbf{t}. \tag{118}$$

Осталось найти тензор поворота

$$\mathbf{P}' = \boldsymbol{\Phi} \times \mathbf{P} = (L/C_3)\mathbf{t} \times \mathbf{P}.$$

Отсюда немедленно следует выражение для тензора поворота

$$\mathbf{P} = (1-\cos\beta)\mathbf{t}\otimes\mathbf{t} + \cos\beta\mathbf{E} + \sin\beta\mathbf{t}\times\mathbf{E}, \quad \beta \equiv L\,s/C_3. \tag{119}$$

Построенная равновесная конфигурация является единственной.

12.4 Малые колебания скрученного стержня

Пусть в начальный момент времени $t=0$ стержень был незначительно изогнут, так что угол между касательной к деформированной упругой линии является малым. При $t>0$ движение стержня описываются уравнениями (115) и краевыми условиями (117). По крайней мере при малых временах ось стержня будет оставаться близкой к прямолинейной форме. Исследуем эти малые движения. Тензор поворота будем искать через углы Эйлера [10]

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q}[\psi(s,t)\mathbf{t}] \cdot \mathbf{Q}[\vartheta(s,t)\mathbf{e}] \cdot \mathbf{Q}[\varphi(s,t)\mathbf{t}], \quad \mathbf{e} \cdot \mathbf{t} = 0, \tag{120}$$

где ψ, ϑ, φ суть углы прецессии, нутации и собственного вращения соответственно; единичный вектор $\mathbf{e}$ может иметь любое направление, ортогональное $\mathbf{t}$.

Легко установить смысл угла нутации ϑ. Для этого достаточно вычислить скалярное произведение

$$\mathbf{R}'_\gamma \cdot \mathbf{t} = \mathbf{t} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{t} = \mathbf{t} \cdot \mathbf{Q}[\vartheta(s,t)\mathbf{e}] \cdot \mathbf{t} = \cos\vartheta(s,t).$$

По предположению этот угол мал при $t = 0$. Следовательно, он будет оставаться малым, по крайней мере, при малых временах. Чтобы использовать это обстоятельство, перепишем тензор поворота в тождественном виде

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q}(\vartheta\mathbf{e}_*) \cdot \mathbf{Q}(\beta\mathbf{t}), \quad \beta = \varphi + \psi, \quad \mathbf{e}_* \equiv \mathbf{Q}(\psi\mathbf{t}) \cdot \mathbf{e}. \tag{121}$$

Воспользуемся теперь малостью угла ϑ.

$$\mathbf{Q}(\vartheta\mathbf{e}_*) = \mathbf{E} + \boldsymbol{\vartheta}_\gamma \times \mathbf{E}, \quad \boldsymbol{\vartheta}_\gamma \equiv \vartheta\,\mathbf{e}_*.$$

Хотя модуль вектора $\boldsymbol{\vartheta}_\gamma$ мал, но он может поворачиваться на произвольный конечный угол прецессии ψ. Ограничиваясь линейными членами по $\boldsymbol{\vartheta}_\gamma$, получаем представления

$$\mathbf{R}'_\gamma = \mathbf{t} + \boldsymbol{\vartheta}_\gamma \times \mathbf{t}, \quad \boldsymbol{\Phi}_\gamma = \boldsymbol{\vartheta}'_\gamma + \beta'\mathbf{R}'_\gamma, \quad \mathbf{M}_\gamma = C_3\beta'\mathbf{R}'_\gamma + C_1\boldsymbol{\vartheta}'_\gamma. \tag{122}$$

При вычислении угловой скорости следует помнить о возможном наличии вращений актуальной конфигурации стержня. Это означает, что углы прецессии ψ и собственного вращения φ имеют следующее строение

$$\psi(s,t) = \gamma(t) + \tilde{\psi}(s,t), \;\; \varphi(s,t) = -\gamma(t) + \tilde{\varphi}(s,t), \;\; \beta(s,t) = \tilde{\psi}(s,t) + \tilde{\varphi}(s,t).$$

Видим, что угол кручения β не зависит от угла поворота γ, но угол прецессии ψ и, следовательно, вектор поворота $\boldsymbol{\vartheta}_\gamma$ зависят от γ. При этом следует иметь в виду, что угол γ и производные от него по времени не являются малыми.

Вектор поворота $\boldsymbol{\vartheta}_\gamma$ представим в следующем виде

$$\boldsymbol{\vartheta}_\gamma = \mathbf{Q}(\gamma\mathbf{t}) \cdot \boldsymbol{\vartheta}, \quad \boldsymbol{\vartheta} = \vartheta(s,t)\tilde{\mathbf{e}}, \quad \tilde{\mathbf{e}} \equiv \mathbf{Q}\left[\tilde{\psi}(s,t)\mathbf{t}\right] \cdot \mathbf{e}. \tag{123}$$

Аналогичным образом преобразуются представления (122)

$$\mathbf{R}'_\gamma = \mathbf{Q}(\gamma\mathbf{t}) \cdot \mathbf{R}', \quad \boldsymbol{\Phi}_\gamma = \mathbf{Q}(\gamma\mathbf{t}) \cdot \boldsymbol{\Phi}, \quad \mathbf{M}_\gamma = \mathbf{Q}(\gamma\mathbf{t}) \cdot \mathbf{M},$$

где

$$\mathbf{R}' = \mathbf{t} + \boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{t}, \quad \boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{\vartheta}' + \beta'\mathbf{R}', \quad \mathbf{M} = C_3\beta'\mathbf{R}' + C_1\boldsymbol{\vartheta}'. \tag{124}$$

Вычислим угловую скорость, отвечающую тензору поворота (122), и другие необходимые для дальнейшего величины

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{Q}(\gamma\mathbf{t}) \cdot \left(\dot{\beta}\mathbf{R}' + \dot{\boldsymbol{\vartheta}} + \dot{\gamma}\mathbf{t} \times \boldsymbol{\vartheta}\right),$$

$$\mathbf{t}\times\ddot{\mathbf{R}}' = \mathbf{Q}(\gamma\mathbf{t})\cdot\left[\ddot{\vartheta} - \dot{\gamma}^2\boldsymbol{\vartheta} + \mathbf{t}\times\left(\ddot{\gamma}\boldsymbol{\vartheta} + 2\dot{\gamma}\dot{\boldsymbol{\vartheta}}\right)\right],$$

$$\rho_0\left(\boldsymbol{\Theta}_2\cdot\boldsymbol{\omega}\right)^{\cdot} = \mathbf{Q}(\gamma\mathbf{t})\cdot\Big[\Theta_3\ddot{\beta}\mathbf{R}' + \Theta_1\left(\ddot{\boldsymbol{\vartheta}} + 2\dot{\gamma}\mathbf{t}\times\dot{\boldsymbol{\vartheta}} - \dot{\gamma}^2\boldsymbol{\vartheta} + \ddot{\gamma}\mathbf{t}\times\boldsymbol{\vartheta}\right) + \\ + \Theta_3\dot{\beta}\left(\dot{\gamma}\boldsymbol{\vartheta} + \dot{\boldsymbol{\vartheta}}\times\mathbf{t}\right)\Big]. \quad (125)$$

Вектор усилия $\mathbf{N}_\gamma$ представим в следующей форме

$$\mathbf{N}_\gamma = \mathbf{Q}(\gamma\mathbf{t})\cdot\mathbf{N}.$$

Уравнения (115) в линейном приближении принимают вид

$$(\mathbf{t}\times\mathbf{N})'' = \rho F\left[\ddot{\boldsymbol{\vartheta}} - \dot{\gamma}^2\boldsymbol{\vartheta} + \mathbf{t}\times\left(\ddot{\gamma}\boldsymbol{\vartheta} + 2\dot{\gamma}\dot{\boldsymbol{\vartheta}}\right)\right],$$

$$C_3\beta''\mathbf{R}' + C_1\boldsymbol{\vartheta}'' + C_3\beta'\boldsymbol{\vartheta}'\times\mathbf{t} + \mathbf{t}\times\mathbf{N} =$$

$$= \Theta_3\ddot{\beta}\mathbf{R}' + \Theta_1\left(\ddot{\boldsymbol{\vartheta}} + 2\dot{\gamma}\mathbf{t}\times\dot{\boldsymbol{\vartheta}} - \dot{\gamma}^2\boldsymbol{\vartheta} + \ddot{\gamma}\mathbf{t}\times\boldsymbol{\vartheta}\right) + \Theta_3\dot{\beta}\left(\dot{\gamma}\boldsymbol{\vartheta} + \dot{\boldsymbol{\vartheta}}\times\mathbf{t}\right),$$

где $\mathbf{N}$ и $\boldsymbol{\vartheta}$ ортогональны $\mathbf{t}$ между собой.

Из этих уравнений видим, что задачи кручения и изгиба разделяются. Для задачи кручения получаем волновое уравнение

$$C_3\beta'' = \Theta_3\ddot{\beta}, \quad \beta(0) = 0, \quad \beta'(l) = L/C_3. \quad (126)$$

Для задачи изгиба получаем следующую систему

$$(\mathbf{t}\times\mathbf{N})'' = \rho F\left[\ddot{\boldsymbol{\vartheta}} - \dot{\gamma}^2\boldsymbol{\vartheta} + \mathbf{t}\times\left(\ddot{\gamma}\boldsymbol{\vartheta} + 2\dot{\gamma}\dot{\boldsymbol{\vartheta}}\right)\right],$$

$$C_1\boldsymbol{\vartheta}'' + C_3\beta'\boldsymbol{\vartheta}'\times\mathbf{t} + \mathbf{t}\times\mathbf{N} = \quad (127)$$

$$= \underline{\Theta_1\left(\ddot{\boldsymbol{\vartheta}} + 2\dot{\gamma}\mathbf{t}\times\dot{\boldsymbol{\vartheta}} - \dot{\gamma}^2\boldsymbol{\vartheta} + \ddot{\gamma}\mathbf{t}\times\boldsymbol{\vartheta}\right)} + \Theta_3\dot{\beta}\left(\dot{\gamma}\boldsymbol{\vartheta} + \dot{\boldsymbol{\vartheta}}\times\mathbf{t}\right),$$

К уравнениям (127) необходимо присоединить краевые условия, которые в линейном приближении записываются в следующей форме

$$s = 0:\ \mathbf{N}' = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\vartheta} = \mathbf{0}; \qquad s = l:\ \mathbf{N} = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\vartheta}' = \mathbf{0}. \quad (128)$$

Систему (127) можно немного упростить. В правой части второго уравнения этой системы содержится подчеркнутое слагаемое. Оно существенно только при рассмотрении высокочастотных колебаний, которые без учета деформации поперечного не могут быть правильно описаны, нас эти колебания не интересуют. Это слагаемое должно быть отброшено. Если бы мы все же захотели бы рассмотреть высокочастотные колебания и учли бы деформации растяжения и сдвига, то на акустический спектр подчеркнутые в (127) слагаемые не оказали бы никакого влияния, и их можно было бы отбросить. Они существенны только при описании быстрых движений. Формальный повод для отбрасывания подчеркнутых в (127) слагаемых дает следующее рассуждение. Если из второго уравнения системы (127) исключить подчеркнутые слагаемые с помощью первого уравнения этой же системы, то в получившемся уравнении появится слагаемое, которое заведомо много меньше слагаемого $\mathbf{t}\times\mathbf{N}$, содержащегося в этом уравнении. Поэтому его можно и даже необходимо отбросить.

Таким образом, вместо системы (127) допустимо рассматривать более простую систему

$$(\mathbf{t}\times\mathbf{N})'' = \rho F\left[\ddot{\boldsymbol{\vartheta}} - \dot{\gamma}^2\boldsymbol{\vartheta} + \mathbf{t}\times\left(\ddot{\gamma}\boldsymbol{\vartheta} + 2\dot{\gamma}\dot{\boldsymbol{\vartheta}}\right)\right],$$

$$C_1\boldsymbol{\vartheta}'' + C_3\beta'\boldsymbol{\vartheta}'\times\mathbf{t} + \mathbf{t}\times\mathbf{N} = \Theta_3\dot{\beta}\left(\dot{\gamma}\boldsymbol{\vartheta} - \mathbf{t}\times\dot{\boldsymbol{\vartheta}}\right). \qquad (129)$$

Переход к классическим уравнениям, впервые исследованным А. Трешем (1952) и описанным в книге В.В. Болотина [2], происходит при принятии следующих ограничений

$$\gamma = 0, \quad \beta = Ls/C_3, \quad \dot{\beta} = 0. \qquad (130)$$

Принятие первого из этих ограничений возможно всегда. Его использование просто затрудняет, как анализ основной системы, так и интерпретацию получаемых результатов. Что касается принятия второго ограничения, то его принятие также возможно, но при этом рассматривается частный случай возмущений, относительно которых исследуется устойчивость. А именно, второе ограничение соответствует следующим начальным условиям для задачи кручения (126)

$$t = 0: \ \beta(s,0) = Ls/C_3, \quad \dot{\beta}(s,0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \beta(s,t) = Ls/C_3. \qquad (131)$$

Таким образом, классическая система следует из (129) и имеет вид

$$(\mathbf{t}\times\mathbf{N})'' = \rho F\ddot{\boldsymbol{\vartheta}}, \quad C_1\boldsymbol{\vartheta}'' - L\mathbf{t}\times\boldsymbol{\vartheta}' + \mathbf{t}\times\mathbf{N} = \mathbf{0}. \qquad (132)$$

Краевые условия для системы (132) имеют прежний вид (128).

Итак, с формальной точки зрения системы (129) и (132) эквивалентны для частного случая возмущений (131). Следует при этом иметь в виду, что в системе (132) вектор $\boldsymbol{\vartheta}$ соответствует вектору $\boldsymbol{\vartheta}_\gamma$ в системе (129). Вообразим теперь следующую ситуацию. Пусть решение задачи (129) обладает следующим свойством $\vartheta \to 0$, $\dot{\gamma} \to \infty$, т.е. по переменной γ имеем неустойчивость. Но с физической точки зрения этот вид неустойчивости совершенно несуществен, ибо неустойчивая переменная исчезает в окончательном решении, как это видно из выражения (123). Совершенно иначе обстоит дело при анализе системы (132). В ней неустойчивая переменная γ входит в состав вектора $\boldsymbol{\vartheta}$. Поэтому, если ограничиться только вычислением собственных частот и не проводить дальнейший анализ получившегося решения, то мы получим вывод о неустойчивости равновесной конфигурации скрученного стержня при сколь угодно малом значении крутящего момента, т.е. придем к так называемому парадоксу Николаи[1]. Ниже мы будем рассматривать систему (129), но для переменной β примем

[1]**Историческая справка.** О неустойчивости равновесной конфигурации стержня, скрученного следящим или мертвым моментом, при сколь угодно малом значении крутящего момента впервые было доложено на двух заседаниях Ленинградского механического общества 26 мая и 29 сентября 1927 г. профессором Политехнического института Е.Л. Николаи. Опубликована эта работа была в Известиях Политехнического института в 1928 г. На заседаниях присутствовали выдающиеся ленинградские ученые, среди которых были, в частности, П.Ф. Папкович и А.И. Лурье. На первом заседании сообщение Е.Л. Николаи букваль-

начальные условия (128). Иными словами, ниже будет анализироваться следующая система

$$(\mathbf{t}\times\mathbf{N})'' = \rho F\left[\ddot{\boldsymbol{\vartheta}} - \dot{\gamma}^2\boldsymbol{\vartheta} + \mathbf{t}\times\left(\ddot{\gamma}\boldsymbol{\vartheta} + 2\dot{\gamma}\dot{\boldsymbol{\vartheta}}\right)\right],$$
$$C_1\boldsymbol{\vartheta}'' + L\boldsymbol{\vartheta}'\times\mathbf{t} + \mathbf{t}\times\mathbf{N} = 0. \tag{133}$$

Решение системы (132) при краевых условиях (128) было построено А. Трешем (1952), который показал, что оно содержит экспоненциально растущие во времени слагаемые при любом сколь-угодно малом значении крутящего момента L. Отсюда вытекает парадоксальный вывод о том, что равновесная конфигурация скрученного стержня, определяемая формулами (118) и (119), неустойчива при сколь угодно малом значении крутящего момента L. Это явление известно в механике под названием парадокса Николаи, поскольку именно Е.Л. Николаи впервые его обнаружил, но Е.Л. Николаи рассматривал безынерционный стержень с точечной массой на свободном конце стержня. Объясняют парадокс Николаи неконсервативностью задачи о кручении стержня, подразумевая при этом, что в систему накачивается энергия. Подтверждающие это утверждение правдоподобные рассуждения приводит Г. Циглер [1]. Однако такое объяснение, хотя и возможно, трудно признать всеобъемлющим. Например, в работе [11] показано, что парадокс Николаи имеет место в задаче о кручении стержня консервативным следящим моментом, когда накачка энергии в систему заведомо невозможна. Поэтому необходимо искать и другие объяснения. К тому же, результаты А. Треша, воспроизведенные в [2], трудно признать удовлетворительными с чисто математической точки зрения, поскольку он учел только половину корней характеристического уравнения[2]. Впрочем, если все сделать правильно, то основной вывод А. Треша не изменится.

Точное решение системы (133) представляется затруднительным. Поэтому обратимся к ее приближенному решению, основанному на специфическом представлении вектора поворота (123). С этой целью вычислим производные от вектора поворота (123)

$$\boldsymbol{\vartheta}' = \vartheta'\mathbf{e}_* + \underline{\vartheta\tilde{\psi}'\times\mathbf{e}_*} \simeq \vartheta'\mathbf{e}_* \quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{\vartheta}^{(k)} = \vartheta^{(k)}\mathbf{e}_*.$$

В этом выражении подчеркнутое слагаемое имеет второй порядок малости, поскольку функция $\tilde{\psi}$, в отличие от функции $\psi(s,t) = \gamma(t) + \tilde{\psi}(s,t)$, характеризует

но шокировало всех присутствующих, ибо понятие эйлеровой критической силы было хорошо знакомо и понятно всем присутствующим. Все, разумеется, ожидали аналогичного явления и при действии крутящего момента: при малых значениях момента должна быть устойчивость, а при превышении моментом некоторого критического значения — неустойчивость. Однако результат анализа показал, что это не так. Первым, кто указал на возможную причину столь странного поведения стержня при кручении, был П.Ф. Папкович. А именно, он указал, что речь идет о неконсервативной задаче, а, следовательно, в систему может накачиваться энергия. Это объяснение примирило присутствующих с парадоксом Николаи. В самом деле, рассмотрим, например, линейный осциллятор со сколь угодно малым внешним возбуждением, пропорциональным скорости

$$m\ddot{x} + cx = \varepsilon\dot{x}, \quad 0 < \varepsilon << 1.$$

В этом случае имеем отрицательное трение и решение экспоненциально нарастает во времени при сколь угодно малом ε. Как бы то ни было, но обсуждаемые сообщения Е.Л. Николаи положили начало новому и чрезвычайно важному разделу механики — теории устойчивости неконсервативных систем.

[2]А. Треш счел возможным не рассматривать комплексно сопряженные корни характеристического уравнения и отвечающие ему частные решения. В общем случае, частотное уравнение есть определитель восьмого порядка, а не четвертого. Более того, этот определитель не имеет блочной структуры, поэтому, вообще говоря, он не сводится к вычислению определителя четвертого порядка.

дополнительное упругое закручивание стержня (основное закручивание характеризуется углом $\beta = \psi + \varphi$) и является малым. По этой причине подчеркнутое слагаемое в линейной теории должно быть отброшено. В то же время функция $\gamma(t)$ малой не является. Совершенно аналогично обстоит дело и при вычислении производных по времени от вектора поворота. Собственно, именно желание выделить немалые вращения и вынудило нас представить вектор поворота $\boldsymbol{\vartheta}_\gamma$ в виде композиции (123). Вектор поперечной силы $\mathbf{N}$ представим в виде разложения

$$\mathbf{t} \times \mathbf{N} = N_1 \mathbf{e}_* + N_2 \mathbf{t} \times \mathbf{e}_*.$$

С учетом всего сказанного систему (133) можно переписать в виде[3]

$$N_1'' \mathbf{e}_* + N_2'' \mathbf{t} \times \mathbf{e}_* = \rho F \left[\left(\ddot{\vartheta} - \dot{\gamma}^2 \vartheta \right) \mathbf{e}_* + \left(\ddot{\gamma} \vartheta + 2\dot{\gamma}\dot{\vartheta} \right) \mathbf{t} \times \mathbf{e}_* \right],$$
$$(C_1 \vartheta'' + N_1)\, \mathbf{e}_* + (N_2 - L\vartheta')\, \mathbf{t} \times \mathbf{e}_* = 0. \qquad (134)$$

Список литературы

[1] *Циглер Г.* Основы теории устойчивости конструкций. М.: Мир, 1971. 191 с.

[2] *Болотин В.В.* Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: ГИФМЛ, 1961. 339 с.

[3] *Жилин П.А.* Основные уравнения неклассической теории оболочек. // Динамика и прочность машин. Труды ЛПИ, N386, 1982. С. 29–46.

[4] *Биргер И.А., Пановко Я.Г.*(ред.) Прочность•Устойчивость •Колебания. Т. I. М.: Машиностроение, 1968. 831 с.

[5] *Лурье А.И.* Теория упругости. М.: Наука, 1970. 939 с.

[6] *Лейбович С., Сибасс А.*(ред.) Нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 319 с.

[7] *Слепян Л.И.* Нестационарные упругие волны. Л.: Судостроение, 1972. 374 с.

[8] *Келлер Дж.Б., Антман С.*(ред.) Теория ветвлений и нелинейные задачи на собственные значения. М.: Мир, 1974. 254 с.

[9] *Попов Е.П.* Нелинейные задачи статики тонких стержней. Л.-М.: ГИТТЛ, 1948. 170 с.

[10] *Жилин П.А.* Векторы и тензоры второго ранга в трехмерном пространстве. СПб.: Нестор, 2001. 275 с.

[11] *Жилин П.А., Сергеев А.Д.* Равновесие и устойчивость тонкого стержня, нагруженного консервативным моментом. // Механика и процессы управления: Тр. СПбГТУ. №448. СПб.: Изд-во СПбГТУ, 1994. С. 47 - 56.

[3]На этом рукопись обрывается. К сожалению, болезнь не позволила П. А. Жилину закончить работу над статьей. Прим. редактора.