ЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ РЕБРИСТЫХ ОБОЛОЧЕК

П. А. ЖИЛИН

(*Ленинград*)

В данной работе выводятся уравнения динамики ребристых оболочек с учетом температурных членов. Ребра расположены вдоль координатных линий, которые могут не совпадать с линиями главной кривизны. Приводится интегральное представление решения уравнения равновесия. Построено приближенное решение для оболочек вращения с меридиональными ребрами.

Теория ребристых оболочек является, по-видимому, одним из наиболее спорных и незавершенных разделов общей теории оболочек. Если обратиться к истории развития теории ребристых оболочек, то отчетливо видны три этапа.

На первом этапе развития были рассмотрены отдельные задачи теории ребристых оболочек. Характерным здесь является рассмотрение ребристой оболочки (пластинки) как составной конструкции оболочка — ребро. При этом уравнения равновесия выводились для оболочки и ребер отдельно, далее решалась задача на их сопряжение.

Наиболее значительными работами первого этапа являются работы Ю. А. Шиманского [1, 2] и П. Ф. Папковича [3], которые были выполнены в тридцатые годы. В этих работах впервые была рассмотрена задача об осесимметричной деформации бесконечно длинной цилиндрической оболочки, подкрепленной равноотстоящими кольцевыми ребрами. В работе Ю. А. Шиманского [1] был предложен весьма полезный прием решения бесконечных систем алгебраических уравнений. В последние годы этот прием в различных модификациях с успехом использовался многими авторами, которые, видимо, не знали о приоритете Ю. А. Шиманского.

Следует подчеркнуть, что на первом этапе теория ребристых оболочек по существу не рассматривается. Сам термин «ребристая оболочка» возник гораздо позже. Рассмотрение ребристой оболочки как составной конструкции не только ограничивало возможности теории, но и вообще исключало из рассмотрения целый ряд важных проблем, некоторые из них будут отмечены ниже.

Для второго этапа характерно рассмотрение ребристой оболочки на основе схемы конструктивной анизотропии. На этом этапе было решено большое количество важных задач. Однако ряд принципиальных проблем остался нерешенным до настоящего времени. Например, крайне неясными остаются пределы применимости схемы конструктивной анизотропии, более того, неясно, какие величины и в каких случаях определяются по этой схеме достоверно, а какие нет. Ясно, что необходимым условием применимости этой схемы будет учет краевых эффектов. С другой стороны, формулировка достаточных условий применимости схемы конструктивной анизотропии в значительной степени определяется самой конструкцией и условиями ее работы, поэтому не имеет смысла получение формальных достаточных условий.

Современный этап развития теории ребристых оболочек начинается в 1948 г., когда А. И. Лурье сформулировал общие принципы теории ребристых оболочек.

В основу теории был положен принцип минимума потенциальной энергии, причем потенциальная энергия ребристой оболочки записывалась в виде суммы энергий собственно оболочки и стержневой системы — ребер.

Другой подход к построению ребристых оболочек был предложен В. З. Власовым в 1949 г. [4]. По В. З. Власову ребра отрезались от оболочки, а их воздействие на оболочку заменялось некими усилиями и моментами, подлежащими дальнейшему определению. Кроме того, привлекалось условие неразрывности деформаций.

Общим для обоих вариантов теории ребристых оболочек является то, что привлекаются две теории: теория оболочек и теория стержней. Отличие состоит в том, что А. И. Лурье трактовал ребра как стержни Кирхгофа — Клебша, а В. З. Власов рассматривал их как тонкостенные стержни. Тот факт, что для построения теории ребристых оболочек привлекаются две по существу разнородные теории, приводит к внутренней противоречивости самой теории ребристых оболочек.

Используя две разнородные теории, необходимо привлечь некое объединяющее их начало. Если взять в качестве последнего принцип минимума потенциальной энергии, то, во-первых, возникают серьезные трудности в написании полевых уравнений, а во-вторых, они получаются несамосопряженными и неэллиптического типа.

Если в качестве объединяющего начала взять идею В. З. Власова, то неясно, каким образом привести в соответствие моменты, действующие в ребре и оболочке, поскольку в ребре момент имеет три составляющих, а в оболочке — две. В этом случае уравнения теории ребристых оболочек также являются несамосопряженными и неэллиптического типа.

Большинство современных работ посвящено развитию этих двух вариантов. Логически чистую теорию можно построить только на основе непротиворечивой системы гипотез, поэтому кажется вполне естественным получить уравнения теории ребристых оболочек, рассматривая движение трехмерного континуума. Однако независимо от варианта теории ребристых оболочек здесь возникают краевые задачи типа задач с бесконечно узкими барьерами. Эти задачи весьма сложны для решения, и к настоящему времени решено сравнительно небольшое их число.

В 1952 г. Е. Я. Герцберг [5] впервые получил строгое решение для шарнирно опертой цилиндрической оболочки с двумя меридиональными ребрами. Аналогичное решение построено С. А. Амбарцумяном [6] в 1953 г. Начиная с 1960 г. публикуется ряд работ В. А. Заруцкого, в которых детально анализируется напряженно-деформированное состояние ребристых цилиндрических оболочек. В 1962 г. Г. А. Кизима [7] рассмотрела коническую оболочку с меридиональными ребрами.

Большое количество работ посвящено оболочкам вращения с широтными ребрами, но здесь они рассматриваться не будут.

В 1963 г. В. М. Рябов [8] предложил метод последовательных приближений для расчета ребристых оболочек, Н. И. Карпов построил строгое решение для расчета цилиндрических оболочек с произвольно расположенными стрингерами. В 1964 г. Л. А. Ильин [9] рассмотрел термоупругую задачу для оболочки вращения с меридиональными ребрами, причем задача была сведена к бесконечной системе обыкновенных дифференциальных уравнений.

В последние годы теория ребристых оболочек развивается столь интенсивно, что отметить все работы затруднительно. Скажем только, что в работах Е. С. Гребня [11, 12] были получены уравнения равновесия для произвольных оболочек, подкрепленных ребрами вдоль линий главной кривизны.

Хотя в современной теории ребристых оболочек уже получено не мало интересных результатов, тем не менее приходится признать тот факт, что до настоящего времени нет ни единой точки зрения на саму теорию ребристых оболочек, ни общих методов решения краевых задач теории ребристых оболочек.

В данной работе выводятся уравнения динамики ребристых оболочек с учетом температурных членов. Ребра расположены вдоль координатных линий, которые могут не совпадать с линиями главной кривизны. Кроме того, дается интегральное представление решения уравнений равновесия, а также асимптотическим путем построено приближенное решение для оболочки вращения с меридиональными ребрами.

1. Определения и обозначения.

Следуя А. И. Лурье [13], при изложении будем пользоваться тензорным методом. При этом некоторые обозначения и операции заимствуем из работы P. М. Нагди [14]. Отнесем пространство, занятое ребристой оболочкой, к нормальной системе координат [1] (ξ^α, z). Ребристой оболочкой будем называть тонкое упругое тело, ограниченное поверхностями S^+, S^- и Σ. Здесь Σ есть геометрическое место нормалей к базисной поверхности S, построенных вдоль замкнутого контура, лежащего на поверхности S. Зададим S уравнением $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\xi^1, \xi^2)$. Тогда любую точку оболочки можно задать вектором $\mathbf{R} = \mathbf{r} + z\mathbf{a}_3$, где $\mathbf{a}_3$ — вектор единичной нормали к S, а z не превосходит минимального радиуса кривизны поверхности S. Пусть между ребрами оболочка имеет постоянную толщину h. Тогда поверхности S^+ и S^- задаются уравнениями

$$Z^\pm = \frac{1}{2} h + \sum_{k=1}^{n} \gamma_k(\xi^1) h_{2k}^{\pm}(\xi^2) + \sum_{k=1}^{m} \gamma_k(\xi^2) h_{1k}(\xi^1) \tag{1.1}$$

$$\gamma_k(\xi^\alpha) = \theta(\xi^\alpha - \overset{\alpha}{\xi_k} + \overset{\alpha}{\varepsilon_k}) - \theta(\xi^\alpha - \overset{\alpha}{\xi_k} - \overset{\alpha}{\varepsilon_k}), \qquad \mathbf{R}^\pm = \mathbf{r} \pm z^\pm \mathbf{a}_3$$

Здесь $\theta(x)$ — характеристическая функция [15] области $x > 0$; ξ_k^α — линии, по которым расположены ребра, $h_{\alpha k}$ — высота верхнего (нижнего) k-го ребра, расположенного в направлении ξ^α; $2\varepsilon_k^\alpha$ — «ширина» соответствующего ребра.

[1] Греческие индексы пробегают значения 1, 2, а латинские 1, 2, 3.

Базисные векторы на поверхности определяем как $\mathbf{a}_\alpha = \mathbf{r}_{,\alpha}$, $\mathbf{a}_3 = (\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2) |\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2|$. Пространственный базис определяется как $\mathbf{g}_i = \mathbf{R}_{,i}$. Базисы $\mathbf{a}_\alpha$, $\mathbf{a}_3$ и $\mathbf{g}_i$ связаны между собой формулами

$$g_\alpha = \mu_\alpha^{\ \beta} a_\alpha, \quad g_3 = a_3, \quad g^\alpha = (\mu^{-1})_\beta^{\ \alpha} a^\alpha, \quad \mu_\beta^{\ \alpha} (\mu^{-1})_\gamma^{\ \beta} = \delta_\gamma^{\ \alpha} \tag{1.2}$$

$$\mu_\beta^{\ \alpha} = \delta_\beta^{\ \alpha} - z b_\beta^{\ \alpha}, \qquad \mu = \det(\mu_\alpha^{\ \beta})$$

2. Вывод основных соотношений. Согласно основному определению, ребристая оболочка рассматривается как оболочка переменной толщины. Следовательно, уравнения динамики таких оболочек могут быть получены способом, аналогичным использованному в [16]. Запишем интегральные уравнения движения трехмерной сплошной среды

$$\int_O \mathbf{P}\, dO + \int_\Omega \rho (\mathbf{F} - \mathbf{b})\, d\Omega = 0, \qquad \int_O \mathbf{R} \times \mathbf{P}\, dO + \int_\Omega \rho \mathbf{R} \times (\mathbf{F} - \mathbf{b})\, d\Omega = 0 \tag{2.1}$$

Здесь O — полная поверхность, ограничивающая оболочку, Ω — объем, занятый оболочкой, $\mathbf{F}$, $\mathbf{b}$ — поля вектора массовых сил и вектора ускорений, ρ — плотность материала.

Проводя в (2.1) интегрирование по z и применяя формулу Остроградского — Гаусса, получим

$$\nabla_\alpha N^{\alpha\gamma} - b_\alpha^{\ \gamma} Q^\alpha + E_{(0)}^{\gamma} = b_{(0)}^{\gamma}, \qquad \nabla_\alpha Q^\alpha + b_{\alpha\gamma} N^{\alpha\gamma} + E_{(0)}^{3} = b_{(0)}^{3} \tag{2.2}$$

$$\nabla_\alpha M^{\alpha\gamma} - Q^\gamma + E_{(1)}^{\gamma} = b_{(1)}^{\gamma}, \qquad \varepsilon_{j\rho} (N^{\gamma\rho} + b_\alpha^{\ \rho} M^{\alpha\gamma}) = 0$$

Здесь

$$M^{\alpha\gamma} = \int \mu \tau^{\alpha\beta} \mu_\beta^{\ \gamma} z\, dz, \qquad b_{(\alpha)}^{\gamma} = \int \rho \mu b^\gamma z^\alpha\, dz, \qquad b_{(0)}^{3} = \int \rho \mu b^3\, dz$$

$$E_{(0)}^{\gamma} = [\mu \tau^{3\beta} \mu_b^{\ \gamma}]_-^+ + \int \rho \mu F^\gamma\, dz, \qquad E_{(0)}^{3} = [\mu \tau^{33}]_-^+ + \int \rho \mu F^3\, dz \tag{2.3}$$

$$E_{(0)}^{\gamma} = [\mu \tau^{3\beta} \mu_\beta^{\ \gamma} z]_-^+ + \int \rho \mu F^\gamma z\, dz \qquad (\alpha = 0, 1)$$

Все интегралы в формулах (2.3) вычисляются в пределах от z_α^- до z_α^+, а $z_\alpha^\pm$ есть линии пресечения поверхности $\xi^\alpha = \mathrm{const}$ с поверхностями $S^\pm$ соответственно. Символ ∇_α в уравнениях (2.2) означает ковариантную производную в связности S.

Уравнения (2.2) хорошо известны и задача состоит лишь в конкретизации формул (2.3). Рассмотрим сечение оболочки поверхностью $\xi^\alpha = \mathrm{const}$. Линии пресечения этой поверхности с поверхностями S^+ и S^- имеют вид

$$Z_\alpha^\pm = \frac{1}{2} h + \sum_k \gamma_k (\xi^\beta) h_{\alpha k}^\pm (\xi^\alpha) \qquad (\alpha \neq \beta) \tag{2.4}$$

Тензор усилий можно представить в виде суммы

$$N^{\alpha\gamma} = N_*^{\alpha\gamma} + \frac{1}{\sqrt{a_{\beta\beta}}} \sum_k N_k^{\alpha\gamma} \gamma_k (\xi^\beta) (2\varepsilon_k^{\ \beta})^{-1} \tag{2.5}$$

$$N_*^{\alpha\gamma} = \int_{-0.5h}^{0.5h^-} \mu \tau^{\alpha\sigma} \mu_\sigma^{\ \gamma}\, dz, \qquad N_k^{\alpha\gamma} = \int_{F(\alpha,k)} \mu \tau^{\alpha\sigma} \mu_\sigma^{\ \gamma}\, dF_{(\alpha,k)} \tag{2.6}$$

Действительно

$$N^{\alpha\gamma}=\int\limits_{-0.5h}^{0.5h}\mu\tau^{\alpha\sigma}\mu^{\gamma}_{\sigma}dz+\int\limits_{-z_{\alpha}^{-}}^{-0.5h}(\cdots)dz+\int\limits_{0.5h}^{z_{\alpha}^{+}}(\cdots)dz \tag{2.7}$$

Используя (2.4), последние два слагаемых можно переписать в виде

$$\sum_{k}\Big[\int\limits_{-h_{\alpha k}^{-}}^{-0.5h}\mu\tau^{\alpha\sigma}\mu^{\gamma}_{\sigma}dz+\int\limits_{0.5h}^{h_{\alpha k}^{+}}\mu\tau^{\alpha\sigma}\mu^{\gamma}_{\sigma}dz\Big]\gamma_{k}(\xi^{\beta})\qquad(\alpha\neq\beta) \tag{2.8}$$

Далее ширина k-го ребра, расположенного в направлении ξ^{α}, равна $2\sqrt{a_{\beta\beta}\varepsilon_{k}{}^{\beta}}$. Разделив и умножив формулу (2.8) на эту величину и учтя, что $dF_{\alpha k}=2\sqrt{a_{\beta\beta}}\varepsilon_{k}{}^{\beta}dz$ есть элемент площади поперечного сечения ребра, получим вместо (2.8)

$$\frac{1}{\sqrt{a_{\beta\beta}}}\sum_{k}N_{k}^{\alpha\gamma}\gamma_{k}(\xi^{\beta})\,(2\varepsilon_{k}{}^{\beta})^{-1}$$

Подставляя это выражение в (2.7), придем к формуле (2.5).

В формуле (2.5) величина $2\varepsilon_{k}{}^{\alpha}$ предполагается малой, но конечной величиной. Для весьма тонких ребер часто бывает удобнее пользоваться не характеристической функцией $\gamma_{k}(\xi^{\beta})$, а дельта-функцией. Для этого достаточно в формуле (2.5) сделать предельный переход при $\varepsilon_{k}{}^{\beta}\to0$. В результате получим [15]

$$\lim[\gamma_{k}(\xi^{\beta})\,(2\varepsilon_{k}^{\beta})^{-1}]=\delta(\xi^{\beta}-\xi_{k}^{\beta}),\qquad \varepsilon_{k}^{\beta}\to0 \tag{2.9}$$

Тогда формула (2.5) принимает вид

$$N^{\alpha\gamma}=N_{*}^{\alpha\gamma}+\frac{1}{\sqrt{a_{\beta\beta}}}\sum_{k}N_{k}^{\alpha\gamma}\delta(\xi^{\beta}-\xi_{k}^{\beta})\qquad(\alpha\neq\beta) \tag{2.10}$$

Аналогично можно получить формулы

$$M^{\alpha\gamma}=M_{*}^{\alpha\gamma}+\frac{1}{\sqrt{a_{\beta\beta}}}\sum_{k}M_{k}^{\alpha\gamma}\delta(\xi^{\beta}-\xi_{k}^{\beta})\qquad(\alpha\neq\beta) \tag{2.11}$$

$$Q^{\alpha}=Q_{*}^{\alpha}+\frac{1}{\sqrt{a_{\beta\beta}}}\sum_{k}Q_{k}^{\alpha}\delta(\xi^{\beta}-\xi_{k}^{\beta})\qquad(\alpha\neq\beta) \tag{2.12}$$

Здесь

$$\begin{aligned} M_{*}^{\alpha\gamma}&=\int\limits_{-0.5h}^{0.5h}\mu\tau^{\alpha\sigma}\mu_{\sigma}^{\gamma}z\,dz, & M_{k}^{\alpha\gamma}&=\int\limits_{F_{\alpha k}}\mu\tau^{\alpha\sigma}\mu_{\sigma}^{\gamma}z\,dF_{\alpha k}\\ Q_{*}^{\alpha}&=\int\limits_{-0.5h}^{0.5h}\mu\tau^{\alpha3}dz, & Q_{k}^{\alpha}&=\int\limits_{F_{\alpha k}}\mu\tau^{\alpha3}\,dF_{\alpha k}\end{aligned} \tag{2.13}$$

В заключение этого пункта приведем выражение для интегральной характеристики поля вектора ускорений

$$b_{(\sigma)} = b^*_{(\sigma)} + \frac{1}{\sqrt{a_{11}}}\sum_{k=1}^{n} b_{(\sigma)2k}\delta(\xi^1 - \xi^1_k) + \frac{1}{\sqrt{a_{22}}}\sum_{k=1}^{m} b_{(\sigma)1k}\delta(\xi^2 - \xi^2_k)$$

$$b_{(\sigma)} = \int_{-0.5h}^{0.5h} \rho\mu b z^\sigma\, dz, \qquad b_{(\sigma)\alpha k} = \int_{F_{\alpha k}} \rho\mu b z^{(\sigma)}\, dF_{\alpha k} \qquad (\sigma=0,1) \tag{2.14}$$

Выражение для поля массовых сил получается заменой $b_{(\sigma)}$ на $F_{(\sigma)}$.

3. Соотношения упругости для ребристых оболочек. Используя закон Гука, можно выразить тензор напряжений через тензор деформации трехмерного тела. Выражая далее тензор деформации через первый и второй метрические тензоры деформации базисной поверхности и подставляя все это в формулы (2.6), (2.10) — (2.13), получим соотношения

$$N^{\alpha\gamma} = \frac{E}{1-\nu^2}\left[A_{(0)}^{\beta\alpha\gamma\rho}\gamma_{\nu\rho} + A_{(1)}^{\beta\alpha\nu\rho}k_{\nu\rho} - (1+\nu)\alpha a^{\varepsilon} I_{(0)\varepsilon}^{\beta}\right] +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{a_{\beta\beta}}}\sum_k E_{(\alpha k)}\left[B_{(0k)}^{\gamma\alpha\nu\rho} + B_{(1k)}^{\gamma\alpha\nu\rho}k_{\nu\rho} - \alpha_{(\alpha k)}a^{\varepsilon\gamma}I_{(0k)\varepsilon}^{\alpha}\right]\delta(\xi^\beta - \xi^\beta_k) \tag{3.1}$$

$$M^{\alpha\gamma} = \frac{E}{1-\nu^2}\left[A_{(1)}^{\beta\alpha\nu\rho}\gamma_{\nu\rho} + A_{(2)}^{\beta\alpha\nu\rho}k_{\nu\rho} - (1+\nu)\alpha a^{\varepsilon\beta} I_{(1)\varepsilon}^{\alpha}\right] + \tag{3.2}$$

$$+\frac{1}{\sqrt{a_{\beta\beta}}}\sum_k E_{(\alpha k)}\left[B_{(1k)}^{\gamma\alpha\nu\rho}\gamma_{\nu\rho} + B_{(2k)}^{\gamma\alpha\nu\rho}k_{\nu\rho} - \alpha_{(\alpha k)}a^{\varepsilon\gamma}I_{(1k)\varepsilon}^{\alpha}\right]\delta(\xi^\beta - \xi^\beta_k)$$

$$Q^\alpha = \frac{E}{1+\nu}A^{\alpha\beta}\gamma_{\beta\zeta} + \frac{1}{\sqrt{a_{\beta\beta}}}\sum_k E_{(\alpha k)}B_{(k)}^{\alpha\sigma}\gamma_{\sigma\zeta}\delta(\xi^\beta - \xi^\beta_k) \tag{3.3}$$

Здесь

$$A_{(n)}^{\beta\alpha\nu\rho} = H^{\alpha\varepsilon\nu\mu}\int_{-0.5h}^{0.5h} \mu(\mu^{-1})_\varepsilon^\beta (\mu^{-1})_\mu^\rho z^n\, dz, \qquad I_{(\sigma)\varepsilon}^{\alpha} = \int_{-0.5h}^{0.5h}\mu(\mu^{-1})_\varepsilon^\alpha z^\sigma\, dz$$

$$A^{\alpha\beta} = a^{\varepsilon\mu}\int_{-0.5h}^{0.5h}\mu(\mu^{-1})_\varepsilon^\alpha(\mu^{-1})_\mu^\beta\, dz$$

$$H^{\alpha\varepsilon\nu\mu} = \frac{1-\nu}{2}(a^{\alpha\nu}a^{\beta\mu} + a^{\beta\nu}a^{\alpha\mu}) + \nu a^{\alpha\varepsilon}a^{\nu\mu}$$

$$B_{(nk)}^{\beta\alpha\nu\rho} = H_*^{\alpha\varepsilon\nu\mu}\int_F \mu(\mu^{-1})_\varepsilon^\beta(\mu^{-1})_\mu^\rho\, dF, \qquad H_*^{\alpha\varepsilon\nu\mu} = \frac{1}{2}(a^{\varepsilon\nu}a^{\beta\mu} + a^{\beta\nu}a^{\varepsilon\mu})$$

$$B_{(k)}^{\alpha\beta} = a^{\varepsilon\mu}\int_{F_{(\alpha k)}}\mu(\mu^{-1})_\varepsilon^\alpha(\mu^{-1})_\mu^\beta\, dF, \qquad I_{(\sigma k)\varepsilon}^{\alpha} = \int_{F_{(\alpha k)}}\mu(\mu^{-1})_\varepsilon^\alpha T z^\sigma\, dF \qquad (n=0,1,2;\ \sigma=0,1)$$

Здесь $\alpha_{(k)}$ — коэффициенты линейного расширения материала ребер. Пр... ...аткий вывод формул (3.1) — (3.3).

... ...ементарных преобразований закон Гука для изотропной упругой ...] принимает вид

$$\tau^{\alpha\beta} = \frac{E}{1-\nu^2}\left[B^{\alpha\beta\nu\rho} e_{\lambda\rho} - (1+\nu) g^{\alpha\beta}\alpha T\right], \qquad \tau^{\alpha 3} = 2G g^{\alpha\nu} e_{\gamma 3} \tag{3.4}$$

$$e^{33} = -\frac{\nu}{1-\nu} g^{\alpha\beta} e_{\alpha\beta} + \frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha T, \qquad B^{\alpha\beta\nu\rho} = {}^1/_2 (g^{\alpha\nu} g^{\beta\rho} + g^{\alpha\rho} g^{\beta\nu}) + \nu g^{\alpha\beta} g^{\nu\rho}$$

Здесь α — коэффициент линейного расширения, T — температура. Связь те... деформации e_{ij} с вектором перемещения $\mathbf{u} = u_\alpha \mathbf{a}^\alpha + u_3 \mathbf{a}_3$ имеет ви...]

$$2e_{\alpha\beta} = \overset{\delta}{\mu_\alpha} (\nabla_\beta u_\delta - b_{\delta\beta} u_3) + \overset{\delta}{\mu_\beta} (\nabla_\alpha u_\delta - b_{\delta\alpha} u_3) \tag{3.5}$$

$$2e_{\alpha 3} = \overset{\delta}{\mu_\alpha} u_{\delta 3} + u_{3\alpha} + \overset{\beta}{b_\alpha} u_\beta, \qquad e_{33} = u_{33}$$

Разложив вектор перемещения в ряд Тейлора и ограничиваясь линейными членами, получим

$$u_\alpha = v_\alpha(\xi^1, \xi^2) + z\beta_\alpha(\xi^1, \xi^2), \qquad u_3 = w(\xi^1, \xi^2) \tag{3.6}$$

Подставляя (3.6) в (3.5), имеем

$$2e_{\alpha\beta} = \overset{\gamma}{\mu_\alpha} (\gamma_{\gamma\beta} + z k_{\gamma\beta}) + \overset{\gamma}{\mu_\beta} (\gamma_{\gamma\alpha} + z k_{\gamma\alpha}), \qquad 2e_{\alpha 3} = \gamma_{\alpha 3}, \qquad e_{33} = 0$$

$$\gamma_{\alpha\beta} = \nabla_\beta v - b_{\alpha\beta} w, \quad k_{\alpha\beta} = \nabla_\beta \beta_\alpha, \quad \gamma_{\alpha 3} = \beta_\alpha + w_{,\alpha} + \overset{\beta}{b_\alpha} v_\beta \tag{3.7}$$

В дальнейшем принято, что $e_{33} \neq 0$. Вместо этого считаем, что $\tau^{33} = 0$. Это уже учтено в (3.4). Подставляя (3.3) — (3.7) в (2.6), (2.10) — (2.13), приходим к формулам (3.1) — (3.3).

4. **Упрощение полученных формул.** Полученные в п. 3 соотношения хотя и являются приближенными в силу приближенности (3.6), тем не менее они точнее теорий, основанных на гипотезах Кирхгофа — Лява. Однако для практики часто оказывается возможным ограничиться менее точными выражениями. При принятии гипотез Кирхгофа — Лява формулы (3.6) станут точными, но при этом вектор β_α не является более независимым, что и вносит дополнительную погрешность. Действительно, при этом $\gamma_{\alpha 3} = 0$, т. е. $\beta_\alpha = -(w_{,\alpha} + b_\alpha{}^\sigma v_\sigma)$.

Кроме того, учитывая погрешность гипотез Кирхгофа — Лява, следует ...ть, что

$$\mu = 1, \qquad \overset{\alpha}{\mu_\beta} = \overset{\alpha}{(\mu^{-1})_\beta} = \delta_\beta^\alpha$$

При этом все формулы п. 3 существенно упрощаются

$$A_{(\bullet)} = hH, \qquad A_{(1)} = 0, \qquad A_{(2)} = {}^1/_{12} h^3 H, \qquad B_{(1k)} = H_* S_{(\alpha k)}$$

$$I^\alpha_{(\sigma)\varepsilon} = \delta^\alpha_\varepsilon \int_{-0.5h}^{0.5h} T z^\sigma\, dz, \qquad B_{(0k)} = F_{(\alpha k)} H_*, \qquad B_{(2k)} = H_* J_{(\alpha k)} \quad (\sigma = 0, 1)$$

Здесь $F_{(\alpha k)}$, $S_{(\alpha k)}$, $J_{(\alpha k)}$ — площадь поперечного сечения ребра, его статический момент и момент инерции. Если, кроме того, ребра расположены вдоль линий главной кривизны, то формулы (3.1)—(3.3) становятся обозримыми даже в физических компонентах тензоров

$$T_{12}=Gh\omega+\frac{1}{2A_2}\sum_{k=1}^{m}[E_{1k}F_{1k}\omega+E_{1k}S_{1k}(\tau_1+\tau_2)]\delta(\alpha_2-\alpha_{2k}) \tag{4.1}$$

$$T_{21}=Gh\omega+\frac{1}{2A_1}\sum_{k=1}^{n}[E_{2k}F_{2k}\omega+E_{2k}S_{2k}(\tau_1+\tau_2)]\delta(\alpha_1-\alpha_{1k}) \tag{4.2}$$

$$T_1=\frac{Eh}{1-\nu^2}[\varepsilon_1+\nu\varepsilon_2-(1+\nu)\alpha T_{(0)}]+\frac{1}{A_2}\sum_{k=1}^{m}[E_{1k}F_{1k}\varepsilon_1+ \tag{4.3}$$
$$+E_{1k}S_{1k}\varkappa_1-\overset{1}{\alpha}_k E_{1k}\overset{1}{T}_{k(0)}]\delta(\alpha_2-\alpha_{2k})$$

$$T_2=\frac{Eh}{1-\nu^2}[\varepsilon_2+\nu\varepsilon_1-(1+\nu)\alpha T_{(0)}]+\frac{1}{A_1}\sum_{k=1}^{n}[E_{2k}F_{2k}\varepsilon_1+ \tag{4.4}$$
$$+E_{2k}S_{2k}\varkappa_2-\overset{2}{\alpha}_k E_{2k}\overset{2}{T}_{k(0)}]\delta(\alpha_1-\alpha_{1k})$$

$$M_1=\frac{Eh^2}{12(1-\nu^2)}[\varkappa_1+\nu\varkappa_2-(1+\nu)\alpha T_{(1)}]+\frac{1}{A_2}\sum_{k=1}[E_{1k}S_{1k}\varepsilon_1+ \tag{4.5}$$
$$+E_{1k}J_{1k}\varkappa_1-\overset{1}{\alpha}_k\overset{1}{T}_{k(1)}E_{1k}]\delta(\alpha_2-\alpha_{2k})$$

$$M_2=\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}[\varkappa_2+\nu\varkappa_1-(1+\nu)\alpha T_{(1)}]+\frac{1}{A_1}\sum_{k=1}^{n}[E_{2k}S_{2k}\varepsilon_2+ \tag{4.6}$$
$$+E_{2k}J_{2k}\varkappa_2-\overset{2}{\alpha}_k\overset{2}{T}_{k(1)}E_{2k}]\delta(\alpha_1-\alpha_{1k})$$

$$M_{12}=\frac{Gh^3}{12}(\tau_1+\tau_2)+\frac{1}{2A_2}\sum_{k=1}^{m}[E_{1k}S_{1k}\omega+E_{1k}J_{1k}(\tau_1+\tau_2)]\delta(\alpha_2-\alpha_{2k}) \tag{4.7}$$

$$M_{21}=\frac{Gh^3}{12}(\tau_2+\tau_1)+\frac{1}{2A_1}\sum_{k=1}^{n}[E_{2k}S_{2k}\omega+E_{2k}J_{2k}(\tau_2+\tau_1)]\delta(\alpha_1-\alpha_{1k}) \tag{4.8}$$

5. Обсуждение полученных результатов. Выше были получены уравнения динамики ребристых оболочек с учетом температурных членов.

Нетрудно видеть, что основные формулы (3.1)—(3.3) или (4.1)—(4.8) отличаются от полученных в [12]. Это объясняется тем, что в [12] были приняты несовместные гипотезы для оболочек и ребер. Это нашло математическое выражение в том, что в [12] уравнения равновесия получились неэллиптического типа. Полученные выше уравнения свободны от этого недостатка, однако и они не вполне удовлетворительны. Особенно это касается формул (4.5)—(4.8). Из физических соображений и известных результатов теории стержней ясно, что жесткости ребер на кручение здесь завышены. Как именно они будут уточняться, покажут дальнейшие работы, ясно лишь одно, что гипотезы, положенные в основу теории ребристых оболочек, должны быть едиными и для ребер и для оболочки.

6. Интегральное представление решений уравнений равновесия ребристых оболочек. Подставляя (4.1)—(4.8) в уравнения равновесия в усилиях и моментах и используя формулы (3.7), получим уравнения равновесия оболочек в перемещениях. В операторной форме они имеют вид

$$Ku + Pu = q \tag{6.1}$$

Здесь K — известный дифференциальный аффинор теории гладких оболочек, а P — дополнительный дифференциальный аффинор, зависящий от параметров ребер и содержащий особенности типа δ-функций или $\gamma_k(x) / \Delta x$. Перепишем (6.1) в виде

$$Ku = q + R \qquad (R = -Pu) \tag{6.2}$$

Здесь R — реакция ребер.

Допустим, что для гладкой оболочки известен тензор Грина, т. е. известно решение уравнения

$$KG(\xi / \xi_0 = E\delta(\xi - \xi_0) \tag{6.3}$$

Здесь E — единичный тензор, $\xi = (\xi^1, \xi^2)$. Для цилиндрических оболочек тензор Грина построен в целом ряде работ, а для оболочек положительной гауссовой кривизны тензор Грина построен в работе [18].

Зная тензор Грина G, решение уравнения (6.2) можно записать в виде

$$u(\xi) = \iint\limits_{(S)} G(\xi/\xi_0) \cdot [q(\xi_0) - Pu(\xi_0)]\, d\xi_0 \tag{6.4}$$

или

$$u(\xi) = u_0(\xi) \iint\limits_{(S)} G(\xi/\xi_0) \cdot R(\xi_0)\, d\xi_0, \qquad u_0(\xi) = \iint\limits_{(S)} G \cdot q\, d\xi_0 \tag{6.5}$$

Здесь $u_0(\xi)$ — прогиб оболочки без ребер под заданной нагрузкой.

Проводя операцию P над обеими частями (6.5), получим

$$R(\xi) = R_0(\xi) - \iint\limits_{(S)} PG(\xi/\xi_0) \cdot R(\xi_0)\, d\xi_0 \tag{6.6}$$

Таким образом, интегральное представление решения уравнений равновесия ребристых оболочек дается формулой (6.5), в которой вектор R определяется как решение уравнений Фредгольма второго рода (6.6). Для ряда случаев решение этого уравнения отыскивается весьма просто. Например, для цилиндрической оболочки при использовании разложения в двойные тригонометрические ряды вместо (6.6) получим систему алгебраических уравнений, аналогичную полученным в работах Н. И. Карпова [19], В. А. Заруцкого [20]. Кроме того, из уравнений (6.6) легко получить критерий сходимости метода последовательных приближений.

7. Формулировка краевой задачи. Рассмотрим оболочку вращения с меридиональными ребрами, расположенными вдоль меридианов $\varphi = \varphi_k = 2\pi(k-1) / m$. Допустим, что ребра имеют одинаковые геометрические и упругие характеристики, а нагрузка является периодической функцией с периодом, кратным числу ребер $2\pi / m$.

Уравнения равновесия в этом случае имеют вид

$$Lu + h_*^2 Nu + \sum_{k=1}^{m} M_k u \delta(\varphi - \varphi_k) = q \tag{7.1}$$

Здесь L и N — известные дифференциальные аффиноры обычной теории оболочек [21, 22], u — вектор перемещения, M_k — дифференциальный аффинор, зависящий от параметров ребер. Важно отметить, что M_k по существу обыкновенные операторы по переменной ξ — меридиональной координате. Конкретный вид этих операторов будет дан ниже для ряда частных случаев. Решение уравнения (7.1) должно удовлетворять четырем краевым условиям на каждом краю $\xi=\xi_0$, $\xi=\xi_1$ и условиям периодичности по окружной координате. Ищем его в виде суммы $\mathbf{u}=\mathbf{u}_0+\mathbf{w}$, где вектор $\mathbf{u}_0$ есть решение уравнения

$$L\mathbf{u}_0+h_*^2N\mathbf{u}_0=\mathbf{q} \tag{7.2}$$

и называется основным. Здесь и ниже будем считать, что вектор $\mathbf{u}_0$ известен, т. е. найдено решение для гладкой оболочки под заданной внешней нагрузкой, удовлетворяющее заданным краевым условиям на краях $\xi=\xi_0$, $\xi=\xi_1$. Вектор $\mathbf{w}$ будем называть дополнительным. Он определяется как решение уравнения

$$h_*^2N\mathbf{w}+L\mathbf{w}=-\sum_{k=1}^{n}M_k(\mathbf{u}_0+\mathbf{w})\,\delta(\varphi-\varphi_k) \tag{7.3}$$

Очевидно, что $\mathbf{w}$ удовлетворяет однородным уравнениям на краях $\xi=\xi_0$, $\xi=\xi_1$. Из (7.3) видно, что $\mathbf{w}\equiv 0$, если $M_k\mathbf{u}_0=0$. Это говорит о том, что для ряда случаев, которые легко определить, ребра не участвуют в работе ребристой оболочки. Учитывая ограничения, накладываемые на условия задачи, можно утверждать, что $\mathbf{w}$ будет периодической функцией с периодом $2\pi/m$. Поэтому решение уравнений (7.3) достаточно найти в области $\xi_0<\xi<\xi_1$. В этой области уравнение (7.3) становится однородным

$$L\mathbf{w}+h_*^2N\mathbf{w}=0 \tag{7.4}$$

Решение уравнения (7.4) необходимо подчинить краевым условиям: однородным на части контура $\xi=\xi_0$, $\xi=\xi_1$ и неоднородным на остальной части контура, т. е. на линиях $\varphi=0$, $\varphi=2\pi/m$. Роль краевых условий на этих линиях играют условия склейки [23, 24].

Предварительно введем некоторые обозначения. Пусть u, v, w — компоненты вектора $\mathbf{w}$, $u^+=u(2\pi/m+0)$, $u^-=u(2\pi/m-0)$ и т. д. Если учесть, что все функции имеют период $2\pi/m$, то можно написать $u^+=u(2\pi/m+0)=u(0)$. В этих обозначениях условия склейки имеют вид

$$u^+=u^-,\quad v^+=v^-,\quad w^+=w^-,\quad w'^+=w'^-,\quad w''^+=w''^- \tag{7.5}$$

$$\frac{1-\nu}{2\rho}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\Big|_-^+ + \frac{\partial(\alpha a\varepsilon_1^+ + \beta a^2\varkappa_1^+)}{\partial\xi}+\frac{\partial(\beta a\varepsilon_1^+ + \gamma a^2\varkappa_1^+)}{r_1\partial\xi}=q_1^+ \tag{7.6}$$

$$\frac{h_*^2}{\rho^3}\frac{\partial^3 w}{\partial\varphi^3}\Big|_-^+ - \frac{\partial^2(\beta a\varepsilon_1^+ + \gamma a^2\varkappa_1^+)}{\partial\xi^2}+\frac{\alpha a\varepsilon_1^+ + \beta a^2\varkappa_1^+}{r_1}=q_3^+ \tag{7.7}$$

Здесь

$$q_1^+=-\left[\frac{\partial(\alpha a\varepsilon_1^\circ+\beta a^2\varkappa_1^\circ)}{\partial\xi}+\frac{\partial(\beta a\varepsilon_1^\circ+\gamma a^2\varkappa_1^\circ)}{r_1\partial\xi}\right]_{\varphi=0}$$

$$q_3^+=\left[\frac{\partial^2(\beta a\varepsilon_1^\circ+\gamma a^2\varkappa_1^\circ)}{\partial\xi^2}-\frac{\alpha a\varepsilon_1^\circ+\beta a^2\varkappa_1^\circ}{r_1}\right]_{\varphi=0}$$

Обозначения в этих формулах совпадают с принятыми в [25]. Деформации ε_1° и $\varkappa_1^{\circ}$ вычисляются через известный вектор $\mathbf{u}_0$, ρ — безразмерный радиус параллельного круга, r_1 — безразмерный радиус кривизны.

Условия (7.6) (7.7) определяют скачки в первой производной от u и в третьей производной от w. Причем величина этих скачков определяется как раз правой частью уравнения (7.3). Параметры α, β, γ и h_* вычисляются по формулам

$$\alpha = E_0F/aB, \quad \beta = E_0S/a^2B, \quad \gamma = E_0I/a^3B, \quad h_* = D/a^2B$$

где E_0 — модуль упругости материала ребер, F, S и I — площадь поперечного сечения ребра, его статический момент и момент инерции, B и D — жесткость оболочки на растяжение и изгиб, a — некоторый линейный размер.

Теперь можно дать окончательную формулировку краевой задачи: найти в прямоугольнике $\xi_0 < \xi < \xi_1$, $0 < \varphi < 2\pi/m$ решение уравнения (7.4) и подчинить его заданным однородным условиям на части контура $\xi = \xi_0$, $\xi = \xi_1$ и неоднородным условиям (7.5)—(7.7).

В такой постановке данная задача не отличается от задач, многократно обсуждавшихся А. Л. Гольденвейзером [21, 22]. Поэтому ниже по возможности без подробностей будут использоваться результаты этих работ. Прежде всего необходимо различать оболочки нулевой гауссовой кривизны, поскольку у них меридианы являются асимптотическими линиями, и все остальные оболочки вращения.

8. Оболочки нулевой гауссовой кривизны. В качестве исходной системы уравнений возьмем уравнения Муштари — Доннела — Власова [25]. Оправданием для этого служат два обстоятельства. Во-первых, в данном случае решение будет быстроменяющимся, для которого эти уравнения являются асимптотически точными [22]. Во-...х, между ребрами оболочку допустимо считать пологой, хотя в целом оболочка ...й не является. Упомянутые уравнения имеют вид

$$\Delta\Delta C + \frac{1}{r_2}\frac{\partial^2 w}{\partial\xi^2} = 0, \qquad h_*^2\Delta\Delta w - \frac{1-\nu^2}{r_2}\frac{\partial^2 C}{\partial\xi^2} = 0$$

$$\Delta = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\xi}\rho\frac{\partial}{\partial\xi} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \tag{8.1}$$

Здесь C — одна из функций напряжения Лурье — Гольденвейзера, через которую известным образом [25] выражаются усилия T_1, T_2 и S. При решении (8.1) будем различать случаи

$$(1) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial\xi^2} \ll \frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}, \qquad (2) \quad \frac{\partial^2}{\partial\xi^2} \gg \frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2} \tag{8.2}$$

где f — любая из встречающихся функций.

Рассмотрение первого случая приводит к невырожденному краевому эффекту [20], ...ния которого следует из (8.1), если в них учесть первое из неравенств (8.2)

$$h_*^2\frac{\partial^8 C}{\partial\varphi^8} + (1-\nu^2)\Lambda C = 0, \qquad \Lambda = \frac{\rho^4}{r_2}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\frac{\rho^4}{r_2}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} \tag{8.3}$$

Решение (8.3) ищется в виде ряда

$$C = \sum_m C_m(\varphi)\psi_m(\xi) \tag{8.4}$$

где $\psi_m(\xi)$ — собственные функции оператора Λ.

Решение уравнения (8.3) содержит достаточно произволов, чтобы удовлетворить ... краевым условиям (7.5)—(7.7) и четырем краевым условиям на криволинейных краях. Оставшиеся четыре краевых условия на криволинейных краях можно удовлетворить, если добавить простой краевой эффект, т. е. рассмотреть второй случай (8.2)

$$r_2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} r_2 \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{1-\nu^2}{h_*^2} w = 0 \tag{8.5}$$

Если пренебречь тангенциальной реакцией ребер, то легко показать, что уравнения (8.5) имеют только тривиальное решение. Тогда для определения дополнительного напряженного состояния достаточно рассмотреть уравнение (8.5). В такой постановке задача решена в работе [26]. Правда в [26] не показано, что уравнения (8.5) имеют только тривиальное решение, но это будет сделано дальше.

9. Оболочки, у которых $r_1^{-1} \approx O(1)$. Обратимся к рассмотрению оболочек вращения, у которых $r_1^{-1} \sim O(1)$. Если кривизну меридиана оболочки нельзя считать малой, то с принципиальной точки зрения задача значительно упрощается. Здесь в первую очередь имеются в виду такие оболочки, как сфера и тор. Поскольку в данном случае область $\xi_0 < \xi < \xi_1$, $0 < \varphi < 2\pi / m$ ограничена контуром, который нигде не касается асимптотических линий, то вблизи контура возможен только простой краевой эффект [21, 22]. Если имеют место известные условия регулярности вырождения, а ниже это будет показано, то общее решение основной краевой задачи можно представить [27] в виде асимптотического ряда

$$\mathbf{u} = \sum_{s=0}^{n} \varepsilon^{\rho} (\mathbf{u}^s + \overset{s}{\mathbf{u}}_1 + \overset{s}{\mathbf{u}}_2) + O(\varepsilon^{n+1}), \qquad \varepsilon = \sqrt{h_*} \tag{9.1}$$

где $\mathbf{u}^s$ — решение вырожденной задачи, которое строится на основе первого итерационного процесса, $\overset{s}{\mathbf{u}}_1$, $\overset{s}{\mathbf{u}}_2$ — функции типа погранслоя вблизи краев $\varphi = 0$, $\varphi = 2\pi / m$ и $\xi = \xi_0$, $\xi = \xi_1$, соответственно определяющиеся при помощи второго итерационного процесса. Для практических целей часто оказывается возможным ограничиться главными членами в (9.1). В этом случае функции $\mathbf{u}_1^\circ$ и $\mathbf{u}_2^\circ$ определяются независимо одна от другой. Оставляя в (9.1) главные члены, получим следующее представление решения:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^\circ + \overset{\circ}{\mathbf{u}}_1 + \overset{\circ}{\mathbf{u}}_2 \equiv \mathbf{u}^\circ + \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 \tag{9.2}$$

Учтем далее известный факт, что компоненты векторов $\mathbf{u}_1 \equiv (u_1, v_1, w_1)$ и $\mathbf{u}_2 \equiv (u_2, v_2, w_2)$ будут функциями типа погранслоя различного порядка [21, 22]. А именно функции u_1, u_2, v_1, v_2 есть функции типа погранслоя первого порядка, а функции w_1, w_2 — нулевого порядка. Поэтому, оставляя главные члены в u_1, u_2, имеем

$$\mathbf{u}_1 = (0,\ 0,\ w_1), \qquad \mathbf{u}_2 = (0,\ 0,\ w_2) \tag{9.3}$$

Если найдены функции w_1, w_2, то легко строятся [21] функции u_1, u_2 и v_1, v_2. Уравнения для определения функций w_1 и w_2 хорошо известны [21, 22] и представляют собой уравнения простого краевого эффекта. А именно w_1 определяется как общий интеграл уравнения

$$\partial^4 w_1 / \partial \varphi^4 + (1-\nu^2)\rho^4 w_1 / r_1^2 h_*^2 = 0 \tag{9.4}$$

Функция w_2 определяется из уравнения

$$\partial^4 w_2 / \partial \xi^4 + (1-\nu^2) w_2 / r_2^2 h_*^2 = 0 \tag{9.5}$$

Характеристическое уравнение для уравнения (9.4) имеет корни

$$x_{1,2,3,4} = \mp(1 \pm i)\lambda, \qquad \lambda = (1-\nu^2)^{1/4}\rho / \sqrt{2 r_1 h_*} \tag{9.6}$$

Два корня (9.6) имеют отрицательную вещественную часть, а два — положительную, т. е. условия регулярного вырождения выполнены. То же самое можно сказать и о (9.6). Оставляя в стороне вопрос об отыскании функции w_2, поскольку он хорошо изучен [22], обратимся к определению функции w_1. Допустим, что вырожденная задача решена, т. е. найден вектор $\mathbf{u}^\circ \equiv (u^\circ, v^\circ, w^\circ)$, удовлетворяющий вырожденному уравнению $L\mathbf{u} = 0$ и краевым условиям B_0. Согласно (9.2), (9.3) компоненты дополнительного вектора перемещений имеют вид

$$u = u^\circ, \qquad v = v^\circ, \qquad w = w^\circ + w_1 + w_2 \tag{9.7}$$

Подставляя (9.7) в краевые условия $B = B_0 + B_1$, видим, что B_0 удовлетворяются с точностью до второстепенных членов, а условия (7.5), (7.7) принимают вид

$$w_1|_-^+ = -w^\circ|_-^+ = p_1, \quad w_1'|_-^+ = -w^{\circ\prime}|_-^+ = p_2, \quad w_1''|_-^+ = -w^{\circ\prime\prime}|_-^+ = p_3 \tag{9.8}$$

$$\frac{h_*^2}{\rho^3}\frac{\partial^3 w_1}{\partial\varphi^3}\Big|_+^- - \frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\left(\frac{\beta}{r_1}w_1 - \gamma\frac{\partial^2 w_1}{\partial\xi^2}\right) + \frac{\alpha w_1}{r_1} - \frac{\beta}{r_1}\frac{\partial^2 w_1}{\partial\xi^2} = \bar{q_3} - \bar{p_4}$$

$$\bar{p_4} = \frac{h^{*2}}{\rho^3}\frac{\partial^3 w^\circ}{\partial\varphi^3}\Big|_+^- - \left[\frac{\partial^2(\beta a\overset{*}{\varepsilon}_1 + \gamma a^2\overset{*}{\varkappa}_1)}{\partial\xi^2} - \frac{\alpha a\overset{*}{\varepsilon}_1 + \beta a^2\overset{*}{\varkappa}_2}{r_1}\right]_{\varphi=0} \tag{9.9}$$

Компоненты деформации вычисляются через компоненты вектора перемещений [illegible], w°. Без дополнительных рассуждений ясно, что в (9.8) $p_1 = 0$. В отношении [illegible] этого сказать нельзя, но можно утверждать, что p_2 и тем более p_3 малы по [illegible]ию с любым из членов соответствующих левых частей в (9.8), поскольку [illegible] w_1 при дифференцировании возрастает, а функция w° этим свойством не [illegible]т. Следовательно, с точностью до малых членов в (9.8) нужно положить [illegible] $= p_2 = p_3 = 0$, а в выражении для $\bar{p_4}$ отбросить подчеркнутый член.

Функция w_1 определяется как общий интеграл уравнения (9.4), который имеет вид

$$w_1 = C_1(\xi)\psi_1(\lambda, \varphi) + \ldots + C_4(\xi)\psi_4(\lambda, \varphi) \tag{9.10}$$

$$\psi_{1,2} = e^{-\lambda\varphi}\begin{cases}\cos\lambda\varphi\\ \sin\lambda\varphi\end{cases}, \quad \psi_{3,4} = e^{-\lambda(2\pi/m-\varphi)}\begin{cases}\cos\lambda(2\pi/m-\varphi)\\ \sin\lambda(2\pi/m-\varphi)\end{cases} \tag{9.11}$$

Здесь C_k — произвольные функции.

Из (9.10) следует, что два решения убывают от края $\varphi = 0$, а два — от края $\varphi = 2\pi/m$. Если m не слишком велико, т. е. $m < 2\pi\lambda$, то влиянием краев можно пренебречь. В этом случае из (9.8) имеем, что $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = C(\xi)$. Учитывая это и подставляя (9.10) в (9.11), получим уравнение для определения функции

$$\frac{d^2}{d\xi^2}\gamma\frac{d^2C}{d\xi^2} - \frac{\beta}{r_1}\frac{d^2C}{d\xi^2} - \frac{d^2}{d\xi^2}\frac{\beta C}{r_1} + \left[\frac{\alpha}{r_1^2} + \frac{(1-\nu^2)^{3/4}}{r_1\sqrt{r_1}}(8h_*)^{1/2}\right]C = \bar{q_3} - \bar{p_4} \tag{9.12}$$

Решив (9.12), найдем $C(\xi)$, а вместе с ней и w_1. Кстати заметим, что в (9.12) нельзя отбросить член, содержащий $(8h_*)^{1/2}$, поскольку α, β, γ — тоже малые величины. Особенно простой вид уравнение (9.12) принимает для сферы и тора. Для сферического пояса $r_1 = 1$, $\xi = \theta$

$$\gamma\frac{d^4C}{d\theta^4} - 2\beta\frac{d^2C}{d\theta^2} + [\alpha + (8h_*)^{1/2}(1-\nu^2)^{3/4}]C = \bar{q_3} - \bar{p_4} \tag{9.13}$$

Для тора $r_1 = b$, $b = R/a$, $d\xi = bd\theta$,

$$\gamma\frac{d^4C}{d\theta^4} - 2\beta\frac{d^2C}{d\theta^2} + b^2[\alpha + (8h_*)^{1/2}(1-\nu^2)^{3/4}]C = b^4(\bar{q_3} - \bar{p_4}) \tag{9.14}$$

Здесь θ — угловая координата в меридиональном сечении, b — эксцентриситет тора.

В заключение этого пункта отметим, что уравнение (9.12) несправедливо для сферического купола с меридиональными ребрами, поскольку в вершине купола $\lambda = 0$. Вообще все рассуждения несправедливы для куполообразной оболочки и следует искать другой путь решения.

10. Упрощение решения. Задача существенно упрощается, если пренебречь тангенциальной реакцией ребер. В этом случае условие (7.6) становится однородным, таким образом вырожденная задача имеет только тривиальное решение

$$u^\circ = v^\circ = w^\circ = 0 \tag{10.1}$$

Дополнительное напряженное состояние имеет вид простого краевого эффекта вблизи ребер. Из (10.1) между прочим следует, что $w_2 = 0$, т. е. простой краевой эффект вблизи краев $\xi = \xi_0$, $\xi = \xi_1$ не отличается от такового в гладкой оболочке. Разумеется, следует помнить, что m достаточно мало.

Поступила 1 X 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Шиманский Ю. А. Изгиб тонких цилиндрических оболочек, подкрепленных ребрами конечной жесткости. Бюл. Н.-и. ин-та военного кораблестроения, 1933, № 1.
2. Шиманский Ю. А. Строительная механика подводных лодок. Л., Судпромгиз, 1948.
3. Панкович П. Ф. О напряжениях в цилиндрической оболочке прочного корпуса подводной лодки. Бюл. Научн.-техн. ком-та Управления военно-морских сил, 1928, вып. 1.
4. Власов В. З. Тонкостенные пространственные системы. М., Госстройиздат, 1958.
5. Герцберг Е. Я. Влияние горизонтальных фланцев на напряженное состояние турбинного цилиндра. Сб. «Прочность элементов паровых турбин», М.— Л., Машгиз, 1951.
6. Амбарцумян С. А. Расчет симметрично-нагруженной круговой цилиндрической оболочки, подкрепленной продольными ребрами. Докл. АН АрмССР, 1955, т. 21, № 4, стр. 157—62.
7. Кизима Г. А. Исследование напряженного состояния ребристых оболочек нулевой гауссовой кривизны. Тр. IV Всес. конф. по теории оболочек и пластин (Ереван, 1962). Изд-во АН АрмССР, 1964.
8. Рябов В. М. Применение метода последовательных приближений при расчете ребристых оболочек. Изв. АН СССР. Механика и машиностроение, 1963, № 6.
9. Карпов Н. И. Об одном способе определения напряженно-деформированного состоянии оболочки, подкрепленной разноудаленными ребрами жесткости. Прикл. механ., 1963, т. 9, вып. 3.
10. Ильин Л. А. Дифференциальные уравнения упругого равновесия оболочек вращения с меридиональными ребрами при силовых и температурных нагрузках. Прикл. механ., 1964, т. 10, вып. 3.
11. Гребень Е. С. Основные соотношения технической теории ребристых оболочек. Изв. АН СССР. Механика, 1965, № 3.
12. Гребень Е. С. Вопросы общей теории ребристых оболочек и перекрестных стержневых систем. Сб. «Исследования по строительной механике», М.— Л., Стройиздат, 1966.
13. Лурье А. И. Общая теория упругих тонких оболочек. ПММ, 1940, т. 4, вып. 2.
14. Naghdi P. M. Foundation of elastic shell theory. Progr. Solid Mech., 1963, vol. 4, No. 2.
15. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Обобщенные функции и действия над ними. М., Физматгиз, 1959.
16. Галимов К. З. Уравнения равновесия теории упругости при конечных перемещениях и их приложение к теории оболочек. Изв. Казанск. фил. АН СССР. Сер. физ.-матем. и техн. н., 1948, № 1.
17. Green A. E., Zerna W. Theoretical elasticity. Oxford, Clarendon press, 1954.
18. Чернышев Г. Н. Асимптотические методы в теории оболочек (сосредоточенные нагрузки). Тр. VI Всес. конф. по теории оболочек и пластин (Баку, 1966). М., «Наука», 1966.
19. Карпов Н. И. Свободные колебания цилиндрической оболочки, подкрепленной ребрами жесткости. Тр. IV Всес. конф. по теории оболочек и пластин (Ереван, 1962), Изд-во АН АрмССР, 1964
20. Заруцкий В. А. К расчету ребристых оболочек, подверженных действию произвольных нагрузок. Прикл. механ., 1966, т. 2, вып. 4.
21. Гольденвейзер А. Л. Некоторые математические проблемы линейной теории упругих тонких оболочек. Усп. матем. н., 1960, т. 15, вып. 5.
22. Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек. М., Гостехиздат, 1953.
23. Вишик М. И., Люстерник Л. А. Асимптотическое поведение решений линейных дифференциальных уравнений с большими или быстро меняющимися коэффициентами и граничными условиями. Усп. матем. н., 1960, т. 15, вып. 4.
24. Жилин П. А. К анализу краевых задач для ребристых оболочек. Тр. Центр. н.-и. и проектно-конструкт. котлотурб. ин-та им. Ползунова, 1966, № 72.
25. Новожилов В. В. Теория тонких оболочек. Л., Судпромгиз, 1962.
26. Жилин П. А., Кизима Г. А. Оболочки нулевой гауссовой кривизны с меридиональными ребрами. Инж. ж. МТТ, 1967, № 3.
27. Вишик М. И., Люстерник Л. А. Регулярное вырождение и погранслой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром при старшей производной. Усп. матем. н., 1957, т. 12, вып. 5.