МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 · 1983

УДК 539.3

ОПИСАНИЕ ПРОСТОГО КРАЕВОГО ЭФФЕКТА ТЕОРИЕЙ ОБОЛОЧЕК И ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ТЕОРИЕЙ УПРУГОСТИ

ЖИЛИН П. А., СКВОРЦОВ В. Р.

Рассматривается осесимметричная деформация оболочек вращения. После введения переменных Мейсснера задача сводится к одному дифференциальному уравнению второго порядка. Вычисляется скорость затухания простого краевого эффекта по нескольким вариантам теории оболочек и приводится сравнение с результатами трехмерной теории упругости. Определяется значение коэффициента поперечного сдвига, при котором ошибка, даваемая теорией оболочек, имеет порядок $O(h^2/R^2)$.

1. Сводка основных уравнений теории оболочек. Обозначим через q^1, q^2 гауссовы координаты на срединной поверхности оболочки, которую зададим радиус-вектором $\mathbf{r}(q^1, q^2)\equiv\mathbf{r}(q)$. Векторы $\mathbf{r}_\alpha\equiv\partial_\alpha\mathbf{r}\equiv\partial\mathbf{r}/\partial q^\alpha$ и $\mathbf{n}(q)\cdot$ $\cdot(\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}=1,\ \mathbf{n}\cdot\mathbf{r}_\alpha=0)$ составляют естественный базис на поверхности, а векторы $\mathbf{n}$, $\mathbf{r}^\alpha$ — взаимный базис; греческие индексы принимают значения 1, 2, а латинские — 1, 2, 3. Положение частиц оболочки задается вектором $\mathbf{R}(q,z)=\mathbf{r}(q)+z\mathbf{n}(q)$ $(|z|\leqslant{}^1/_2h)$, где h — толщина оболочки. Зададим на поверхности оператор-градиент $\nabla\equiv\mathbf{r}^\alpha\partial_\alpha$ и образуем следующие тензоры второго ранга $\mathbf{a}=\nabla\mathbf{r}$, $\mathbf{b}=-\nabla\mathbf{n}$, $\mathbf{c}=-\mathbf{a}\times\mathbf{n}$, $\boldsymbol{\mu}=\nabla\mathbf{R}=\mathbf{a}-z\mathbf{b}$, которые называются соответственно первым, вторым, дискриминантным тензорами поверхности и геометрическим тензором сдвига. В дальнейшем понадобятся объекты $2H=\operatorname{tr}b$, $K=\det(\mathbf{r}_\alpha\cdot\mathbf{b}\cdot\mathbf{r}^\beta)$, $\mu\boldsymbol{\mu}^{-1}=(\operatorname{tr}\boldsymbol{\mu})\mathbf{a}-\boldsymbol{\mu}$, $\mu=\det(\mathbf{r}_\alpha\cdot\boldsymbol{\mu}\cdot\mathbf{r}^\beta)=1-2Hz+$ $+Kz^2$, где H и K — средняя и гауссова кривизны поверхности.

Полная система уравнений линейной теории оболочек может быть представлена в виде

$$\nabla\cdot\mathbf{T}+\rho\mathbf{F}=\rho(\mathbf{u}+\boldsymbol{\Theta}_1{}^T\cdot\boldsymbol{\varphi})^{\cdot\cdot},\quad \mathbf{f}^{\cdot}\equiv\partial\mathbf{f}/\partial t \tag{1.1}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{M}+\mathbf{r}_\alpha\times\mathbf{T}^T\cdot\mathbf{r}^\alpha+\rho\mathbf{L}=\rho(\boldsymbol{\Theta}_1\cdot\mathbf{u}+\boldsymbol{\Theta}_2\cdot\boldsymbol{\varphi})^{\cdot\cdot} \tag{1.2}$$

$$\mathbf{T}=\rho\partial\Psi/\partial\mathbf{e},\quad \mathbf{M}=\rho\partial\Psi/\partial\boldsymbol{\varkappa} \tag{1.3}$$

$$\mathbf{e}=\nabla\mathbf{u}+\mathbf{a}\times\boldsymbol{\varphi},\quad \boldsymbol{\varkappa}=\nabla\boldsymbol{\varphi} \tag{1.4}$$

В этой системе принято [1]: $\mathbf{T}$, $\mathbf{M}$ — тензоры усилий и моментов соответственно, причем $\mathbf{n}\cdot\mathbf{T}=0$, $\mathbf{n}\cdot\mathbf{M}=0$, ρ — поверхностная плотность массы, $\rho\boldsymbol{\Theta}_1$, $\rho\boldsymbol{\Theta}_2$ — тензоры инерции, $\mathbf{u}$ и $\boldsymbol{\varphi}$ — векторы малых смещений и поворотов, $\mathbf{F}$, $\mathbf{L}$ — массовые плотности внешних усилий и моментов, $\rho\Psi$ — поверхностная плотность внутренней энергии, $\mathbf{e}$, $\boldsymbol{\varkappa}$ — тензоры деформации.

В линейной теории упругих оболочек внутренняя энергия $\Psi(\mathbf{e},\boldsymbol{\varkappa})$ есть полином второй степени аргументов $\mathbf{e}$ и $\boldsymbol{\varkappa}$. Конкретное задание функций ρ, $\Psi(\mathbf{e},\boldsymbol{\varkappa})$, $\rho\boldsymbol{\Theta}_1$, $\rho\boldsymbol{\Theta}_2$ фиксирует определенный вариант теории оболочек. Система (1.1)—(1.4) имеет в общем случае двенадцатый порядок и соответствует теории оболочек типа Коссера.

Если ограничиться оболочками постоянной толщины, то для величин, входящих в систему (1.1)—(1.4), можно предложить следующие формулы:

$$\rho=\langle\rho_*\rangle,\quad \rho\boldsymbol{\Theta}_1=-\langle\rho_* z\rangle\mathbf{c},\quad \rho\boldsymbol{\Theta}_2=\langle\rho_* z^2\rangle\mathbf{a}$$

$$\mathbf{T}=\langle\mu^{-1}\cdot\boldsymbol{\tau}\rangle,\quad \mathbf{M}=\langle\mu^{-1}\cdot\boldsymbol{\tau}z\rangle\cdot\mathbf{c},\quad \langle\mathbf{f}\rangle\equiv\int_{-h/2}^{h/2}\mathbf{f}\mu dz$$

$$\rho(\mathbf{u}+\Theta_1^T\cdot\boldsymbol{\varphi})=\langle\rho_*\mathbf{u}_*\rangle,\quad \rho(\Theta_1\cdot\mathbf{u}+\Theta_2\cdot\boldsymbol{\varphi})=\langle\rho_*\mathbf{u}_*z\rangle\cdot\mathbf{c}$$
$$\rho\mathbf{F}=\langle\rho_*\mathbf{F}_*\rangle+\mu^+\boldsymbol{\tau}_n^{\ +}+\mu^-\boldsymbol{\tau}_n^{\ -},\quad \mu^{+,-}=\mu|_{z=\pm h/2} \tag{1.5}$$
$$\rho\mathbf{L}=\mathbf{n}\times\langle\rho_*\mathbf{F}_*z\rangle+{}^1/_2h\mathbf{n}\times(\mu^+\boldsymbol{\tau}_n^{\ +}-\mu^-\boldsymbol{\tau}_n^{\ -})$$

где ρ_*, $\mathbf{F}_*$, $\mathbf{u}_*$, $\boldsymbol{\tau}$ — плотность, массовая сила, вектор смещения, тензор напряжений ($\boldsymbol{\tau}=\boldsymbol{\tau}^T$) для трехмерной среды, $\boldsymbol{\tau}_n^{\ +}$ и $\boldsymbol{\tau}_n^{\ -}$ — векторы напряжений, действующие на верхнюю и нижнюю лицевые поверхности оболочки соответственно. Из формул (1.5) вытекают равенства

$$\mathbf{M}\cdot\mathbf{n}=0,\qquad \mathbf{L}\cdot\mathbf{n}=0,\qquad \mathbf{n}\cdot\Theta_2=0,\qquad \mathbf{n}\cdot\Theta_1=0 \tag{1.6}$$

Кроме того, проектируя уравнение (1.2) на нормаль к срединной поверхности, получаем так называемое шестое уравнение равновесия

$$\mathbf{T}^T\cdot\cdot\,\mathbf{c}+\mathbf{M}^T\cdot\cdot\,\mathbf{b}=0 \tag{1.7}$$

Соотношения (1.6)—(1.7) налагают ограничения на форму задания внутренней энергии, которые получаются после подстановки выражений (1.3) в первое из равенств (1.6) и уравнение (1.7)

$$\frac{\partial\Psi}{\partial\boldsymbol{\varkappa}}\cdot\mathbf{n}=0,\qquad \left(\frac{\partial\Psi}{\partial\mathbf{e}}\right)^T\cdot\cdot\,\mathbf{c}+\left(\frac{\partial\Psi}{\partial\boldsymbol{\varkappa}}\right)^T\cdot\cdot\,\mathbf{b}=0 \tag{1.8}$$

Таким образом, внутренняя энергия подчиняется системе уравнений в частных производных первого порядка. Поэтому число аргументов функции Ψ можно сократить. Характеристическая система для второго из уравнений (1.8) имеет вид $d\mathbf{e}/ds=\mathbf{c}$, $d\boldsymbol{\varkappa}/ds=\mathbf{b}$. Последняя допускает ровно одиннадцать независимых интегралов, в качестве которых удобно выбрать следующие: $\boldsymbol{\varepsilon}={}^1/_2(\mathbf{e}\cdot\mathbf{a}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{e}^T)$, $\mathbf{k}=\boldsymbol{\varkappa}\cdot\mathbf{a}+{}^1/_2(\mathbf{e}\cdot\cdot\,\mathbf{c})\mathbf{b}$, $\boldsymbol{\gamma}=\mathbf{e}\cdot\mathbf{n}$, $\boldsymbol{\gamma}_1=\boldsymbol{\varkappa}\cdot\mathbf{n}$. Первое из уравнений (1.8) показывает, что функция Ψ не зависит от вектора $\boldsymbol{\gamma}_1$. Поэтому окончательно получаем, что внутренняя энергия при принятии (1.5) зависит только от девяти деформационных переменных — компонент тензоров $\boldsymbol{\varepsilon}$, $\boldsymbol{\varkappa}$, $\boldsymbol{\gamma}$. В дальнейшем внутреннюю энергию считаем функцией $\Psi(\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\gamma},\mathbf{k})$. При этом уравнения (1.6)—(1.8) тождественно выполняются. Общеприняты наименования: $\boldsymbol{\varepsilon}$, $\mathbf{k}$ — тензоры растяжения и изгиба — кручения соответственно, $\boldsymbol{\gamma}$ — вектор деформации поперечного сдвига. Обратим внимание, что в тензоры $\boldsymbol{\varepsilon}$, $\mathbf{k}$, $\boldsymbol{\gamma}$ не входит поворот вокруг нормали $\Omega=\boldsymbol{\varphi}\cdot\mathbf{n}$. Не входит Ω и в уравнения движения. Поэтому порядок системы (1.1)—(1.4), где $\Psi=\Psi(\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\gamma},\mathbf{k})$, понижается до десятого. Теория оболочек, описывающаяся уравнениями десятого порядка, называется [2] теорией типа Тимошенко.

В линейной теории внутренняя энергия является полиномом второй степени

$$\Psi(\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\gamma},\mathbf{k})=T_*\cdot\cdot\,\boldsymbol{\varepsilon}+\mathbf{N}_*\cdot\boldsymbol{\gamma}+\mathbf{M}_*^T\cdot\cdot\,\mathbf{k}+W(\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\gamma},\mathbf{k}) \tag{1.9}$$

где квадратичная по $\boldsymbol{\varepsilon}$, $\boldsymbol{\gamma}$, $\mathbf{k}$ часть внутренней энергии W называется энергией деформации. Можно доказать, что для оболочек из изотропного материала функция W имеет вид

$$W={}^1/_2\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\cdot\,\mathbf{C}_1\cdot\cdot\,\boldsymbol{\varepsilon}+\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\cdot\,\mathbf{C}_2\cdot\cdot\,\mathbf{k}+{}^1/_2\mathbf{k}\cdot\cdot\,\mathbf{C}_3\cdot\cdot\,\mathbf{k}+{}^1/_2\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\Gamma}\cdot\boldsymbol{\gamma}$$
$$\mathbf{C}_1=\frac{Eh}{1-\nu^2}[(A_1-A_2)\mathbf{a}\mathbf{a}+A_2(a^{\alpha\gamma}a^{\beta\delta}+a^{\alpha\delta}a^{\beta\gamma})\mathbf{r}_\alpha\mathbf{r}_\beta\mathbf{r}_\gamma\mathbf{r}_\delta]$$
$$\mathbf{C}_3=\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}[C_1\mathbf{c}\mathbf{c}+C_2(a^{\alpha\gamma}a^{\beta\delta}+a^{\alpha\delta}a^{\beta\gamma}-a^{\alpha\beta}a^{\gamma\delta})\mathbf{r}_\alpha\mathbf{r}_\beta\mathbf{r}_\gamma\mathbf{r}_\delta+C_3H_1^2h^2\mathbf{a}\mathbf{a}]$$

$$\mathbf{C}_2=\frac{Eh^3}{6(1-\nu^2)}[B_1H\mathbf{ac}+B_2H(\mathbf{r}^\alpha \mathbf{c}\mathbf{r}_\alpha+c^{\alpha\gamma}\mathbf{r}_\alpha \mathbf{a}\mathbf{r}_\gamma)+B_3\mathbf{a}[\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}-H\mathbf{c})+$$
$$+B_4(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}-H\mathbf{c})\mathbf{a}+B_5(\mathbf{b}-H\mathbf{a})\mathbf{c}] \tag{1.10}$$
$$\mathbf{\Gamma}=Gh\Gamma_*\mathbf{a},\qquad \mathbf{a}=a^{\alpha\gamma}\mathbf{r}_\alpha\mathbf{r}_\gamma,\qquad \mathbf{C}=c^{\alpha\gamma}\mathbf{r}_\alpha\mathbf{r}_\gamma$$

Здесь E, ν — модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала, A_α, C_i, B_k (k=1—5) — модули, зависящие только от ν, Γ_* — коэффициент поперечного сдвига.

Тензоры $\mathbf{T}_*$, $\mathbf{M}_*$, $\mathbf{N}_*$, входящие в (1.9), определяются по формулам

$$\mathbf{T}_*=hL_1\mathbf{an}\cdot(\boldsymbol{\tau}_n^+-\boldsymbol{\tau}_n^-),\qquad \mathbf{N}_*=hL_3\mathbf{a}\cdot(\boldsymbol{\tau}_n^+-\boldsymbol{\tau}_n^-)$$
$$\mathbf{M}_*=h^2L_2\mathbf{cn}\cdot(\boldsymbol{\tau}_n^++\boldsymbol{\tau}_n^-) \tag{1.11}$$

где L_1, L_2, L_3 зависят только от коэффициента Пуассона.

Приведенные соотношения получены в результате «прямого» построения теории оболочек и, строго говоря, не являются следствиями пространственной теории упругости. Принятие соотношений (1.5), которые представляются правдоподобными, позволяет согласовать некоторые характеристики теории оболочек с соответствующими понятиями трехмерной среды. Согласование осуществляется осреднением по толщине оболочки, рассматриваемой как трехмерное тело. При этом легко убедиться, что уравнения движения (1.1)—(1.2) являются точными следствиями уравнений движения трехмерной неполярной ($\boldsymbol{\tau}=\boldsymbol{\tau}^T$) среды. Однако аналогичное согласование кинетической и внутренней энергий оболочки с таковыми в трехмерной среде оказывается невозможным, что кажется естественным. Действительно, осредненная по толщине кинетическая энергия трехмерной среды содержит энергию всех движений, в том числе и таких, которые не оказывают влияния на движение «двумерной» оболочки. Аналогично обстоит дело с внутренней энергией. Из соотношений (1.5) и (1.9) видно, что напряжения τ^{31}, τ^{32}, τ^{33} (независимо от их величины) не влияют на внутреннюю энергию «двумерной» оболочки. На осредненную энергию трехмерной среды указанные напряжения влияют тем сильнее, чем больше их величина. В рассматриваемой теории кинетическая и внутренняя энергии вводятся непосредственно для двумерной среды.

Тензоры упругих модулей $\mathbf{C}_i$, $\mathbf{\Gamma}$ построены при следующих ограничениях: материал оболочки трансверсально изотропен, касательная плоскость к срединной поверхности при $\mathbf{b}\to0$ является плоскостью симметрии. Формулы (1.10) получены с ошибкой $O(h^2\mathbf{b}\cdot\cdot\mathbf{b})$ по сравнению с единицей, а (1.11) — с ошибкой $O(\sqrt{h^2\mathbf{b}\cdot\cdot\mathbf{b}})$. Пониженная точность последних оправдывается тем, что поправки, вносимые тензорами $\mathbf{T}_*$, $\mathbf{M}_*$, $\mathbf{N}_*$ в полные тензоры усилий и моментов, сами, как правило, являются малыми. Отметим, что при выводе (1.11) игнорировались массовые силы в трехмерной среде, что, возможно, не всегда допустимо.

2. Соотношения упругости в линиях главной кривизны. Более привычной является запись соотношений упругости в координатном виде, когда линии главной кривизны являются координатными. Согласно (1.3), (1.9) и (1.10), имеем формулы

$$\mathbf{T}\cdot\mathbf{a}+{}^1/_2(\mathbf{c}\cdot\mathbf{b}\cdot\mathbf{M}+\mathbf{M}^T\cdot\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})=\mathbf{T}_*+\mathbf{C}_1\cdot\cdot\boldsymbol{\varepsilon}+\mathbf{C}_2\cdot\cdot\mathbf{k}$$
$$\mathbf{T}\cdot\mathbf{n}=\mathbf{N}_*+\mathbf{\Gamma}\cdot\boldsymbol{\gamma},\qquad \mathbf{M}^T=\mathbf{M}_*^T+\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\cdot\mathbf{C}_2+\mathbf{C}_3\cdot\cdot\mathbf{k} \tag{2.1}$$

Представим все входящие в (2.1) тензоры в базисе ортов главных направлений тензора b; при этом обозначения компонент введем таким образом, чтобы при использовании гипотез Кирхгофа — Лява они переходили в обозначения, принятые в [3]:

$$\mathbf{a}=\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2,\qquad \mathbf{b}=-R_1^{-1}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1-R_2^{-1}\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2,\qquad \mathbf{c}=\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2-\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1$$
$$\mathbf{e}=\varepsilon_1\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1+\omega_1\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2+\omega_2\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1+\varepsilon_2\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2+\gamma_1\mathbf{e}_1\mathbf{n}+\gamma_2\mathbf{e}_2\mathbf{n}$$
$$\boldsymbol{\varepsilon}=\varepsilon_1\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1+{}^1/_2\omega(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1)+\varepsilon_2\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2,\qquad \omega=\omega_1+\omega_2$$
$$\boldsymbol{\varkappa}\cdot\mathbf{a}=-\tau_1\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1+\varkappa_1\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2-\varkappa_2\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1+\tau_2\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 \tag{2.2}$$
$$\mathbf{k}=-\delta_1\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1+\varkappa_1\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2-\varkappa_2\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1+\delta_2\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2$$
$$R_1\delta_1=R_1\tau_1+\omega_2-{}^1/_2\omega,\qquad R_2\delta_2=R_2\tau_2+\omega_1-{}^1/_2\omega$$

$$\mathbf{T}=T_1\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1+T_{12}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2+T_{21}\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1+T_2\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2+(N_1\mathbf{e}_1+N_2\mathbf{e}_2)\mathbf{n}$$

$$\mathbf{M}=-M_{12}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1+M_1\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2-M_2\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1+M_{21}\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2$$

При принятии гипотез Кирхгофа — Лява жесткость оболочки на поперечный сдвиг $Gh\Gamma_*$ следует устремить к бесконечности. Тогда из конечности перерезывающих усилий вытекает, что вектор $\boldsymbol{\gamma}$ стремится к нулю. При этом вектор поворота и величины δ_α вычисляются по формулам

$$\boldsymbol{\gamma}=0\Rightarrow\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\varphi}=\mathbf{c}\cdot\nabla\mathbf{u}\cdot\mathbf{n},\qquad \delta_\alpha=\tau-\omega/2R_\alpha \tag{2.3}$$

использование формул (2.3) позволяет снизить порядок основной системы до восьмого и перейти к теории оболочек типа Лява, в которой энергия деформации зависит только от шести деформационных переменных ε_α, ω, $\varkappa_\alpha$, τ. Формулы связи деформаций с перемещениями и поворотами в координатном виде выписывать не будем.

С учетом (2.2) формулы (2.1) в координатной записи принимают вид

$$\begin{gathered}
T_1=hL_1\mathbf{n}\cdot(\boldsymbol{\tau}_n{}^+-\boldsymbol{\tau}_n{}^-)+\frac{Eh}{1-\nu^2}[(A_1+A_2)\varepsilon_1+(A_1-A_2)\varepsilon_2]+\\
+\frac{Eh^3}{6(1-\nu^2)}\{H[-B_1{}^0(\varkappa_1+\varkappa_2)+B_2{}^0(\varkappa_1-\varkappa_2)]+H_1[B_3{}^0(\varkappa_1-\varkappa_2)-B_5{}^0(\varkappa_1+\varkappa_2)]\}\\
T_{12}-\frac{1}{2R_2}M_{21}+\frac{1}{2R_1}M_{12}=\frac{Eh}{1-\nu^2}A_2\omega+\frac{Eh^3}{6(1-\nu^2)}[HB_2{}^0(\delta_1+\delta_2)+\\
+H_1B_4{}^0(\delta_2-\delta_1)]\\
N_1=hL_3\mathbf{e}_1\cdot(\boldsymbol{\tau}_n{}^+-\boldsymbol{\tau}_n{}^-)+Gh\Gamma_*\gamma_1\\
M_1=h^2L_2\mathbf{n}(\boldsymbol{\tau}_n{}^++\boldsymbol{\tau}_n{}^-)+\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\}C_1(\varkappa_1+\varkappa_2)+C_2(\varkappa_1-\varkappa_2)+\\
+2H[(B_2-B_1)\varepsilon_1-(B_1+B_2)\varepsilon_2]+2H_1[(B_3-B_5)\varepsilon_1+(B_3+B_5)\varepsilon_2]\},\\
2H_1=R_2{}^{-1}-R_1{}^{-1}\\
M_{12}=\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}[C_2(\delta_1+\delta_2)+2(HB_2-H_1B_4)\omega+h^2H_1{}^2C_3(\delta_1-\delta_2)]
\end{gathered}\tag{2.4}$$

Существование потенциала (1.3) требует равенства $B_i{}^0=B_i$ ($i=1-5$); градусы поставлены для удобства последующих сравнений различных вариантов теории оболочек. Невыписанные пять соотношений упругости получаются из (2.4) заменой индексов: 1 на 2 и наоборот. Индексы у модулей остаются неизменными и учитывается обозначение для H_1.

Модули A_1, $A_2,\ldots,B_5$ определяются экспериментально. В простых случаях (например, для однослойных оболочек) их можно вычислить теоретически из тестовых задач. Если допустить существование единой теории оболочек, то для однослойных оболочек из изотропного материала нужно принять следующие значения модулей:

$$\begin{gathered}
A_1=C_1={}^1/_2(1+\nu),\qquad A_2=C_2={}^1/_2(1-\nu)\\
B_i{}^0=B_i,\quad B_2=0,\quad C_3=(1-\nu)/24,\quad L_3=1-\Gamma_*\\
B_3={}^1/_2(1+\nu),\quad B_4=-{}^1/_4(1-\nu),\quad B_5=-{}^1/_2\\
B_1=-\frac{\nu(1+\nu)}{2(1-\nu)},\quad L_1=\frac{\nu}{2(1-\nu)},\quad L_2=\frac{\nu}{12(1-\nu)}
\end{gathered}\tag{2.5}$$

Значение коэффициента поперечного сдвига можно определить по-разному — в зависимости от преследуемых целей. Некоторые рассуждения показывают, что Γ_* для однослойных оболочек лежит в интервале $\pi^2/12\leqslant\Gamma_*<1$. Когда деформация поперечного сдвига является преобладающей, следует [4—5] положить $\Gamma_*=\pi^2/12$. Однако для уточнения низкочастотного спектра колебаний (игнорируя при этом ошибку в высокочастотных спектрах) целесообразно выбрать другое значение Γ_*. Для его определения выпишем низший спектр колебания прямоугольного параллелепипеда, найденный в [5] по трехмерной теории

$$h\rho_*\omega_*^2=\frac{Eh^3\alpha^4}{12(1-\nu^2)}\left[1-\left(\frac{7}{60}+\frac{1}{6(1-\nu)}\right)\alpha^2h^2+O(\alpha^4h^4)\right]$$
$$\alpha^2=\frac{(2n-1)^2\pi^2}{4a^2}+\frac{(2m-1)^2\pi^2}{4b^2}\quad (m,n=1,2,\ldots) \tag{2.6}$$

где a, b, h — толщина, длина и ширина параллелепипеда. По теории пластин этот же спектр описывается формулой

$$h\rho_*\omega_*^2=\frac{Eh^3\alpha^4}{12(1-\nu^2)}\left[1-\frac{2+(1-\nu)\Gamma_*}{12(1-\nu)\Gamma_*}\alpha^2h^2+O(\alpha^4h^4)\right] \tag{2.7}$$

где принято $C_1+C_2=1$. Требуя совпадения спектров (2.6) и (2.7) с ошибкой $O(\alpha^4h^4)$, получаем выражение $\Gamma_*=5/(6-\nu)$.

3. Наиболее употребительные варианты теории оболочек. Напомним хорошо известные варианты теории оболочек и сравним их с описанным выше вариантом.

1. Теория Л. И. Балабуха и В. В. Новожилова [3], полученная в 1944 г., имеет один формальный недостаток — исключает возможность тензорной записи [6]. Легко убедиться, что ни при каких значениях модулей соотношения (2.4) не переходят в соотношения Балабуха — Новожилова. Наиболее близкими к последним, но более сложными, являются соотношения Койтера — Сандерса [7—9], независимо полученные также в [6]. Соотношения Койтера — Сандерса получаются из (2.4) при

$$L_k=0,\quad C_3=0,\quad B_i^0=B_i=0\ (i=1-5),\quad Gh\Gamma_*=\infty \tag{3.1}$$

Модули A_1, A_2, C_1, C_2 определяются формулами (2.5) и совпадают во всех вариантах теории оболочек. Следует указать, что отличие теорий Балабуха — Новожилова и Койтера — Сандерса выходит за рамки точности теории типа Лява [6]. Для осесимметричной деформации оболочек вращения эти два варианта тождественно совпадают.

2. Теория А. И. Лурье [10], построенная в 1940 г., описывается следующими значениями модулей:

$$B_i^0=B_i\ (i=1-5),\quad L_k=0,\quad B_\alpha=0,\quad C_3=0$$
$$B_3=-B_5=1/2,\quad B_4=-1/4(1-\nu),\quad \Gamma_*=\infty \tag{3.2}$$

3. Теория А. Л. Гольденвейзера [11], полученная в 1973 г., описывается модулями

$$L_1=\frac{\nu}{2(1-\nu)},\quad L_2=\frac{\nu}{12(1-\nu)},\quad B_1=-\frac{\nu(1+\nu)}{2(1-\nu)}$$
$$L_3=B_2=C_3=0,\quad B_i^0=0\ (i=1-5),\quad \Gamma_*=\infty$$
$$B_3=1/2(1+\nu),\quad B_4=-1/4(1-\nu),\quad B_5=-1/2 \tag{3.3}$$

Кроме того, во втором соотношении из (2.4) следует отбросить M_{12} и M_{21}. В этой теории, рекомендованной А. Л. Гольденвейзером для напряженных состояний с нормальной асимптотикой, строго говоря, не существует потенциала для усилий и моментов, поскольку $B_i^0\neq B_i$, но добавлением малых членов, выходящих за пределы точности обсуждаемой теории, в ней можно обеспечить существование потенциала (1.3). В результате придем к соотношениям (2.4)—(2.5) при дополнительных условиях $\Gamma_*=\infty$, $L_3=C_3=0$. Теория А. Л. Гольденвейзера отличается от предыдущих учетом поперечной сжимаемости оболочки в слагаемых, могущих повлиять на главные члены в асимптотических разложениях усилий и моментов.

Приведенные в п. 3 теории относятся к главному случаю теорий оболочек первого приближения, но смысл этого термина у них различен. А именно, варианты А. Лява, А. И. Лурье, Балабуха – Новожилова, Койтера – Сандерса обеспечивают во внутренних областях оболочки достоверность первых членов в асимптотических разложениях основных напряжений при условии, что они имеют порядок $O(h^{-1})$ или $O(h^{-2})$. Здесь считается, что поверхностные и краевые нагрузки имеют порядок $O(1)$. Однако достоверность даже первых (отличных от нуля) членов в асимптотических разложениях усилий и моментов гарантируется не всегда. Теория А. Л. Гольденвейзера при условии нормальной асимптотики обеспечивает достоверность первых членов в разложениях усилий и моментов, если последние имеют порядки не ниже $O(h)$ и $O(h^2)$ соответственно. Поэтому эта теория позволяет находить напряжения, когда они имеют порядок $O(1)$. Наконец, при определении перемещений более надежные результаты дают теории А. И. Лурье и А. Л. Гольденвейзера. На неприменимость простейших теорий в некоторых задачах теории сколь угодно тонких оболочек указано в [12, с. 251].

Теория, изложенная в п. 1, 2 (предложена П. А. Жилиным в 1977 г.) [1], имеет внутреннюю погрешность $O(h^2)$. Однако это не означает, что ее погрешность в сравнении с трехмерной теорией имеет такой же порядок. Поскольку пространственная теория упругости при построении этой теории не использовалась, то ее применимость должна устанавливаться на различного рода тестовых задачах. Одним из тестов является задача о простом краевом эффекте в оболочках вращения.

4. Вывод разрешающего уравнения для осесимметричной деформации изгиба — растяжения оболочек вращения. В качестве координат на срединной поверхности приняты $q^1=s$ — расстояние вдоль меридиана, $q^2=\varphi$ — широтный угол. Предполагается, что поверхностные нагрузки отсутствуют. При осесимметричной деформации формулы (2.2) принимают вид

$$\begin{gathered}\boldsymbol{\varepsilon}=\varepsilon_1\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1+\varepsilon_2\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2, \quad \mathbf{k}=\varkappa_1\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2-\varkappa_2\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1, \quad \boldsymbol{\gamma}=\gamma_1\mathbf{e}_1\\ \mathbf{T}=T_1\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1+T_2\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2+N_1\mathbf{e}_1\mathbf{n}, \quad \mathbf{M}=M_1\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2-M_2\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1\end{gathered} \tag{4.1}$$

Выпишем векторы перемещений и поворотов, а также компоненты тензоров деформации

$$\begin{gathered}\mathbf{u}=u\mathbf{e}_1+w\mathbf{n}, \quad \mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\varphi}=\varphi_1\mathbf{e}_2, \quad \varkappa_1=\varphi_1', \quad (\ldots)'\equiv d/ds\\ \varkappa_2=\varphi_1\frac{\operatorname{ctg}\theta}{R_2}, \quad \varepsilon_1=u'+\frac{w}{R_1}, \quad \varepsilon_2=\frac{1}{R_2}(u\operatorname{ctg}\theta+w)\\ \gamma_1=\varphi_1+w'-u/R_1\end{gathered} \tag{4.2}$$

Последние три из них связаны уравнением неразрывности

$$\gamma_1-\varphi_1=(\varepsilon_2-\varepsilon_1)\operatorname{ctg}\theta+R_2\varepsilon_2' \tag{4.3}$$

где θ — угол между осью вращения и нормалью к срединной поверхности. Уравнения статики вытекают из (1.1) – (1.2)

$$\begin{gathered}T_1'+(T_1-T_2)\frac{\operatorname{ctg}\theta}{R_2}+\frac{N_1}{R_1}=0\\ N_1'+N_1\frac{\operatorname{ctg}\theta}{R_2}-\left(\frac{T_1}{R_1}+\frac{T_2}{R_2}\right)=0\\ M_1'+(M_1-M_2)\frac{\operatorname{ctg}\theta}{R_2}-N_1=0\end{gathered} \tag{4.4}$$

Наконец, соотношения упругости (2.4) определяются зависимостями

$$T_1=\frac{Eh}{1-\nu^2}(\varepsilon_1+\nu\varepsilon_2)+\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\left[\varkappa_1\left(\frac{B_1^0-B_2^0+B_5^0-B_3^0}{R_1}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{B_1^0-B_2^0-B_5^0+B_3^0}{R_2}+\varkappa_2\left(\frac{B_1^0+B_2^0+B_3^0+B_4^0}{R_1}+\frac{B_1^0+B_2^0-B_5^0-B_3^0}{R_2}\right)\right]$$

---

[1] См. сообщение о публикуемых в пп. 1–3 результатах: *Жилин П. А.* Общая теория определяющих уравнений в линейной теории упругих оболочек: Аннот. докл. Ленингр. политехн. ин-т. Семинары.– Изв. АН СССР. МТТ, 1978, № 3, с. 190.

$$M_1=\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\left[(\varkappa_1+\nu\varkappa_2)+\varepsilon_1\left(\frac{B_1-B_2+B_5-B_3}{R_1}+\frac{B_1-B_2-B_5+B_3}{R_2}\right)+\right.$$

$$\left.+\varepsilon_2\left(\frac{B_1+B_2-B_5-B_3}{R_1}+\frac{B_1+B_2+B_3+B_5}{R_2}\right)\right],\quad N_1=Gh\Gamma_*\gamma_1 \qquad (4.5)$$

Выражения для T_2, M_2 получаются из T_1, M_1 соответственно заменой индексов $(1\rightleftarrows 2)$.

Система (4.2)—(4.5) может быть сведена к двум уравнениям относительно «переменных Мейсснера» [12]: R_2N_1 и φ_1. Преобразуем первые два уравнения системы (4.4)

$$[R_2\sin\theta(T_1\sin\theta-N_1\cos\theta)]'=0$$

$$[R_2\sin\theta(T_1\cos\theta+N_1\sin\theta)]'-T_2=0 \qquad (4.6)$$

Полагая нагрузку на граничных параллелях самоуравновешенной (осевая сила равна нулю), получаем выражения для растягивающих усилий

$$T_1=R_2N_1\operatorname{ctg}\theta/R_2,\qquad T_2=(R_2N_1)' \qquad (4.7)$$

Соотношения упругости (4.5) позволяют выразить пять величин ε_2, $\varepsilon_2-\varepsilon_1$, M_1, M_1-M_2, γ_1, входящих в уравнения (4.3) и (4.4), через переменные φ_1 и R_2N_1:

$$\varepsilon_2=\frac{1}{Eh}\left[(R_2N_1)'-R_2N_1\frac{\nu\operatorname{ctg}\theta}{R_2}\right]+\frac{h^2}{12(1-\nu^2)}\left[\varphi_1'\left(\frac{F_1^0-F_3^0}{R_1}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{F_2^0+F_4^0}{R_2}\right)+\varphi_1\frac{\operatorname{ctg}\theta}{R_2}\left(\frac{F_4^0-F_2^0}{R_1}+\frac{F_1^0+F_3^0}{R_2}\right)\right]$$

$$\varepsilon_2-\varepsilon_1=\frac{1+\nu}{Eh}\left[(R_2N_1)'-R_2N_1\frac{\operatorname{ctg}\theta}{R_2}\right]+$$

$$+\frac{h^2}{12(1-\nu^2)}\left[-\varphi_1'\left(\frac{F_3^0}{R_1}+\frac{F_4^0}{R_2}\right)+\varphi_1\frac{\operatorname{ctg}\theta}{R_2}\left(\frac{F_4^0}{R_1}+\frac{F_3^0}{R_2}\right)\right]$$

$$M_1=\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\left(\varphi_1'+\nu\varphi_1\frac{\operatorname{ctg}\theta}{R_2}\right)+\frac{h^2}{12(1-\nu^2)}\left[(R_2N_1)'\left(\frac{F_2-F_1}{R_1}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{F_2+F_4}{R_2}\right)+R_2N_1\frac{\operatorname{ctg}\theta}{R_2}\left(-\frac{F_1+F_3}{R_1}+\frac{F_2-F_4}{R_2}\right)\right.$$

$$M_1-M_2=\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}(1-\nu)\left(\varphi_1'-\varphi_1\frac{\operatorname{ctg}\theta}{R_2}\right)+$$

$$+\frac{h^2}{12(1-\nu^2)}\left[(R_2N_1)'\left(\frac{F_3-F_1-F_2+F_4}{R_1}+\frac{F_1+F_2+F_3+F_4}{R_2}\right)-\right.$$

$$\left.-R_2N_1\frac{\operatorname{ctg}\theta}{R_2}\left(\frac{F_1+F_2+F_3+F_4}{R_1}+\frac{F_3-F_1-F_2+F_4}{R_2}\right)\right],\quad \gamma_1=\frac{1}{Gh\Gamma_*}N_1 \qquad (4.8)$$

$$F_1=(1-\nu)(B_3-B_1),\qquad F_2=(1+\nu)(B_3+B_1)$$

$$F_3=(1-\nu)(B_2-B_5),\qquad F_4=(1+\nu)(B_2+B_5)$$

В соотношениях (4.8) отброшены величины порядка $O(h^2/R^2)$ по сравнению с единицей как выходящие за рамки точности любой двумерной теории оболочек. Подставляя (4.8) в (4.3) и третье из уравнений (4.4), приходим к двум уравнениям в переменных Мейсснера

$$L(R_2N_1)+\left[\frac{\nu}{R_1R_2}-\frac{2(1+\nu)}{\Gamma_* R_2^2}\right]R_2N_1=-\frac{Eh}{R_2}\varphi_1-\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}[k^0\varphi_1''+A\varphi_1']$$
$$L(\varphi_1)-\frac{\nu}{R_1R_2}\varphi_1=\frac{12(1-\nu^2)}{Eh^3R_2}R_2N_1+\frac{1}{Eh}[k(R_2N_1)''+B(R_2N_1)'] \qquad (4.9)$$

$$L\equiv d^2/ds^2+(\operatorname{ctg}\theta/R_2)(d/ds)-\operatorname{ctg}^2\theta/R_2^2$$

$$k=(F_1-F_3)/R_1-(F_2+F_4)/R_2,\quad k^0=(F_1^0-F_3^0)/R_1-(F_2^0+F_4^0)/R_2$$

$$A=\left(\frac{F_1^0-F_3^0}{R_1}-\frac{F_2^0+F_4^0}{R_2}\right)'+\frac{\operatorname{ctg}\theta}{R_2}\left(\frac{F_4^0-F_2^0-2F_3^0}{R_1}+\frac{F_1^0+F_3^0-2F_4^0}{R_2}\right)$$

$$B=\left(\frac{F_1-F_3}{R_1}-\frac{F_2+F_4}{R_2}\right)'+\frac{\operatorname{ctg}\theta}{R_2}\left(\frac{2F_1+F_2-F_4}{R_1}-\frac{F_1+2F_2+F_3}{R_2}\right)$$

Заменим выражения, фигурирующие в правых частях (4.9) в квадратных скобках, соответственно на $k^0L(\varphi_1)$ и $kL(R_2N_1)$; при этом допускается ошибка $O[(h/R)^{1/2}]$ по сравнению с единицей. Отметим, что для цилиндрической и сферической оболочек эта замена будет точной, т. е. ошибка не превысит $O(h^2/R^2)$, ибо в этих случаях: $A=B=0$ — для цилиндра и $A=k^0\operatorname{ctg}\theta/R$, $B=k\operatorname{ctg}\theta/R$ — для сферы.

Исключая указанные выражения из правых частей (4.9), приходим к системе

$$L(R_2N_1)+\left[\frac{\nu}{R_1R_2}-\frac{2(1+\nu)}{\Gamma_* R_2^2}+\frac{k^0}{R_2}\right]R_2N_1=-\frac{Eh}{R_2}\varphi_1$$
$$L(\varphi_1)+\left[-\frac{\nu}{R_1R_2}+\frac{k}{R_2}\right]\varphi_1=\frac{12(1-\nu^2)}{Eh^3R_2}R_2N_1$$

Умножая первое из этих уравнений на неопределенный множитель a и складывая его со вторым, получаем одно уравнение относительно функции $\varphi_1+aR_2N_1$, если a — корень некоторого квадратного уравнения. Корни последнего с ошибкой $O(h^2/R^2)$ определяются по формулам

$$\frac{Eh}{R_2}a=\frac{\nu}{R_1R_2}-\frac{1+\nu}{\Gamma_* R_2^2}+\frac{k^0-k}{2R_2}\mp\frac{i}{R_2h}\sqrt{12(1-\nu^2)}\qquad (i=\sqrt{-1})$$

В результате получаем искомое разрешающее уравнение

$$L(X)-\lambda^2X=0,\qquad X=\varphi_1+aR_2N_1$$
$$\lambda^2=-\frac{k+k^0}{2R_2}+\frac{1+\nu}{\Gamma_* R_2^2}\pm\frac{i}{R_2h}\sqrt{12(1-\nu^2)} \qquad (4.10)$$

5. Сравнение разрешающих уравнений в различных вариантах теории оболочек. Уравнение (4.10) сохраняет свой вид для всех описанных вариантов теории оболочек — различие заключено в формуле для λ^2. С ошибкой $O(h/R)$ — в этом случае для λ^2 можно отбросить вещественное слагаемое — все варианты приводят к одинаковому результату, поэтому в дальнейшем речь пойдет только о поправках $O(h/R)$.

Теории Лява, Лурье, Балабуха — Новожилова, Койтера — Сандерса приводят к одинаковой формуле:

$$\lambda^2=\pm i\sqrt{12(1-\nu^2)}/(R_2h)\qquad (k=k^0=1/\Gamma_*=0) \qquad (5.1)$$

В этом нетрудно убедиться использовав значения модулей, приведенные в п. 3. Теория Гольденвейзера дает

$$\lambda^2=-\frac{\nu(1+\nu)}{2R_2^2}\pm\frac{i}{R_2h}\sqrt{12(1-\nu^2)} \qquad (5.2)$$

$$k^0=1/\Gamma_*=0, \qquad k=\nu(1+\nu)/R_2$$

Наличие вещественного слагаемого в (5.2) обусловлено учетом поперечного сжатия. В то же время слагаемые, отличающие теорию Лурье от теорий Лява, Балабуха — Новожилова, Койтера — Сандерса, не оказывают на λ^2 влияния.

Теория оболочек, описанная в пп. 1, 2, в зависимости от Γ_* приводит к следующим значениям λ^2:

$$\Gamma_*=5/(6-\nu), \qquad k=k^0=\nu(1+\nu)/R_2$$

$$\lambda^2=\frac{6(1-\nu^2)}{5R_2^2}\pm\frac{i}{R_2h}\sqrt{12(1-\nu^2)} \tag{5.3}$$

$$\Gamma_*=\pi^2/12, \qquad k=k^0=\nu(1+\nu)/R_2$$

$$\lambda^2=\frac{6(1-\nu^2)}{5R_2^2}\beta\pm\frac{i}{R_2h}\sqrt{12(1-\nu^2)} \tag{5.4}$$

$$\beta=5(12-\nu\pi^2)/[\pi^2 6(1-\nu)]$$

Коэффициент β при поправочном слагаемом близок к единице. Например, при $\nu=0{,}3$ коэффициент $\beta=1{,}09$. Поэтому в практических расчетах можно пользоваться как формулой (5.3), так и (5.4). Последние сильно отличаются от (5.2), поскольку они более полно учитывают поперечное сжатие, а также деформацию поперечного сдвига.

6. Сравнение с пространственной теорией упругости. Для сравнения полученных результатов с данными трехмерной теории воспользуемся известными решениями для полой сферы [13] и полого цилиндра [14].

Для сферы касательное напряжение $\tau_{\theta r}$ и меридиональное перемещение определяются формулами

$$\tau_{\theta r}=f_1(r)\,dT/d\theta, \qquad U_\theta=f_2(r)\,dT/d\theta \qquad (|r-R|\leqslant h/2) \tag{6.1}$$

где функция T является решением уравнения Лежандра

$$d^2T/d\theta^2+\operatorname{ctg}\theta\, dT/d\theta+n(n+1)T=0 \tag{6.2}$$

а параметр n с погрешностью $O(h^2/R^2)$ определяется в случае простого краевого эффекта по формуле [13]:

$$n(n+1)=1-{}^6/_5(1-\nu^2)\mp iR\sqrt{12(1-\nu^2)}/h$$

Вычисляя по (1.5) интегральные характеристики от функций (6.1), получаем перерезывающую силу $N_1=C_1dT/d\theta$ и угол поворота $\varphi_1=C_2dT/d\theta$, где C_1 и C_2 — постоянные, определенные с точностью до произвольного общего множителя. Тогда введенная переменная X будет иметь вид $X=\varphi_1+aRN_1=\mathrm{const}\, dT/d\theta$.

Учитывая (6.2), получаем для нее уравнение

$$L(X)-\left[\frac{6(1-\nu^2)}{5R^2}\pm\frac{i}{Rh}\sqrt{12(1-\nu^2)}\right]X=0 \tag{6.3}$$

Последнее уравнение совпадает с (4.10), если λ^2 определено формулой (5.3).

В случае цилиндра функция, описывающая изменение перемещений и напряжений вдоль меридиана, является решением уравнения $m''=\mu^2 m$. Корни характеристического уравнения, соответствующие простому краевому эффекту, равны [14]:

$$\mu=\left(R-\frac{h}{2}\right)\frac{\gamma_0+\varepsilon\gamma_1+O(\varepsilon^2)}{\sqrt{\varepsilon}}, \qquad \varepsilon=\frac{2h}{2R-h}$$

$$\gamma_0^2=\pm i\sqrt{12(1-\nu^2)}, \qquad \gamma_1=\frac{3(1-\nu^2)}{5\gamma_0}-\frac{1}{4}\gamma_0$$

откуда с ошибкой $O(h^2/R^2)$ находится выражение

$$\mu^2 = \frac{6(1-\nu^2)}{5R^2} \pm \frac{i}{Rh}\sqrt{12(1-\nu^2)}$$

Проводя те же рассуждения, что и для сферической оболочки, получаем следующее уравнение для переменной X:

$$L(X) - \left[\frac{6(1-\nu^2)}{5R^2} \pm \frac{i}{Rh}\sqrt{12(1-\nu^2)}\right] = 0, \qquad L(X) \equiv X''$$

которое полностью совпадает с (4.10), (5.3).

Таким образом, исследование осесимметричной деформации оболочек вращения сводится к интегрированию уравнения второго порядка (4.10), в которое входит величина λ^2, зависящая от параметров оболочки. Аналогичное уравнение (6.3) для той же искомой функции X может быть получено и непосредственно из трехмерной теории упругости. Поэтому сравнение уравнений (4.10) и (6.3) может служить тестом для проверки точности теории оболочек [14]. Известно, что погрешность теории типа Лява [2] не меньше $O(h/R)$. В этом приближении уравнения (4.10) и (6.3) совпадают для всех вариантов теории оболочек. Увеличивает ли учет деформации поперечного сдвига и обжатия асимптотическую точность двумерной теории? В [15] дается положительный ответ на этот вопрос при выборе коэффициента поперечного сдвига $\Gamma_* = {}^5/_6$. Результаты публикуемой работы приводят к другому выводу. Если говорить об универсальной теории оболочек типа Тимошенко, то допустимым, видимо, является только $\Gamma_* = \pi^2/12$. При этом асимптотическая точность теории типа Тимошенко не превышает точности теории типа Лява. Если же отказаться от требования универсальности, то для некоторых классов задач теории оболочек повышение точности достижимо. В частности, для напряженных состояний с нормальной асимптотикой [2] можно рекомендовать для Γ_* значение $\Gamma_* = 5/(6-\nu)$.

Для иллюстрации изложенного выше рассмотрим скорость затухания простого краевого эффекта $\sigma = -|\mathrm{Re}\,\lambda|$. Трехмерная теория ($\sigma \equiv \sigma_3$) дает

$$-\sigma_3 = \frac{\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}}{\sqrt{R_2 h}}\left[1 + \frac{\sqrt{3(1-\nu^2)}}{5}\frac{h}{R_2} + O\left(\frac{h^2}{R^2}\right)\right]$$

Из теории оболочек ($\sigma = \sigma_2$), описанной в пп. 1, 2, следует

$$\sigma_2 = -\frac{\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}}{\sqrt{R_2 h}}\left[1 + \frac{\sqrt{3(1-\nu^2)}}{5}\frac{h}{R_2}\beta(\Gamma_*)\right], \qquad \beta = \frac{5(1-\nu\Gamma_*)}{6(1-\nu)\Gamma_*}$$

Относительная погрешность σ_2 по сравнению с σ_3 определяется формулой

$$\delta = \left|\frac{\sigma_3 - \sigma_2}{\sigma_2}\right| = \frac{|\beta - 1|}{5}\,\frac{\sqrt{3(1-\nu^2)}\,h_0}{1 + 0{,}2\sqrt{3(1-\nu^2)}\,h_0} \qquad \left(h_0 = \frac{h}{R_2}\right) \tag{6.4}$$

Из (6.4) видно, что $\delta = 0$ при $\Gamma_* = 5/(6-\nu)$: это расходится с результатом из [15]. Видно также, что δ мала при $\Gamma_* = \pi^2/12$ или $\Gamma_* = {}^5/_6$ даже для сравнительно толстых оболочек $h_0 = 0{,}2-0{,}5$. Поэтому допустимы и эти значения Γ_*, но говорить об асимптотическом уточнении уже нельзя.

Исследование простого краевого эффекта в оболочках вращения с позиций теории типа Тимошенко и выяснение возникающей здесь погрешности проведено по предложению В. В. Новожилова, ряд серьезных неточностей, которые были устранены в окончательном тексте, отметил А. Л. Гольденвейзер. Авторы благодарны им за ценные советы и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Жилин П. А.* Механика деформируемых оснащенных поверхностей.— В кн.: Тр. IX Всес. конф. по теории оболочек и пластин. Л., 1973. Л.: Судостроение, 1975, с. 48–54.
2. *Гольденвейзер А. Л.* Теория тонких упругих оболочек. М.: Наука, 1976. 512 с.
3. *Новожилов В. В.* Теория тонких оболочек. Л.: Судпромгиз, 1962. 431 с.
4. *Mindlin R. D.* Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic elasic plates.— J. Appl. Mech., 1951, v. 18, No. 1, p. 31–38.
5. *Жилин П. А., Ильичева Т. П.* Спектры и формы колебаний прямоугольного параллелепипеда, полученные на основе трехмерной теории упругости и теории пластин.— Изв. АН СССР. МТТ, 1980, № 2, с. 94–103.
6. *Черных К. Ф.* Линейная теория оболочек. Ч. II. Л.: Изд-во Ленинград. ун-та, 1964. 395 с.
7. *Sanders J. L.* An improved first-approximation theory for thin shells.— NASA Tech. Rep., 1959, No. R-24. 11 p.
8. *Budiansky B., Sanders J. L.* On the «best» first-order linear shell theory.— Progress in Appl. Mech. (Prager Anniversary Volume). N. Y.: Macmillan, 1963, p. 129–140.
9. *Koiter W. T.* A consistent first approximation in the general theory of elastic shells.— In: Theory of thin elastic shells. Proc. IUTAM symposium, Delft, 1959. B.: Springer, 1960, p. 12–33.
10. *Лурье А. И.* Общая теория тонких упругих оболочек.— ПММ, 1940, т. 4, вып. 2, с. 7–34.
11. *Гольденвейзер А. Л.* Асимптотический метод построения теории оболочек.— В кн.: Материалы I Всес. школы по теории и численным методам расчета оболочек и пластин. Гегечкори. 1974. Тбилиси: Изд-во Тбилис. ун-та, 1975, с. 151–213.
12. *Лурье А. И.* Статика тонкостенных упругих оболочек. М.— Л.: Гостехиздат, 1974. 252 с.
13. *Лурье А. И.* Равновесие упругой симметрично нагруженной сферической оболочки.— ПММ, 1943, т. 7, вып. 6, с. 393–404.
14. *Базаренко Н. А., Ворович И. И.* Асимптотическое поведение решения задачи теории упругости для полого цилиндра конечной длины при малой толщине.— ПММ, 1965, т. 29, вып. 6, с. 1035–1052.
15. *Бердичевский В. Л.* Вариационно-асимптотический метод.— Некоторые проблемы механики сплошной среды: Сб. статей. М.: Изд-во МГУ, 1978, с. 271–298.

Ленинград

Поступила в редакцию
18.III.1982