

Жилин П.А., Коншневская Р.И., Пальмов В.А., Чвартацкий Р.В.
К расчету напряженно-деформированного состояния разрядных
камер установок токамак. Препринт ОМ-0550. Л., НИИЭФА, 1982,
13 стр. с ил., цена 10 коп.

Излагается алгоритм численного расчета на ЭВМ напряженно-деформированного состояния оболочек вращения при осесимметричных нагрузках. Краевая задача сводится к ряду задач построения начальных задач ведется методом Рунге-Кутты. Используется метод дискретной ортогонализации, предложенный С.К. Годуновым. Конкретный расчет проведен для разрядной камеры термоядерной установки, состоящей из цилиндрического, конического и торoidalного участков. Проведен сравнительный анализ напряженно-деформированного состояния гладкой и подкрепленной меридиональными ребрами камер.

О Г Л А В Л Е Н И Е

1. Каноническая система уравнений, описывающих осесимметрично деформацию ортотропных оболочек вращения . . .	1
2. Численный метод решения	5
3. К вопросу о реализации численного метода на ЭВМ . . .	6
4. О достоверности численной реализации метода	8
5. Расчет разрядных камер установок токамак	10
Л и т е р а т у р а	13

Научно-исследовательский институт электрофизической аппаратуры им. Д.В. Ефремова (НИИЭФА),
1982 г.

1. КАНОНИЧЕСКАЯ СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ, ОПИСЫВАЮЩИХ ОСЕСИММЕТРИЧНУЮ ДЕФОРМАЦИЮ ОРТОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ

Одним из конструктивных вариантов разрядных камер установок токамак является замкнутая торобразная оболочка, подкрепленная меридиональными ребрами, внутри которой вакуум. Под действием атмосферного давления и подеромоторных нагрузок в камере возникает сложное напряженно-деформированное состояние. Его анализ — цель настоящей работы. Дифференциальные уравнения равновесия оболочки имеют вид [1]:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}(\gamma H_e) - T_z + \gamma q_e &= 0, \\ \frac{d}{ds}(\gamma H_z) + \gamma q_z &= 0, \\ \frac{d}{ds}(\gamma M_s) - M_z \cos \theta - \gamma N_s &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где S — длина дуги меридиана; γ — радиус параллельного круга; θ — угол, составленный нормалью к срединной поверхности и положительным направлением оси вращения; H_s , H_z — радиальное и осевое усилия; M_s , M_z — меридиональный и окружной изгибающие моменты; T_z , N_s — окружное и перерезывающее усилия; q_e , q_z — радиальная и осевая составляющие распределенной внешней нагрузки.

Соотношения упругости для оболочки, подкрепленной меридиональными ребрами, представляют собой частный случай напряжений, приведенных в работе [2]:

$$\begin{aligned} T_s &= B_s \epsilon_s + B_{\mu} \epsilon_z + A_s \alpha_s, \\ T_z &= B_z (\epsilon_z + \mu \epsilon_s), \\ M_s &= D_s \alpha_s + D_{\mu} \alpha_z + A_s \epsilon_s, \\ M_z &= D_z (\alpha_z + \mu \alpha_s), \end{aligned} \quad (2)$$

$$\text{Здесь } D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} ; \quad B = \frac{Eh}{1-\mu^2} ;$$

$$D_1 = D + \frac{E_r I_r}{\ell} ; \quad B_1 = B + \frac{E_r F_r}{\ell} ;$$

$$A_1 = \frac{E_r S_r}{\ell} ; \quad \ell = \frac{2\pi\lambda}{\eta} ;$$

$\varepsilon_1, \varepsilon_2$ - относительные удлинения срединной поверхности в меридиональном и окружном направлениях; α_1, α_2 - изгибные деформации; h - толщина оболочки; E - модуль упругости материала оболочки; μ - коэффициент Пуассона; E_r - момент упругости материала ребра; F_r - площадь поперечного сечения ребра; I_r - момент инерции поперечного сечения ребра относительно оси, проходящей через срединную поверхность оболочки; S_r - статический момент инерции поперечного сечения ребра относительно этой же оси; ℓ - расстояние между ребрами; η - количество ребер; T_1 - меридиональное усилие.

Деформации выражаются через перемещения формулами [1] :

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{du}{ds} + \frac{w}{R_1} ; & \varepsilon_2 &= \frac{\Delta e}{\lambda} , \\ \alpha_1 &= \frac{dw}{ds} ; & \alpha_2 &= -\frac{u \cos \theta}{\lambda} , \\ u_1 &= \frac{dw}{ds} - \frac{u}{R_1} , \end{aligned} \quad (3)$$

где u, w - меридиональное и нормальное перемещения;

θ - угол поворота нормали при деформации; R_1 - радиус кривизны меридиана; $\Delta e, \Delta z$ - радиальное и осевое перемещения.

Вспомогательные величины, входящие в описанную систему (1)-

(3), выражаются через основные ($\Delta e, \Delta z, u, w, H_e, H_z, M_1$) следующим образом:

$$T_1 = H_e \cos \theta - H_z \sin \theta, \quad N_1 = H_e \sin \theta + H_z \cos \theta,$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{D_1 B_1 - A_1^2} [D_1 T_1 - M_1 A_1 - \mu A_1 D \frac{u \cos \theta}{\lambda} - \mu B_1 D \frac{\Delta e}{\lambda}] , \\ \alpha_1 &= \frac{1}{D_1} (M_1 - \mu D \alpha_2 - A_1 \varepsilon_1) , \end{aligned} \quad (4)$$

$$u = \Delta e \cos \theta - \Delta z \sin \theta ,$$

$$w = \Delta e \sin \theta + \Delta z \cos \theta .$$

Меридиональные и окружные напряжения вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} \sigma_1^p &= \frac{\ell(T_1 - \alpha M_1)}{F - \alpha S_p} , & \sigma_2^p &= \frac{T_2}{h} , \\ \sigma_1^u &= z \frac{\ell(M_1 - \beta T_1)}{I - \beta S_p} , & \sigma_2^u &= \frac{\beta M_2}{h^2} , \end{aligned} \quad (5)$$

где σ_1^p, σ_2^p (σ_1^u, σ_2^u) - меридиональные и окружные напряжения растяжения (изгиба) соответственно; F, S, I, α, β - характеристики сечения $S = \text{const}$,

$$F = \int dS, \quad S = \int z dS, \quad I = \int z^2 dS,$$

dS - элемент площади сечения.

Напряжения растяжения σ_1^p , одинаковы в ребре и оболочке.

При вычислении напряжений изгиба σ_1^u , в оболочке в формуле

для σ_1^u следует положить $z = \pm h/2$ (h - толщина оболочки), в то время как для σ_1^u в ребре нужно принять $z = z_{\text{max}}$.

В результате некоторых преобразований системы уравнений

(1)-(3) можно придать следующий вид:

$$\frac{d\Delta e}{ds} = \epsilon_1 \cos \theta + \psi_1 \sin \theta,$$

$$\frac{d\Delta z}{ds} = -\epsilon_1 \sin \theta + \psi_1 \cos \theta,$$

$$\frac{d\psi_1}{ds} = -\alpha_1,$$

(6)

$$\frac{d(\psi H_e)}{ds} = B\left(\frac{\Delta e}{\psi} + \mu \epsilon_1\right) - \psi q_e,$$

$$\frac{d(\psi H_z)}{ds} = -\psi q_z,$$

$$\frac{d(\psi M_1)}{ds} = \psi H_e \sin \theta + \psi H_z \cos \theta + D \cos \theta (\mu \alpha_1 + \alpha_2).$$

Такая форма записи удобна для проведения численных расчетов. Если в системе (6) положить $\Gamma_r = \Gamma_r = S_r = 0$, то получится система, описывающая напряженно-деформированное состояние изотропной оболочки.

Все рассматриваемые камеры имеют плоскость симметрии, перпендикулярную оси вращения. Поэтому расчет производится на половине интервала изменения аргумента S , а граничные условия определяются следующим образом

$$\left. \begin{aligned} \psi_1 &= 0 \\ H_e &= 0 \\ \Delta z &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ при } \theta = \pm \frac{\pi}{2}. \quad (7)$$

2. ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ

Для удобства дальнейшего изложения перейдем к матричной записи исходной задачи. Систему, эквивалентную системе (6), где все величины представлены в безразмерном виде, можно записать в форме

$$\frac{dY}{d\bar{s}} = X(\bar{s})Y(\bar{s}) + P(\bar{s}), \quad (\bar{s}_0 \leq \bar{s} \leq \bar{s}_N) \quad (8)$$

Здесь $\bar{s}$ - безразмерное значение длины дуги меридиана;

$Y = \{\Delta e, \Delta z, \psi_1, \psi H_e, \psi H_z, \psi M_1\}$ - искомая вектор-функция; $P(\bar{s})$ - вектор внешних воздействий; $X(\bar{s})$ - матрица коэффициентов системы.

Граничные условия представляются в виде

$$G_1 Y = b_1 \quad \text{при } \bar{s} = \bar{s}_0, \quad (9)$$

$$G_2 Y = b_2 \quad \text{при } \bar{s} = \bar{s}_N, \quad (10)$$

где G_1, G_2 - заданные прямоугольные матрицы; b_1, b_2 - заданные векторы.

В случае условий (7) имеем

$$G_1 = G_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad b_1 = b_2 = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad (11)$$

При решении системы используется метод сведения краевой задачи к ряду задач Коши. Общий вид решения представляется следующим образом:

$$Y(\bar{s}) = Y_A(\bar{s}) + \sum_{i=1}^3 c_i Y_i(\bar{s}).$$

Здесь $Y_A(\bar{s})$ - решение задачи Коши для системы уравнений (8) с начальными условиями $Y_A = \{0, 0, 0, 0, 0, 0\}$; $Y_i(\bar{s})$ ($i=1, 2, 3$) - решение трех следующих задач Коши для системы (8) при $P(\bar{s}) = 0$ с начальными условиями, соответственно: $Y_1 = \{1, 0, 0, 0, 0, 0\}$, $Y_2 = \{0, 0, 0, 0, 1, 0\}$, $Y_3 = \{0, 0, 0, 0, 0, 1\}$;

c_i - компоненты, которые определяются при выполнении граничных условий на правом конце интервала интегрирования (10), (11).

Наличие малого параметра и возможное обращение в ноль или бесконечность коэффициентов системы влекут за собой появление

в решении системы (8) доказываемых быстротенных состав-
ляющих. При этом указанный подход может сопровождаться нараста-
нием погрешностей счета. Может случиться, что нельзя с достаточ-
ной точностью при выполнении граничных условий (10) определить
постоянные интегрирования C_l и сами функции [3]. Счет
становится неустойчивым, а результаты недостоверны. Одним из
эффективных методов преодоления указанных трудностей является
метод дискретной ортогонализации, предложенный С.К. Годуновым
[4]. Суть его сводится к ортогонализации векторов-решений
задач Коши в конечном числе точек интервала изменения аргумен-
та. Весь интервал $[S_0, S_N]$ разбивается на части точками
ортогонализации, выбор которых обусловлен степенью требуемой
точности решения задачи.

При интегрировании системы используются варианты метода Рун-
ге-Кутты до четвертого порядка точности с переменным шагом [5].
Контроль точности и выбор шага интегрирования производится пу-
тем сравнения приращений искомого вектора $Y(S)$:

$$\delta_{ij} = |(\Delta_i Y_j)^2 - (\Delta_{i+1} Y_j)^2|.$$

Здесь $i = 1, 3; j = 1, 2, \dots, 6$; $Y_j - j$ -ая компонента векто-
ра приращений Y , вычисленная по формулам Рунге-Кутты i -то
порядка точности; ϵ - заданная точность интегрирования.

Если $\delta_{ij} > \epsilon^2$ хотя бы для одного значения j при $i = 1$,
то вычисляется новое δ_{ij} при $i = 3$. Если и в этом случае
 $\delta_{ij} > \epsilon^2$ хотя бы для одного значения j , то шаг делится по-
полам, если $\delta_{ij} < \frac{\epsilon^2}{32}$ для всех j , $i = 1$, то шаг удваивает-
ся. В противном случае шаг остается прежним.

3. К ВОПРОСУ О РЕАЛИЗАЦИИ ЧИСЛЕННОГО МЕТОДА НА ЭВМ

При численном решении оболочки развиваются на участки, каж-
дый из которых представляет одну из следующих форм: круглая
пластина, цилиндр, конус, сфера, круговой тор. Это оправдыва-
ется тем, что наиболее распространенными на практике являются
именно перечисленные выше формы. Часто встречаются оболочки,
составленные из них. Оболочки же вращения произвольного вида
могут быть представлены с достаточной точностью при помощи
этих же форм.

В некоторых случаях удобно разбивать на участки элементы
одной формы, в частности, для выделения участков криволиней-

постоянных параметров жесткостью оболочки, а также участков,
требующих увеличения количества точек ортогонализации. Встре-
чаются оболочки, подкрепленные на отдельных участках меридиана.

Исходная информация определяется по участкам. На каждом
 i -том участке должны быть заданы: h , E , μ ; $R = \sqrt{r^2 + z^2}$
(в случае кругового тора R - расстояние центра меридиональ-
ного сечения до оси вращения); угол θ , заданный в начал-
ной и конечной точках меридиана этого участка; α - характер-
ный параметр, определенный ниже; закодированная форма оболоч-
ки; количество точек ортогонализации; количество ребер; ха-
рактеристики ребер; вид нагрузки.

В программе используются пять отдельных подпрограмм вычис-
ления правых частей системы (8) конкретно для каждой формы.
Это упрощает эксплуатацию программы, повышает точность и умень-
шает время счета. В зависимости от формы оболочки на i -том
участке в подпрограммах заложены следующие законы изменения
геометрических параметров.

1. Круговой тор

$$\begin{aligned} \theta_j(s) &= \theta_{j-1}(s_{j-1}) + \frac{s_j - s_{j-1}}{a}, \quad \theta_j = \theta(s_j), \\ y_j &= R + a \sin \theta_j, \\ s_i &= s_{i-1} + a(\theta_i - \theta_{i-1}), \quad \theta_i = \theta(s_i), \end{aligned}$$

где j определяет точку на меридиане, в которой вычисляют-
ся правая часть системы (8) в процессе интегрирования;
 s_j - длина дуги меридиана от его начала до этой точки;
 y_j - расстояние от оси вращения до этой точки; s_i - длина
дуги меридиана от его начала до конца i -того участка;
 a - радиус меридионального сечения тора.

2. Цилиндрическая оболочка

$$\theta = \pm \frac{\pi}{2}, \quad y_j = R, \quad s_i = s_{i-1} + a,$$

где a - длина цилиндрического участка

3. Сферическая оболочка

$$\begin{aligned} \theta_j &= \theta_{j-1} + \frac{s_j - s_{j-1}}{a}, \\ y_j &= a \sin \theta_j, \\ s_i &= s_{i-1} + a(\theta_i - \theta_{i-1}), \end{aligned}$$

где ρ - радиус сферы.

4. Коническая оболочка

$$\theta = \text{const},$$

$$\gamma_j = R + (s_{j-1} - s_j) \cos \theta,$$

$$s_L = s_{L-1} + \left| \frac{\rho}{\cos \theta} \right|,$$

где $\rho + R$ - радиус большего из оснований конуса.

5. Круглая пластинка

$$\theta = 0; \pi, \quad \gamma_j = R + s_j, \quad s_L = s_{L-1} + \rho,$$

где ρ - расстояние от внутреннего круга кольца до внешнего.

4. О ДОСТОВЕРНОСТИ ЧИСЛЕННОЙ РЕАЛИЗАЦИИ МЕТОДА

В процессе отладки программы использовались тестовые задачи, допускавшие аналитическое решение. Программа считалась отлаженной, если различие между аналитическим и численным решениями во всех контрольных точках было меньше заданной погрешности. Практически считались допустимыми относительные погрешности, не превышающие 0,1%. Стремиться к большей точности часто не рационально, ибо это существенно увеличивает затраты машинного времени. В сожалею, тестовые задачи не могут служить единственным критерием качества программы, поскольку аналитические решения с гарантированной точностью имеются только для сравнительно простых форм оболочек. Поэтому в программе предусмотрены и другие способы контроля достоверности получаемых результатов. В качестве таких критериев можно использовать различные соотношения, которые зависят от специфики задачи. Наиболее целесообразным с точки зрения механики является интегральное условие статки произвольно выделенной части оболочки. Аналитически интегральные и дифференциальные условия статки эквивалентны. При численном же решении дифференциальных уравнений нарушение интегральных уравнений статки неизбежно из-за погрешностей счета. Поэтому вычисление погрешностей при выполнении интегральных условий статки является важным средством контроля достоверности результатов численного решения. Рассмотрим некоторые из критериев. Выделим из рассматриваемой оболочки ее произволь-

ную часть посредством трех плоских сечений. Первое сечение осуществляется плоскостью A , содержащей ось вращения (эта плоскость отсекает половину оболочки). Два других сечения осуществляются плоскостями B и C , проходящими перпендикулярно оси вращения через точки меридиана $S = S_0$, $S = S_m$ соответственно. В частном случае при постоянном давлении уравнения равновесия всех сил, действующих на выделенную часть оболочки в направлениях, ортогональных плоскости A и плоскостям B и C , имеют вид

$$\int_{S_0}^{S_k} T_2 ds + (\gamma H_e)_{S=S_k} - (\gamma H_e)_{S=S_0} = \frac{1}{2} p F, \quad (12)$$

$$(\gamma H_z)_{S=S_k} - (\gamma H_z)_{S=S_0} = \frac{\rho (\gamma_k^2 - \gamma_0^2)}{2}, \quad (13)$$

где F - площадь проекции поверхности выделенной части оболочки на плоскость A ; p - постоянное давление.

Для замкнутого тора выражение (12) принимает вид

$$\oint T_2 ds = p F,$$

где F - площадь меридионального сечения тора.

Еще одно выражение вытекает из третьего уравнения системы (3) при условии, что угол поворота нормали на контурах, отсекаемых плоскостями B , C , равен нулю. Оно имеет вид

$$\int_{S_0}^{S_k} x ds = 0,$$

используются и другие способы контроля правильности полученных результатов. Пусть, например, требуется определить напряженно-деформированное состояние длинной тонкой цилиндрической оболочки, защемленной по торцам и нагруженной внутренним давлением. Ясно, что здесь имеется плоскость симметрии, проведенная через середину оболочки перпендикулярно оси вращения. Указанная симметрия в программе не заложена. Поэтому наличие (или отсутствие) упомянутой симметрии в численном решении свидетельствует о качестве программы. Поскольку в основу численного метода положена процедура сведения краевых задач к последовательности задач Коши, то расчет

длинной тонкой оболочки этим методом представляет известные трудности. В частном случае цилиндрической оболочки с параметрами $\frac{a}{R} = 4$, $\frac{h}{R} = 0,02$ упомянутая выше симметрия наблюдается с точностью до 0,01%. Имеется четко выраженный краевой эффект в части оболочки, отстоящей от краев приблизительно на $1/3 a$. В средней части оболочки реализуется безмоментное состояние.

В некоторых случаях для оценки точности полученного решения использовался принцип Рунге, т.е. сравнение решений при разном числе шагов интегрирования (различная точность интегрирования) и точек ортогонализации.

5. РАСЧЕТ РАЗРЫДНЫХ КАМЕР УСТАНОВОК ТОКАМАК

По разработанной программе рассчитаны три вида камер: гладкий круговой тор, круговой тор с меридиональными ребрами и торообразная оболочка с меридиональными ребрами, поперечное сечение которой состоит из цилиндрического, конического и тороидального участков. Расчетными нагрузками на камеры во всех случаях являются атмосферное давление в сочетании с электродинамическими усилиями. В качестве примера приведем результаты расчета последнего из указанных вариантов камеры под действием атмосферного давления. Меридиональные ребра размещены циклически равномерно и имеют одинаковые геометрические и механические параметры. На рис. 1 указаны геометрические параметры оболочки, отнесенные к радиусу цилиндрического участка R . Относительные параметры ребер имеют величины: $h^*/R^2 = 0,11$; $l^*/R^4 = 0,034$;

$5h^*/R^5 = 0,05$; параметры оболочки: на цилиндрическом участке $h/R = 0,031$, на других участках $h/R = 0,0075$. Считается,

что оболочка и ребра изготовлены из одинакового материала с модулем упругости $E = 2 \cdot 10^6 \text{ кгс/см}^2$.

На рис. 1, 2, 3 в безразмерном виде представлены эпюры меридиональных усилий T_1/R , окружных усилий T_2/R и изгибных меридиональных напряжений δ/R . Кривые 1 соответствуют гладкой неоребреной конструкции; кривые 2 — оболочке, подкрепленной 32 ребрами, расположенными на конической и тороидальной частях; кривые 3 — оболочке, которая от начала конической части до точки С имеет 32 ребра, а от точки С до конца тороидальной части 64 ребра. Из приведенных результатов расчета можно сделать следующие выводы:

В области цилиндрического и конического участков возникают значительные изгибные напряжения и внутренние усилия. Введение меридиональных ребер существенно снижает их величину.

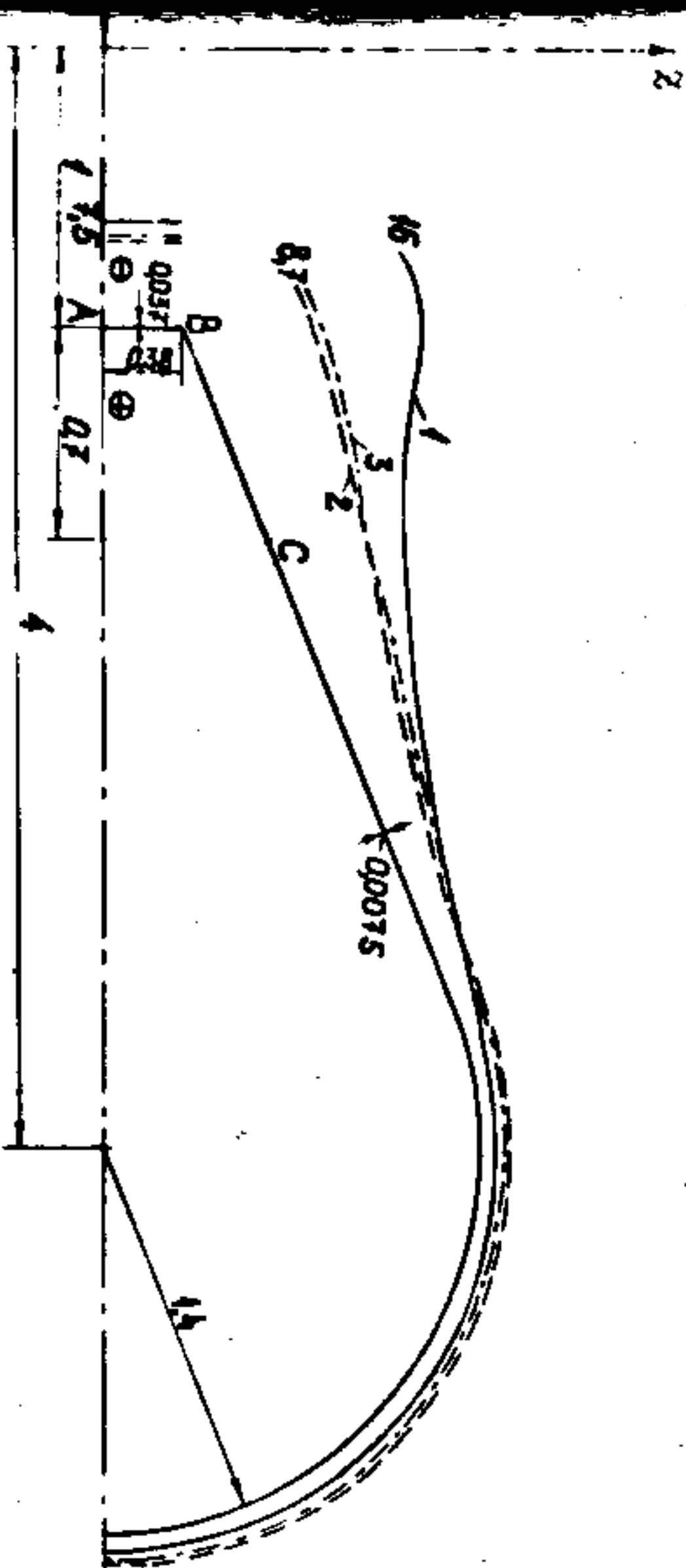


Рис. 1. Эпюры меридиональных усилий

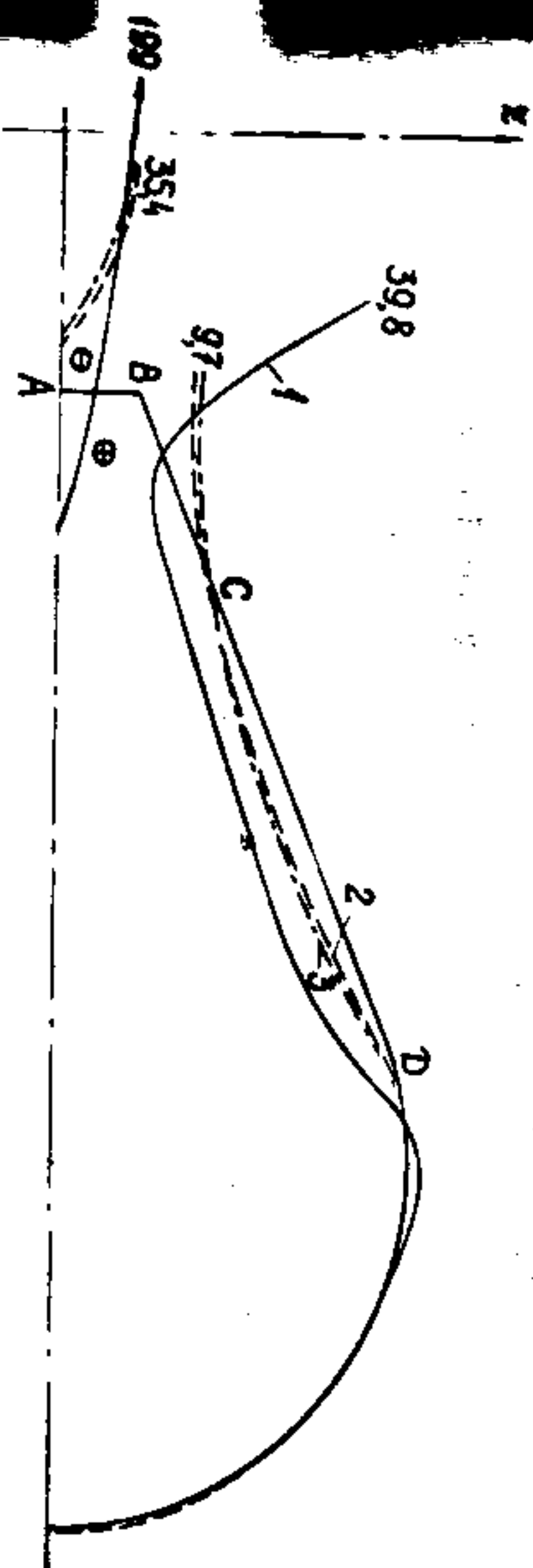


Рис. 2. Эпюры окружных усилий

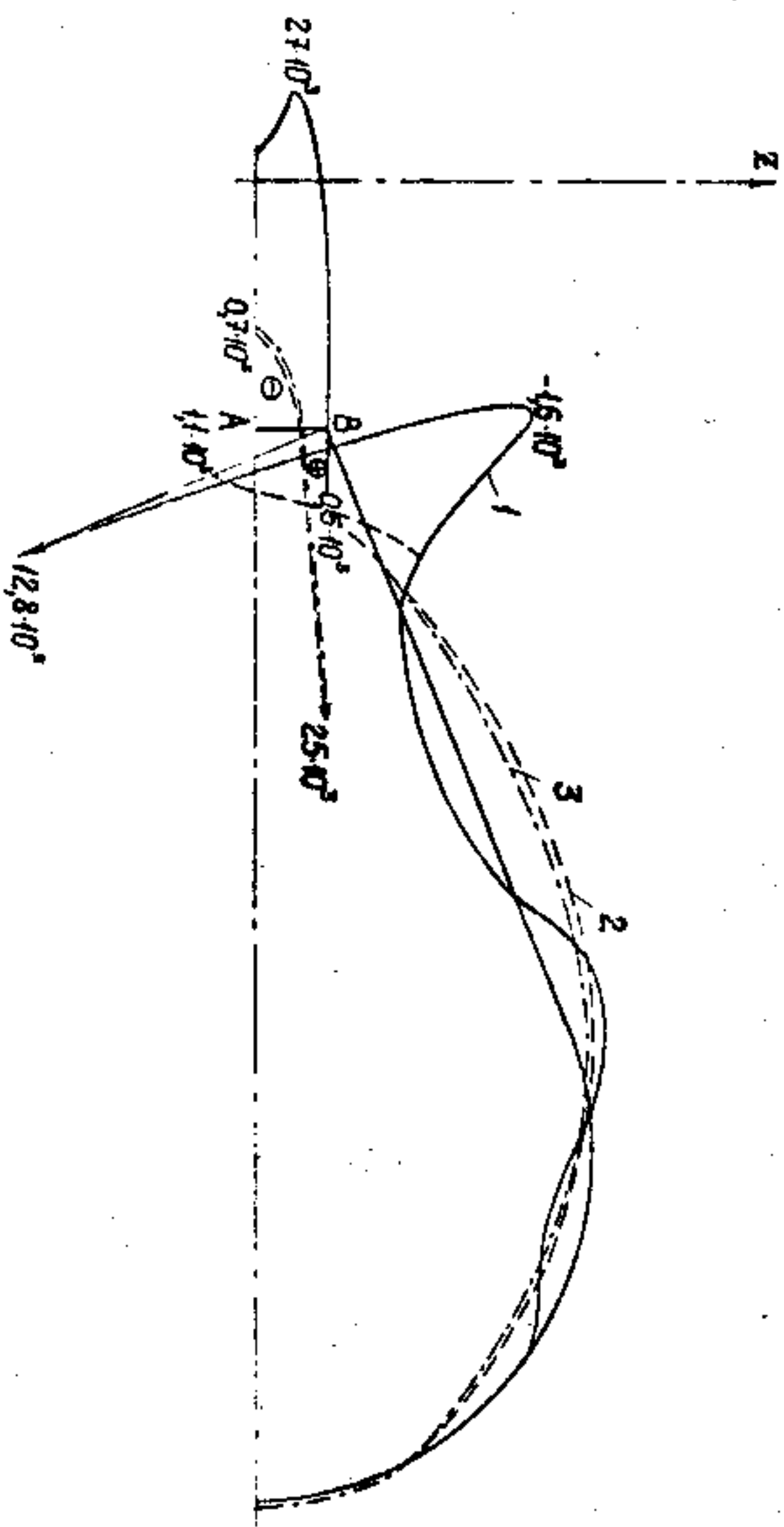


Рис. 3. Эпюры изгибных меридиональных напряжений

Дальнейшего снижения внутренних усилий можно добиться введением радиуса кривизны на стыке цилиндрического и конического участков.

Подкрепление оболочки дополнительными ребрами (кривые 3) существенных изменений в ее напряженное состояние не вносит.

ЛИТЕРАТУРА

1. Чернина В.С. Статика тонкостенных оболочек вращения. - М.: Наука. 1968.
2. Королев В.И. К расчету подкрепленных пластин и оболочек. - Инженерный сборник, том XLVI. - М.: Изд-во АН СССР, 1958.
3. Григоренко Л.М. Изотропные и анизотропные оболочки вращения переменной жесткости. - Киев: Наукова думка, 1973.
4. Годунов С.К. О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных уравнений. - Успехи математических наук, 1961, т. XVI, вып. 3.
5. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. - М.: Наука, 1966.

П.А. Жилин, Р.И. Коншеская, В.А. Дельмов,
Р.В. Чвартацкий

К РАСЧЕТУ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ
РАЗРЕЗНЫХ КАМЕР УСТАНОВОК ТОКАМАК

Заказ № 220/797. Рукопись поступила на издание 31/УП 1981 г.
Формат оуагги 60х90/16. Уч.-изд. л. 0,7. Отпечатано 140 экз.
Ротипринт НИИЭФА. Цена 10 коп. Индекс 3624.Т-04055 18/П 1982 г.

Ответственная за выпуск В.Л. Гусева