4. Циглер Г. Основы теории устойчивости конструкций. М.: Мир, 1971. 192 с.

5. Жилин П.А., Сергеев А.Д. Равновесие и устойчивость тонкого стержня, нагруженного консервативным моментом// Труды СПбГТУ. 1994. № 448. С.47-56.

6. Ляв А. Математическая теория упругости. М.-Л.: ОНТИ, 1935. 674 с.

П.А.Жилин, Т.П.Товстик

ВРАЩЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА НА ИНЕРЦИОННОМ СТЕРЖНЕ

Задача о вращении твердого тела на безынерционном стержне рассмотрена во многих работах (см. [1]). В последние годы изучаются проблемы создания высокооборотных центрифуг со скоростями вращения 120-200 тыс.об./мин. Основным конструктивным решением является установка на гибком стержне, причем параметры стержня и ротора таковы, что стержень уже нельзя считать безынерционным. Попытки решения этой задачи известны, но они приводят к чрезвычайно громоздким уравнениям, трудно поддающимся аналитическому исследованию. В данной работе описывается метод, позволяющий свести задачу к решению относительно простого интегродифференциального уравнения, и дается способ его приближенного интегрирования. Рассмотрение ограничено простейшим случаем, когда оба конца стержня закреплены от поперечных смещений - это один из режимов работы реально существующей ультрацентрифуги.

<u>Постановка задачи</u>. В качестве исходных уравнений, описывающих нелинейную динамику упругих стержней, примем уравнения, принятые в [2], но игнорирующие инерцию вращения:

$$\underline{N}' = \rho S \ddot{\underline{R}}, \quad \underline{M}' + \underline{R}' \times \underline{N} = 0, \quad f' \equiv df/ds, \quad \dot{f} \equiv df/dt, \qquad (1)$$

где $\underline{N}$ и $\underline{M}$ - векторы перерезывающих сил и моментов, $\underline{R}(s) = s\underline{k} + \underline{u}(s,t)$ - вектор положения точек стержня, s - расстояние вдоль недеформированной оси прямолинейного стержня, ρ - плотность материала, S - площадь поперечного сечения.

Соотношения упругости имеют вид

$$\underline{N} = \underline{\underline{P}} \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{P}}^T \cdot \underline{\varepsilon}, \qquad \underline{M} = \underline{\underline{P}} \cdot \underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{P}}^T \cdot \underline{\Phi}, \qquad (2)$$

где $\underline{\underline{A}}$ и $\underline{\underline{C}}$ - тензоры упругости, вычисленные в отсчетной (недеформированной) конфигурации и считающиеся трансверсально-изотропными;

$$\underline{\underline{A}}=(A_1-A_2)\,\underline{k}\otimes\underline{k}+A_2\underline{\underline{E}},\quad \underline{\underline{C}}=(C_1-C_2)\,\underline{k}\otimes\underline{k}+C_2\underline{\underline{E}}, \tag{3}$$

A_1, A_2, C_1', C_2 – жесткости на растяжение, поперечный сдвиг, кручение и изгиб соответственно, $\underline{k}$ – единичный орт недеформированной оси стержня. Через $\underline{\underline{P}}(s,t)$ обозначен тензор поворота поперечного сечения стержня с координатой s.

Векторы деформации $\underline{\mathcal{E}}$ и $\underline{\Phi}$ определяются соотношениями [2]

$$\underline{\mathcal{E}}=\underline{R}'(s,t)-\underline{\underline{P}}(s,t)\cdot\underline{k},\quad \underline{\underline{P}}'(s,t)=\underline{\Phi}(s,t)\times\underline{\underline{P}}(s,t). \tag{4}$$

Примем обозначение.

$$\underline{\underline{Q}}(\varphi\underline{n})\equiv(1-\cos\varphi)\,\underline{n}\otimes\underline{n}+\cos\varphi\,\underline{\underline{E}}+\sin\varphi\,\underline{n}\times\underline{\underline{E}} \tag{5}$$

для поворота на угол φ вокруг единичного вектора $\underline{n}$.

Обратимся к формулировке краевых условий. Часть из них очевидна и записывается в виде

$$\underline{R}(0,t)=\underline{0},\quad \underline{\underline{P}}(0,t)=\underline{\underline{Q}}(\beta(t)\underline{k}),\quad \underline{R}(\ell,t)\cdot(\underline{\underline{E}}-\underline{k}\otimes\underline{k})=\underline{0},\ \underline{N}\cdot\underline{k}=0. \tag{6}$$

Считаем, что торец $s=0$ стержня вращается двигателем с номинальной угловой скоростью ω_0. Момент, развиваемый двигателем, определим по простейшей характеристике

$$M_{дв}=-\eta(\dot\beta-\omega_0),\quad \eta>0\quad [\eta=\infty\Rightarrow\dot\beta=\omega_0], \tag{7}$$

где η – характеристика двигателя. Если мощность двигателя считать неограниченной, то $\eta=\infty$ и $\dot\beta=\omega_0$. Ограниченная мощность двигателя проявляется только на режимах разгона и торможения. Последние два условия в (6) означают отсутствие поперечных смещений и осевой силы на торце $s=\ell$. В дополнение к (6) необходимо сформулировать еще три условия, налагаемых на вектор момента. Роль этих условий выполняют уравнения динамики для твердого тела (ротора), имеющего неподвижную точку. Второй закон динамики Эйлера для ротора дает

$$\left[\underline{\underline{P}}(\ell,t)\cdot\underline{\underline{\theta}}\cdot\underline{\underline{P}}^T(\ell,t)\cdot\underline{\omega}(t)\right]^{\cdot}=\underline{M}(\ell,t), \tag{8}$$

где $\underline{\underline{\theta}}$ – тензор инерции ротора, вычисленный относительно неподвижной точки

$$\underline{\underline{\theta}}=\theta_1\,\underline{k}\otimes\underline{k}+\theta_2(\underline{\underline{E}}-\underline{k}\otimes\underline{k}), \tag{9}$$

где θ_1 и θ_2 – осевой и экваториальный моменты инерции. Полем силы тяжести пренебрегаем. Для вертикально установленной центрифуги это вполне допустимо. Если к уравнениям(I)-(9) добавить начальные условия, то получим поставленную нелинейную динамическую краевую задачу. В общей постановке ее решение затруднительно, да и едва ли в этом есть необходимость. Ниже рассматривается частично линеаризованная постановка.

Линеаризация основных уравнений. Тензор поворота представим с использованием углов Эйлера [3]

$$\underline{\underline{P}}(s,t)=\underline{\underline{Q}}(\psi\underline{k})\cdot\underline{\underline{Q}}(\vartheta\underline{i})\cdot\underline{\underline{Q}}(\varphi\underline{k}),\quad \underline{i}\cdot\underline{k}=0,\ |\underline{i}|=1, \tag{10}$$

где углы прецессии ψ , нутации ϑ и собственного вращения φ являются функциями координаты s и времени t , а повороты происходят вокруг фиксированных осей. Второе из условий (6) дает

$$\vartheta(0,t)=0,\quad \beta(t)=\psi(0,t)+\varphi(0,t).$$

В рассматриваемой задаче допустимо принять, что угол нутации $\vartheta(s,t)$ мал по модулю для всех значений s и t . В этом случае выражение (10) можно линеаризовать по ϑ , и записать

$$\underline{\underline{Q}}(\vartheta\underline{i})=\underline{\underline{E}}+\vartheta\underline{i}\times\underline{\underline{E}},\quad \underline{\underline{P}}(s,t)=(\underline{\underline{E}}+\underline{\gamma}\times\underline{\underline{E}})\cdot\underline{\underline{Q}}(\alpha\underline{k}), \tag{11}$$

где введены обозначения

$$\alpha(s,t)=\varphi(s,t)+\psi(s,t),\quad \underline{\gamma}(s,t)=\vartheta(s,t)\,\underline{\underline{Q}}(\psi\underline{k})\cdot\underline{i}, \tag{12}$$

и вращающийся вектор нутации $\underline{\gamma}$ мал по модулю.

По (11) легко найти угловую скорость ротора, используя формулы, приведенные в [3]:

$$\underline{\omega}(t)=\dot{\alpha}(\ell,t)\underline{k}+\dot{\underline{\gamma}}(\ell,t)+\underline{\gamma}(\ell,t)\times\dot{\alpha}(\ell,t)\underline{k}.$$

Кроме того, используя вторую из формул (4), вычисляем второй вектор деформации $\underline{\Phi}(s,t)$

$$\underline{\Phi}(s,t)=\alpha'(s,t)\underline{k}+\underline{\gamma}'(s,t)+\alpha'(s,t)\,\underline{\gamma}(s,t)\times\underline{k}.$$

Линеаризуя второе из соотношений (2) по $\underline{\gamma}$, получаем

$$\underline{M}(s,t)=C_1\alpha'(s,t)\underline{k}+C_2\,\underline{\gamma}'(s,t)+C_1\alpha'(s,t)\,\underline{\gamma}(s,t)\times\underline{k}. \tag{13}$$

Аналогичное выражение получаем для вектора кинетического момента ротора

$$\underline{\underline{P}}\cdot\underline{\underline{\theta}}\cdot\underline{\underline{P}}^T\cdot\underline{\omega}=\theta_1\dot{\alpha}(\ell,t)\underline{k}+\theta_2\,\dot{\underline{\gamma}}(\ell,t)+\theta_1\dot{\alpha}(\ell,t)\,\underline{\gamma}(\ell,t)\times\underline{k}. \tag{14}$$

Выражения (13) и (14) можно упростить, если принять во внимание следующие соображения. Угол $\alpha=\varphi+\psi$ нельзя считать малым. Однако его можно представить в виде

$$\alpha(s,t) = \beta(t) + \delta(s,t) \Rightarrow \alpha'(s,t) = \delta'(s,t), \tag{15}$$

где угол $\delta(s,t)$, определяющий упругое закручивание стержня, наложенное на поворот $\beta(t)$, можно считать малым. Поэтому вместо (13) и (14) можно записать

$$\underline{M}(s,t) = C_1\, \delta'(s,t)\,\underline{k} + C_2\, \underline{\gamma}'(s,t), \tag{16}$$

$$\underline{\underline{P}} \cdot \underline{\underline{\theta}} \cdot \underline{\underline{P}}^T \cdot \underline{\omega} = \theta_1 \dot{\alpha}(\ell,t)\,\underline{k} + \theta_2\, \dot{\underline{\gamma}}(\ell,t) + \theta_1 \dot{\beta}(t)\, \underline{\gamma}(\ell,t) \times \underline{k}. \tag{17}$$

Можно показать, что деформациями растяжения и поперечного сдвига в данной задаче допустимо пренебречь. Тогда имеем

$$\underline{\varepsilon} = \underline{0}, \Rightarrow \underline{R}' = \underline{k} + \underline{\gamma} \times \underline{k}, \quad \underline{R} = s\underline{k} + \underline{w}, \quad \underline{w} \cdot \underline{k} = 0, \quad \underline{w}' = \underline{\gamma} \times \underline{k}. \tag{18}$$

Заметим, что случай $\underline{\varepsilon} \neq 0$ ничего интересного к рассматриваемому ниже случаю не добавляет. Уравнения движения (1) в линеаризованной форме имеют вид

$$\underline{N}' = \rho S \ddot{\underline{w}}, \quad \underline{M}' + \underline{k} \times \underline{N} = \underline{0}, \quad \underline{N} \cdot \underline{k} = 0. \tag{19}$$

Проецируя второе из этих уравнений на $\underline{k}$, получаем

$$\underline{M}(s,t) \cdot \underline{k} = const \Rightarrow \underline{M} \cdot \underline{k} = -M_{gb} = +\eta(\dot{\beta} - \omega_0). \tag{20}$$

Из (18) и (19) следует уравнение поперечных колебаний

$$C_2\, \underline{w}^{IV}(s,t) + \rho S\, \ddot{\underline{w}}(s,t) = \underline{0}. \tag{21}$$

Проецируя уравнение (8) на $\underline{k}$ и учитывая (15)-(17) и (20), получаем

$$\theta_1 \ddot{\beta} = \eta(\dot{\beta} - \omega_0) \Rightarrow \dot{\beta} = \omega_0 + (\dot{\beta}_0 - \omega_0)\exp(-\eta t/\theta_1), \tag{22}$$

где $\dot{\beta}_0$ – начальная скорость разгона.

Теперь мы в состоянии записать краевые условия для уравнения (21):

$$\underline{w}(0,t) = \underline{0}, \quad \underline{w}'(0,t) = \underline{0}, \quad \underline{w}(\ell,t) = \underline{0},$$

$$\theta_2\, \ddot{\underline{\gamma}}(\ell,t) + \theta_1 \dot{\beta}\, \dot{\underline{\gamma}}(\ell,t) \times \underline{k} + \theta_1 \eta(\dot{\beta} - \omega_0)\, \underline{\gamma}(\ell,t) \times \underline{k} = -C_2\, \underline{\gamma}'(\ell,t). \tag{23}$$

Последнее из этих условий вытекает из (8), (16), (17) и (22). Если бы это условие не содержало $\underline{\gamma}'(\ell,t)$, то все было бы просто, так как можно было бы найти вектор $\underline{\gamma}(\ell,t)$. В представленном виде задача (21), (23) решается не так просто. Обратим, однако, внимание на то, что она линейна. Так получилось только потому, что задача сформулирована через малый вращающийся вектор нутации $\underline{\gamma}$. Если бы мы попытались получить уравнение для малого угла нутации, то оно было бы нелинейным для сколь угодно малых ϑ.

<u>Вывод основного (разрешающего) уравнения</u>. Основная трудность в решении задачи (21), (23) заключается в том, что она не допускает разделения переменных, так как в последнем из условий (23) коэффициенты зависят от времени. Если $\dot{\beta}=\omega_0$, т.е. если рассматривается установившийся режим, то в принципе задачу можно решить методом Фурье, но получающаяся спектральная задача нами должным образом еще не проанализирована. Поэтому ниже излагается другой подход к решению, сводящий задачу к интегродифференциальному уравнению.

Рассмотрим сначала вспомогательную задачу для уравнения (21) с краевыми условиями

$$\underline{w}(0,t)=\underline{0},\quad \underline{w}'(0,t)=\underline{0},\quad \underline{w}(\ell,t)=\underline{0},\quad \underline{w}'(\ell,t)=\underline{a}(t), \tag{24}$$

где $\underline{a}(t)$ считается заданной функцией времени.

Решение задачи (21), (24) будем искать в виде

$$\underline{w}(s,t)=\underline{v}(s,t)-\underline{a}(t)\,s^2(\ell-s)/\ell^2. \tag{25}$$

Тогда для функции $\underline{v}(s,t)$ получаем неоднородное уравнение с однородными граничными условиями

$$C_2\underline{v}^{IV}+\rho S\ddot{\underline{v}}=\rho S\ddot{\underline{a}}\,s^2(\ell-s)/\ell^2, \tag{26}$$

$$\underline{v}(0,t)=\underline{0},\quad \underline{v}'(0,t)=\underline{0},\quad \underline{v}(\ell,t)=\underline{0},\quad \underline{v}'(\ell,t)=\underline{0}. \tag{27}$$

Решение задачи (26), (27) будем искать в виде ряда по собственным функциям для защемленной балки

$$\underline{v}(s,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\underline{f}_k(t)\,v_k(s), \tag{28}$$

где

$$v_k^{IV}-\lambda_k^4 v_k=0,\quad v_k(0)=v_k(\ell)=0,\quad v_k'(0)=v_k'(\ell)=0. \tag{29}$$

Решения спектральной задачи (29) хорошо известны [4]:

$$v_k=A_k\left[\operatorname{ch}\lambda_k s-\cos\lambda_k s-n_k\left(\operatorname{sh}\lambda_k s-\sin\lambda_k s\right)\right],\quad n_k=\frac{\operatorname{ch}\lambda_k\ell-\cos\lambda_k\ell}{\operatorname{sh}\lambda_k\ell-\sin\lambda_k\ell}.$$

Здесь с достаточной точностью можно принять

$$A_k = 1/\sqrt{\ell},\quad n_k = 1,\quad \lambda_k = (2k+1)\pi/2\ell,\quad V_k''(\ell) = 2\lambda_k^2(-1)^{k+1}/\sqrt{\ell}.$$

Для функций $\underline{\mathfrak{F}}_k(t)$ из (26) получаем уравнения

$$\ddot{\underline{\mathfrak{F}}}_k(t) + \sigma_k^2 \underline{\mathfrak{F}}_k(t) = \underline{q}_k(t),\quad \sigma_k^2 \equiv C_2\lambda_k^4/\rho S,\quad \underline{q}_k(t) = \ddot{\underline{a}}\, V_k''(\ell)/\lambda_k^4. \tag{30}$$

Решение уравнения (30) имеет вид

$$\underline{\mathfrak{F}}_k(t) = \underline{C}_k \cos\sigma_k t + \underline{\mathfrak{D}}_k \sin\sigma_k t + \sigma_k^{-1}\int_0^t \underline{q}_k(\tau)\sin(\sigma_k(t-\tau))\,d\tau, \tag{31}$$

где $\underline{C}_k$, $\underline{\mathfrak{D}}_k$ – постоянные векторы, определяемые по начальным условиям, налагаемым на функцию $\underline{w}(s,t)$. Подставляя (31) и (28) и проводя преобразования, получаем

$$\underline{V}(s,t) = \underline{\tilde{V}}(s,t) + \int_0^t \ddot{\underline{a}}(\tau)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{V_k''(\ell)}{\lambda_k^4}\,\frac{\sin\sigma_k(t-\tau)}{\sigma_k}\,V_k(s)\,d\tau, \tag{32}$$

где

$$\underline{\tilde{V}}(s,t) \equiv \sum_{k=1}^{\infty}\left(\underline{C}_k\cos\sigma_k t + \underline{\mathfrak{D}}_k\sin\sigma_k t\right)V_k(s). \tag{33}$$

Таким образом, какова бы ни была функция $\underline{a}(t)$, мы можем найти по (32) и (25) функцию $\underline{w}(s,t)$, удовлетворяющую первым трем условиям из (23). Четвертое условие из (23) дает уравнение для определения функции $\underline{a}(t)$, которое имеет вид

$$\begin{aligned} &\theta_2\ddot{\underline{a}}(t) + \theta_1\dot{\beta}\,\dot{\underline{a}}\times\underline{k} + \theta_1\eta(\dot{\beta}-\omega_0)\,\underline{a}\times\underline{k} + C_2\frac{4}{\ell}\,\underline{a} + \\ &+ C_2\int_0^t \ddot{\underline{a}}(\tau)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{[V_k''(\ell)]^2}{\lambda_k^4}\,\frac{\sin\sigma_k(t-\tau)}{\sigma_k}\,d\tau = -C_2\underline{\tilde{V}}''(\ell,t). \end{aligned} \tag{34}$$

В правой части этого уравнения стоит известная функция времени, если заданы начальные условия для функций $\underline{w}(s,t)$ и $\dot{\underline{w}}(s,t)$, в которые, конечно, входят и начальные значения $\underline{a}(0)$ и $\dot{\underline{a}}(0)$, но они также известны. Уравнение (34) будем называть основным или разрешающим. В общем случае оно достаточно сложное, ибо это интегродифференциальное уравнение с переменными коэффициентами (из-за наличия функции $\dot{\beta}(t)$, определяемой формулой (22)). Для безынерционного стержня оно значительно упрощается и имеет вид

$$\theta_2\ddot{\underline{a}} + \theta_1\dot{\beta}\,\dot{\underline{a}}\times\underline{k} + \theta_1\eta(\dot{\beta}-\omega_0)\,\underline{a}\times\underline{k} + \frac{4}{\ell}C_2\underline{a} = \underline{0}.$$

Это уже обыкновенное дифференциальное уравнение, решаемое стандартными методами. Наличие интегрального члена в (34) показывает, что реакция стержня из-за происходящих в нем волновых процессов определяется не всей его длиной, а некоей частью длины, зависящей от рассматриваемого момента времени. Отдельного пояснения требует смысл правой части уравнения (34). Это не что иное, как момент, действующий на ротор и порожденный свободными колебаниями стержня, определяемыми начальными условиями. Примем, например, следующие начальные условия:

$$\underline{w}(s,0) = -\underline{a}(0)\, s^2(\ell - s)/\ell^2, \quad \underline{\dot w}(s,0) = -\underline{\dot a}(0)\, s^2(\ell - s)/\ell^2. \tag{35}$$

В этом случае начальные условия для функций $\underline{V}(s,t)$ и $\underline{\tilde V}(s,t)$ будут нулевыми, как это видно из (25), (32) и (33), и коэффициенты $\underline{C}_k$ и $\underline{D}_k$ в (33) будут равны нулю. Следовательно, и правая часть в (34) равна нулю. Для начальных условий, отличных от (35), правая часть в (34) будет присутствовать.

<u>Упрощение разрешающего уравнения</u>. Уравнение (34) можно переписать в операторном виде

$$\underline{\underline{L}} \cdot \underline{a}(t) + C_2 \int_0^t K(t-\tau)\, \underline{\ddot a}(\tau)\, d\tau = -C_2\, \underline{\tilde V}''(\ell,t), \tag{36}$$

где

$$\underline{\underline{L}} = \left(\theta_2 \frac{d^2}{dt^2} + \frac{1}{\ell} C_2\right)\underline{\underline{E}} - \left[\theta_1 \dot p \frac{d}{dt} + \theta_1 \eta(\dot p - \omega_0)\right]\underline{k} \times \underline{\underline{E}}, \tag{37}$$

$$K(t-\tau) = \frac{d^2}{d\tau^2} F(t-\tau), \quad F(t-\tau) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{[V_k''(\ell)]^2}{\lambda_k^4} \frac{\sin \sigma_k (t-\tau)}{\sigma_k^3} \tag{38}$$

Теперь интегральный оператор в (36) можно переписать следующим образом:

$$\int_0^t \underline{\ddot a}(\tau) K(t-\tau)\, d\tau = +d\,\underline{\ddot a}(t) + \int_0^t \frac{d^4 \underline{a}(\tau)}{d\tau^4} F(t-\tau)\, d\tau - \underline{\ddot a}(0) \left.\frac{dF(t-\tau)}{d\tau}\right|_{\tau=0} +$$
$$+ \underline{\dddot a}(0) F(t), \quad d = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[V_k''(\ell)]^2}{\lambda_k^4} \frac{1}{\sigma_k^2}.$$

Подставляя (38) в (36), получаем

$$\underline{\underline{L}}_* \cdot \underline{a} + C_2 \int_0^t \frac{d^4 \underline{a}(\tau)}{d\tau^4} F(t-\tau)\, d\tau = \underline{f}(t), \tag{39}$$

где $\underline{f}(t)$ – известная функция времени, но в нее входят постоянные

$\ddot{\underline{a}}(0)$ и $\dddot{\underline{a}}(0)$, которые должны быть найдены по (36): $\ddot{\underline{a}}(0)$ находится сразу из (36), а $\dddot{\underline{a}}(0)$ после дифференцирования (36) по времени и принятия $t = 0$. Оператор $\underline{\underline{L}}_*$ получается из $\underline{\underline{L}}$ заменой в (37) момента инерции θ_2 на величину $\theta_{2*} = \theta_2 + dC_2$, где d определено формулой (38). Переход от (36) к (39) является точным. Теперь заметим, что ряд (38) сходится очень быстро, ибо $\sigma_k^3 \sim (2k+1)^6$. Поэтому уравнение (39) можно переписать в упрощенном виде

$$\underline{\underline{L}}_* \cdot \underline{a} - C \int_0^t \frac{d^4 \underline{a}(\tau)}{d\tau^4} \sin \sigma_1 (t-\tau)\, d\tau = \underline{f}(t), \tag{40}$$

где

$$C = C_2 \left[v_1''(\ell) \right]^2 / \lambda_1^4 \sigma_1^3,$$

причем величина C в определенном смысле мала, так что интегральный член в (40) вообще можно отбросить.

Получим уравнение

$$(\theta_2 + dC_2)\, \ddot{\underline{a}} - \theta_1 \dot{\beta}\, \underline{k} \times \dot{\underline{a}} - \theta_1 \eta (\dot{\beta} - \omega_0)\, \underline{k} \times \dot{\underline{a}} + \frac{4}{\ell} C_2 \underline{a} = \underline{f}(t). \tag{41}$$

При желании (41) можно уточнить. Для этого нужно исключить интегральное слагаемое из (39), что осуществляется следующим образом. Пусть дана функция

$$\underline{b}(t) = \int_0^t \underline{c}(\tau) \sin \sigma_1 (t-\tau)\, d\tau.$$

Дифференцируя обе части этого равенства по t дважды, получаем

$$\ddot{\underline{b}}(t) = \sigma_1\, \underline{c}(t) - \sigma_1^2\, \underline{b}(t). \tag{42}$$

Дифференцируя (40) по времени дважды и исключая из получившегося уравнения вторую производную от интегрального члена с помощью (42), а затем исключая из результата сам интегральный член с помощью (40), получаем уравнение четвертого порядка для вектора $\underline{a}(t)$. Мы не будем выписывать уравнения, так как его анализ выходит за рамки данной работы. Заметим, что уравнение (40) часто является вполне приемлемым не столько в силу малости коэффициента C при интегральном операторе, сколько из-за того, что под интегралом стоит быстроменяющаяся во времени функция, так как σ_1 является большим числом. Мы сейчас не будем указывать точный смысл этих высказываний, так как для этого нужно предварительно дать оценку для вектора $\underline{a}(t)$. С этой целью упростим (4I) еще больше. А именно, при больших t величина $\dot{\beta}$ быстро стремится к ω_0. Поэтому для установившихся вращений вместо (4I) можно рассматривать уравнение

$$(\theta_2 + d\, C_2)\ddot{\underline{a}} - \theta_1 \omega_0 \underline{k} \times \dot{\underline{a}} + \frac{4}{\ell} C_2 \underline{a} = \underline{f}(t). \qquad (43)$$

Это уже совсем простое уравнение с постоянными коэффициентами, решение которого строится без труда. Частные решения однородного уравнения (43) ищем в виде

$$\underline{a} = \underline{\underline{Q}}(pt\underline{k}) \cdot \underline{m}, \quad \underline{m} \cdot \underline{k} = 0, \quad \underline{m} = const.$$

Отсюда имеем

$$\dot{\underline{a}} = p\underline{k} \times \underline{a}, \quad \ddot{\underline{a}} = -p^2 \underline{a}.$$

Подставляя эти выражения в (43) при $\underline{f}(t) \equiv \underline{0}$, получаем характеристическое уравнение для нахождения p.

$$-(\theta_2 + C_2 d)p^2 + \theta_1 \omega_0 p + \frac{4}{\ell} C_2 = 0.$$

Отсюда получаем два значения p:

$$p_{1,2} = \frac{+\theta_1 \omega_0 \pm \sqrt{\theta_1^2 \omega_0^2 + 16(\theta_2 + d C_2) C_2/\ell}}{2(\theta_2 + C_2 d)}.$$

Общее решение уравнения (43) находится методом вариации произвольных постоянных и имеет вид

$$\underline{a}(t) = \underline{\underline{Q}}(p_1 t \underline{k}) \cdot \underline{m}_1 + \underline{\underline{Q}}(p_2 t \underline{k}) \cdot \underline{m}_2 + \frac{1}{p_2 - p_1} \int_0^t \Big[\underline{\underline{Q}}(p_2(t-\tau)\underline{k}) -$$

$$- \underline{\underline{Q}}(p_1(t-\tau)\underline{k})\Big] \cdot (\underline{f}(\tau) \times \underline{k})\, d\tau.$$

Постоянные векторы $\underline{m}_1$ и $\underline{m}_2$ находятся из начальных условий.

<u>Определение углов прецессии и собственного вращения</u>. После того как найден вращающийся вектор нутации $\underline{\gamma}(s,t)$, необходимо найти углы нутации $\vartheta(s,t)$ и прецессии. Покажем, как это делается только для величин $\vartheta(\ell,t)$ и $\psi(\ell,t)$, т.е. для углов нутации и прецессии ротора.

Согласно (I8) и (I2) имеем

$$\underline{\gamma}(\ell,t)=\underline{k}\times\underline{w}'(\ell,t)=\underline{k}\times\underline{a}(t)=\underline{\underline{Q}}(\psi\underline{k})\cdot\vartheta\underline{i}.$$

Отсюда можно найти $\psi(\ell,t)$ и $\vartheta(\ell,t)$, если известен $\underline{a}$. В самом деле,

$$\underline{k}\times\underline{a}(t)=\vartheta[\cos\psi\,\underline{i}+\sin\psi\,\underline{j}],\quad \underline{j}=\underline{k}\times\underline{i}.$$

Отсюда получаем равенства

$$\vartheta\cos\psi=-\underline{a}\cdot\underline{j},\quad \vartheta\sin\psi=\underline{a}\cdot\underline{i}$$

или

$$\vartheta(\ell,t)=\underline{a}\cdot(\underline{i}\sin\psi-\underline{j}\cos\psi),$$

$$tg\,\psi(\ell,t)=-(\underline{a}\cdot\underline{i})/(\underline{a}\cdot\underline{j}).$$

Угол собственного вращения находится по соотношению (I5), если в нем отбросить упругое закручивание

$$\varphi(\ell,t)=\beta(t)-\psi(\ell,t).$$

Нетрудно найти и величины $\psi(s,t)$, $\vartheta(s,t)$ и $\varphi(s,t)$. Но они не представляют практического интереса.

Заключение. Выше показана схема решения задачи о вращении твердого тела на инерционном стержне. К сожалению, полный анализ включает много частных случаев и выходит за рамки данной работы. Здесь мы хотели показать только принципиальную сторону проблемы, причем в ее математическом, а не инженерном аспекте. Последний требует как минимум учета двух дополнительных факторов: внешнего трения и неуравновешенности ротора. В принципе оба эти фактора не меняют схемы решения, но значительно увеличивают объем вычислений. Тем не менее даже с учетом этих факторов задача практически до конца решается в аналитическом виде и приводит к сравнительно простым конечным формулам. Исключение составляет рассмотрение режима разгона. Здесь, к сожалению, можно рассчитывать только на численное решение.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лурье А.И. Аналитическая механика. М.: ГИФМЛ, 1961. 824 с.
2. Жилин П.А., Голоскоков Д.П. Общая нелинейная теория упругих стержней с приложением к описанию эффекта Пойнтинга. Деп. ВИНИТИ, № 1912-В87, Л., 1987, 20 с. РЖ, 16, № 7, 1987, 7В 1250.
3. Жилин П.А. Тензор поворота в описании кинематики твердого тела // Труды СПбГТУ. 1992. № 443. С. 100-121.
4. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972. 735 с.

О.П.Жилина, Ле Суан Ань, Тхан Тьи Ань

АНАЛИЗ ДВИЖЕНИЯ ИСПОЛНИТЕЛЬНОГО МЕХАНИЗМА ШЛИФОВАЛЬНОЙ МАШИНЫ

Исследуется движение заготовки относительно шлифовального круга универсальной шлифовальной машины Тхан Тьи Аня при учете сил кулонова трения между заготовкой и шлифовальным кругом*.

Вывод уравнения движения. Рассматривается механическая система из круга 1 радиуса a_1 и блока заготовки 2 с радиусом a_2, который может вращаться вокруг неподвижной точки O_2. К блоку заготовки приложена вертикальная сила P (см. рисунок). Считается, что контакт между кругом 1 и заготовкой происходит по всей поверхности блока 2.

Рассмотрим произвольную точку контакта T. Положение точки T относительно центра O_1 задается радиус-вектором $\underline{r}_1$, а относительно центра O_2 радиус-вектором $\underline{r}_2$

$$r_1 = \overrightarrow{O_1T}, \quad r_2 = \overrightarrow{O_2T}.$$

Скорости движения этих точек определяются формулами

$$\underline{v}_1 = \underline{\omega}_1 \times \underline{r}_1, \quad \underline{v}_2 = \underline{\omega}_2 \times \underline{r}_2.$$

Здесь $\underline{\omega}_1$ и $\underline{\omega}_2$ - векторы угловых скоростей круга 1 и блока 2. Следовательно, относительная скорость заготовки в точке T равна

$$\underline{v}_T = \underline{v}_1 - \underline{v}_2 = \underline{\omega}_1 \times \underline{r}_1 - \underline{\omega}_2 \times \underline{r}_2. \tag{1}$$

---

*Тхан Тьи Ань. Исследование свойств и резонансных пьезоэлектрических взаимодействий во вьетнамских природных кварцевых кристаллах. Дис. ...канд.физ.-мат.наук /СПбГТУ. СПб., 1995.