

# МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ НЕУПРУГИХ СРЕД\*

*П.А. Жилин*

Институт проблем машиноведения РАН,  
Санкт-Петербургский государственный политехнический университет  
E-mail: zhilin@mail.admiral.ru

УДК 539.3

*В настоящее время построение теории нелинейно-упругих сред практически завершено, а нерешенные проблемы связаны с неупругими материалами. Целью данной работы является попытка очертить общие контуры теории неупругих материалов, которая, по крайней мере, не исключала бы возможность описания известных экспериментальных фактов. Особое внимание уделяется ясному введению основных понятий. Новизна предлагаемой теории в следующем. Используется пространственное описание. Фундаментальные законы формулируются для открытых систем. Дается новая трактовка уравнения баланса энергии, причем энтропия и химический потенциал вводятся посредством чисто механических аргументов. Сухое трение между частицами среды вводится через антисимметричную часть тензора силовых напряжений. Внутренняя энергия задается в форме, одновременно пригодной для газообразных, жидких и твердых тел. При этом фазовые переходы в среде описываются без привлечения каких-либо дополнительных условий.*

## ВВЕДЕНИЕ

### **О явлениях первого и второго рода**

Явления, которые изучаются в механике деформируемого твердого тела, можно разделить на два обширных и принципиально различных класса или рода. К первому роду относятся явления, которые можно изучать на основе понятия материала, которое с математической точки зрения почти тождественно понятию гладкого дифференцируемого многообразия. Нестрого выражаясь, к первому роду относятся явления, при изучении которых допустимо считать, что соседние частицы материала остаются соседями в течение всего

\* Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 02~01~00514).

исследуемого процесса. В качестве классических примеров здесь можно указать на теорию нелинейно-упругих материалов, континуальную теорию дислокаций, теорию неупругих материалов, основанную на реологических моделях [1, 2], ряд теорий пластичности\* [3], теории микрополярных сред и др. Иными словами, к первому роду относятся те явления, которые могут быть исследованы на основе так называемого материального (лагранжева) описания. При описании явлений первого рода широко используются такие понятия как материал, отсчетная конфигурация, меры деформации, материальные линии, поверхности и объемы. Фундаментальные законы записываются применительно к материальным объемам. Уравнения состояния, определяющие свойства материала, постулируются для бесконечно малой части материала, и считается, что свойства среды в целом вполне определяются поведением ее бесконечно малых частей. С формальной точки зрения теория явлений первого рода является достаточно строгой и логически непротиворечивой. С прикладной точки зрения теория явлений первого рода позволяет удовлетворить великое множество практических потребностей. Тем не менее, существуют другие явления, которые невозможно отнести к первому роду.

Ко второму роду относятся явления, в которых ярко проявляется дискретное строение твердых тел. Отметим некоторые из них. (Самым известным из явлений второго рода является, конечно, турбулентность в жидкости.) Ниже обсуждаются, главным образом, твердые тела. Многие вещества имеют кристаллическое строение, структура которого хорошо известна. Многие явления, которые имеют место в сформировавшихся кристаллических телах, часто могут быть отнесены к первому роду. Однако процесс рождения кристаллической решетки до сих пор не описан удовлетворительным образом и относится к явлениям второго рода. Аналогично обстоит дело с теорией трещин в материале: описаны процессы роста трещин, но не их возникновения. К явлениям второго рода относятся процессы фрагментации материала, возникновения линий Людерса, некогерентных фазовых переходов в материалах\*\* и многие другие явления. Нельзя описать как явление первого рода и такой хорошо экспериментально изученный процесс, как сильное (многократное) растяжение образца, при котором свободная поверхность растянутого образца включает частицы, которые до деформации были внутри образца. Во всех этих примерах материал нельзя моделировать гладким дифференцируемым многообразием и, как следствие, теряют смысл понятия отсчетной конфигурации, материальных линий и объемов. Некоторые экспериментально установленные факты, относящиеся к явлениям второго рода, будут описаны ниже.

Теория явлений второго рода, происходящих в твердых телах, почти не разработана и имеет ряд существенных особенностей [5, 6], которые порождаются невозможностью использования концепции материала. Перечислим некоторые особенности, которые по необходимости должны быть присущи любой теории явлений второго рода. *Первая.* Вместо материального описа-

\* Критику существующих подходов к построению теорий пластичности и описание некоторых из возникающих здесь проблем можно найти в работе [4].

\*\* Когерентные фазовые переходы, происходящие без разрывов поля перемещений, можно отнести к явлениям первого рода.

ния необходимо использовать пространственное (эйлерово) описание\*. В частности, все используемые операторы должны быть определены в пространстве, т.е. в системе отсчета, а не в материале. *Вторая.* Фундаментальные законы необходимо формулировать для тел переменного состава, т.е. для открытых систем, ибо в данной области пространства в разные моменты времени находятся разные частицы тела. *Третья.* Необходимо строго различать понятия плотности частиц в данной точке пространства и плотности массы, ибо, например, проницаемость тел обусловлена плотностью частиц, а внутренние взаимодействия обусловлены плотностью массы. В теории явлений первого рода эти две плотности выражаются одна через другую и не являются независимыми функциями. *Четвертая.* Существенно возрастает роль уравнения баланса энергии, поскольку без вытекающего из него приведенного уравнения баланса энергии невозможно корректно определить понятия мер деформации, энтропии и химического потенциала. Кроме того, например, радиационное облучение попадает существенным образом в законы механики только через уравнение баланса энергии, а его влияние на законы динамики мало. *Пятая.* Необходимо строго различать аддитивность по массе и аддитивность по телам. Например, кинетическая энергия тела аддитивна по массе этого тела, в то время как внутренняя энергия тела аддитивна по телам, составляющим рассматриваемое тело, но, вообще говоря, не является аддитивной функцией массы. *Шестая.* Тензоры силовых и моментных напряжений должны быть определены в пространстве, а не в материале. Именно так обстоит дело в гидромеханике, где давления и массовые плотности заданы в данной точке системы отсчета и непосредственно не привязаны к каким-либо конкретным частицам жидкости. Так называемое радиационное давление, возникающее при испарении твердых тел, также невозможно связать с какими-либо частицами среды.

### **Неупругость: важнейшие экспериментальные факты**

Поведение твердых тел под нагрузкой изучается в течение нескольких столетий. Достаточно вспомнить знаменитый закон Гука. Однако целенаправленные исследования начались в XIX веке и продолжают по настоящее время. Накоплен поистине огромный материал [7, 8], который существенно используется при формулировке практических (эмпирических) правил и нормативных документов для инженерных и конструкторских проектов, но оказывает, к сожалению, на удивление слабое влияние на теоретические исследования. К сожалению, многие давно установленные экспериментальные факты до сих пор не только не описываются существующими теориями, но и вообще не обсуждается специалистами, занимающимися построениями теорий, описывающих поведение неупругих материалов при внешних воздействиях. Ниже указаны некоторые из таких фактов.

\* Во многих книгах эйлеровым называют материальное описание, при котором в качестве отсчетной конфигурации выбирается конфигурация в актуальный момент времени. Эйлерово описание этого типа не является пространственным описанием.

**Первый.** При достаточно высоких давлениях все материалы испытывают необратимые деформации, которые можно назвать фазовыми переходами. Газ под давлением можно превратить в жидкость, которая при повышении давления превращается в твердое тело. Последнее, в свою очередь, при повышении давления испытывает цепочку превращений, сопровождающихся заметным изменением его механических свойств. Даже при медленных нагружениях все эти превращения происходят скачком, т.е. в результате очень быстрых динамических процессов, называемых фазовыми переходами, скорость которых обусловлена свойствами материала, а не скоростью изменения внешних нагрузок.

**Второй.** При достаточно высоких давлениях все твердые тела обретают свойство текучести. Впервые этот факт был установлен А. Треска (см. [8]) и впоследствии был многократно подтвержден многими авторами. Наиболее полными здесь считаются опыты П.У. Бриджмена. Указанный факт не следует смешивать с явлением скольжения.

**Третий.** Существует характеристика материала, выражающая максимальное касательное напряжение, при котором — независимо от типа опыта — твердое тело испытывает необратимые пластические деформации. Этот факт был установлен А. Треска, но он его дополнил экспериментально не доказанным утверждением о том, что при пластической деформации максимальное касательное напряжение сохраняет постоянное значение. Это утверждение принято называть условием текучести, и именно оно было принято Б. де Сен-Венаном при построении первой теории пластичности. В дальнейшем условие текучести в различных модификациях использовалось в большинстве вариантов теории пластичности. На самом деле условие текучести не только не доказано экспериментально, но, напротив, экспериментально показано, что оно никогда не выполняется. Например, эксперименты А. Треска и, особенно, Бриджмена [8] показывают, что материал именно течет подобно жидкости. При этом никаких зон застоя материала не наблюдается. Теоретическое решение одной из задач такого рода по теории, основанной на критерии текучести (см. [9], с. 218) показывает наличие зон застоя. Иными словами, налицо серьезное качественное расхождение теории и эксперимента.

**Четвертый.** Эксперименты по определению диаграмм  $\sigma - \epsilon$  показывают существенное влияние масштабного фактора. Например, при растяжении круглого образца с начальной площадью сечения  $S$  силой  $P$  снимается диаграмма  $P/S - \epsilon$ . Затем берется образец из того же материала, но с уменьшенной вдвое площадью поперечного сечения и вновь снимается диаграмма  $P/S - \epsilon$ . Она пройдет заметно выше, чем в первом случае. Этот процесс можно повторить. Диаграммы показывают, что чем тоньше образец, тем выше оказывается предел упругости. Хотя масштабный фактор известен всем, тем не менее, его природа никак не обсуждается и не учитывается при построении теории. Между тем, масштабный фактор показывает, что определяющие уравнения заведомо не могут быть сформулированы для "тела-точки" из данного материала, но должны учитывать наличие всех других "тел-точек". Кроме того, этот факт показывает неправильность мнения, что определяемая в эксперименте

диаграмма  $P/S-\varepsilon$  является неким прообразом определяющего уравнения  $\sigma - \varepsilon$ . Например, рассмотрим растяжение полосы из полулинейного материала, т.е. задачу Клингбейла и Шилда [10]. В этом случае, определяющее уравнение, т.е. диаграмма  $\sigma - \varepsilon$ , грубо говоря, линейна, но диаграмма  $P/S-\varepsilon$ , вычисленная на основе точного решения задачи для линейной диаграммы  $\sigma - \varepsilon$ , существенно нелинейна и имеет точки минимума и максимума.

**Пятый.** Во всех экспериментах с мягким нагружением отчетливо проявляется эффект Савара~Массона (Портвена~Ле Шателье) [7], который заключается в следующем. На диаграмме растяжения наблюдается многократно повторяющееся чередование участков упругости и течения. Причем на участках течения процесс носит ярко выраженный динамический характер и происходит со скоростью, определяемой самим материалом, а не условиями эксперимента.

**Шестой.** Наблюдался следующий факт. Брался образец из некоего материала и из него вырезался относительно небольшой контрольный объем. Методами рентгено-структурного анализа определялись его характеристики и, грубо говоря, подсчитывалось число частиц, входящих в этот контрольный объем. Затем, аналогичный образец из того же материала растягивался в несколько раз, т.е. образец подвергался большому пластическому деформированию. После чего из этого деформированного образца вырезался точно такой же контрольный объем, как и в первом случае. Для него проводились те же самые анализы. Результат: оба контрольных объема оказались практически идентичными. Это означает, что при пластическом деформировании теряют смысл понятия материальных линий, поверхностей, объемов, отсчетной и актуальной конфигураций, а также традиционно вводимых мер деформаций.

**Седьмой.** При растяжении металлических образцов отчетливо наблюдается наличие так называемой шейки. Это явление до сих пор не объяснено теоретически.

Разумеется, можно указать еще много важных экспериментально установленных и теоретически не объясненных фактов. Перечисленные выше факты важны потому, что они наблюдаются практически во всех экспериментах. Тем не менее, ни одна из существующих теорий неупругих материалов не описывает эти факты, за исключением, может быть, третьего из них. Любая вновь предлагаемая теория неупругого поведения материала должна принимать во внимание существование перечисленных выше экспериментальных фактов. По мнению автора, главным из них является эффект Савара~Массона.

### Цель данной работы

Построение теории неупругих материалов, отражающей все многообразие наблюдаемых фактов и пригодной для описания современных технологических процессов, в настоящее время кажется неразрешимой задачей. В ближайшей перспективе основная нагрузка по решению возникающих практических

проблем будет лежать на разнообразных методах компьютерного моделирования, включая методы так называемой молекулярной динамики. Компьютерное моделирование поведения твердых тел под нагрузкой интенсивно развивается и уже достигло впечатляющих успехов. Тем не менее, кажется очевидным, что нельзя оставлять попытки построения математической теории неупругости методами механики сплошных сред. Цель данной работы состоит в том, чтобы очертить контуры общего подхода к построению теории неупругих сред. При этом главное внимание обращается на ясное введение основных понятий: мер деформации, внутренней энергии, температуры, энтропии и химического потенциала. Все они широко применяются, но, по существу, не определяются. Между тем, относительно строгие определения этих понятий являются необходимыми, особенно при их использовании в неясных заранее ситуациях. Основное желание автора состояло в том, чтобы показать общую структуру теории неупругих тел. В частности, в работе представлен вид внутренней энергии тел, в которых могут происходить фазовые переходы газ~жидкость~твердое тело, причем включаются несколько твердотельных фазовых переходов. Уравнения такого типа ранее в литературе не обсуждались.

## 1. МАТЕРИАЛЬНАЯ ПРОИЗВОДНАЯ И КИНЕМАТИКА

Как уже отмечалось в первом разделе, сплошную среду при неупругом деформировании нельзя моделировать гладким дифференцируемым многообразием, ее необходимо описывать на основе пространственного описания. Для этого понадобится понятие материальной производной. При пространственном описании важную роль играет поле скоростей  $\mathbf{V}(\mathbf{x}, t)$ , где вектор  $\mathbf{x}$  задает точку системы отсчета, называемую точкой наблюдения. Тогда вектор  $\mathbf{V}(\mathbf{x}, t)$  определяет скорость той частицы среды, которая в данный момент времени  $t$  находится в точке  $\mathbf{x}$ . В качестве точки наблюдения можно выбрать точку  $\mathbf{y}(t)$ , движущуюся относительно системы отсчета по заданному закону. Введение подвижной точки наблюдения оказывается необходимым, например, при замене системы отсчета. Пусть нам дано некоторое поле  $\mathbf{K}(\mathbf{y}(t), t)$ , которое может быть скаляром, вектором или тензором любого ранга. Оно описывает некую физическую характеристику частицы, находящейся в данное время в данной точке  $\mathbf{y}(t)$  системы отсчета.

**Определение.** Материальной производной свойства  $\mathbf{K}(\mathbf{y}(t), t)$  называется предел отношения

$$\frac{\delta}{\delta t} \mathbf{K}(\mathbf{y}(t), t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{K}(\mathbf{y}(t + \Delta t) + \Delta \mathbf{s}), t + \Delta t) - \mathbf{K}(\mathbf{y}(t), t)}{\Delta t} \quad (1.1)$$

где

$$\Delta \mathbf{s} = (\mathbf{V}(\mathbf{y}(t), t) - \frac{d\mathbf{y}(t)}{dt})\Delta t + O(\Delta t^2) \quad (1.2)$$

есть путь, пройденный частицей, которая в момент времени  $t$  находилась в точке  $\mathbf{y}(t)$ , за время  $\Delta t$ .

В правую часть равенства (1.2) входит скорость частицы относительно движущейся точки  $\mathbf{y}(t)$ . Числитель в (1.1) можно переписать в виде следующего разложения:

$$\mathbf{K}(\mathbf{y}(t + \Delta t) + \Delta \mathbf{s}, t + \Delta t) = \mathbf{K}(\mathbf{y}(t + \Delta t), t + \Delta t) + \Delta$$

Теперь из определения (1.1) следует

$$\frac{\delta}{\delta t} \mathbf{K}(\mathbf{y}(t), t) = \frac{d}{dt} \mathbf{K}(\mathbf{y}(t), t) + \left( \mathbf{V}(\mathbf{y}(t), t) - \frac{d\mathbf{y}(t)}{dt} \right). \quad (1.3)$$

Определение (1.3) не требует непрерывного распределения свойства  $\mathbf{K}(\mathbf{y}(t), t)$  в пространстве, поскольку в определение материальной производной входит не весь градиент, а только производная вдоль траектории, на которой поле  $\mathbf{K}(\mathbf{y}(t), t)$  непрерывно. Выражение для полной производной в правой части (1.3) можно раскрыть

$$\frac{d}{dt} \mathbf{K}(\mathbf{y}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{K}(\mathbf{y}, t) + \frac{d\mathbf{y}(t)}{dt} \cdot \nabla \mathbf{K}(\mathbf{y}, t)$$

и подставить в (1.3). В результате получим общепринятое определение материальной производной

$$\frac{\delta}{\delta t} \mathbf{K}(\mathbf{y}(t), t) = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{K}(\mathbf{y}(t), t) + \mathbf{V}(\mathbf{y}(t), t) \cdot \nabla \mathbf{K}(\mathbf{y}(t), t) \quad (1.4)$$

Из этого выражения хорошо видно, что материальную производную ни в коем случае нельзя смешивать с полной производной, как это часто встречается в литературе. Хотя выражения (1.3) и (1.4) полностью эквивалентны, при решении конкретных задач лучше пользоваться выражением (1.3), ибо оно содержит только объективные, т.е. не зависящие от выбора системы координат производные. В частности, при заменах системы отсчета или при использовании принципа инерции Галилея значительно проще использовать выражение (1.3). Определение материальной производной (1.3) и (1.4) было введено в работах [5, 6].

Для материальной производной справедливы все правила дифференцирования. Например,

$$\frac{\delta}{\delta t} (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) = \frac{\delta \mathbf{a}}{\delta t} \otimes \mathbf{b} + \mathbf{a} \otimes \frac{\delta \mathbf{b}}{\delta t}.$$

С другой стороны, известно, что оператор полного дифференцирования по времени и оператор-градиент перестановочны. Для материальной производной, как видно из определения, это не верно

$$\frac{d}{dt} \nabla = \nabla \frac{d}{dt}, \quad \frac{\delta}{\delta t} \nabla \neq \nabla \frac{\delta}{\delta t}.$$

Обратимся к рассмотрению некоторых кинематических соотношений, которые понадобятся нам в дальнейшем. Примем, что  $\mathbf{K}(\mathbf{x}(t), t) = \mathbf{P}(\mathbf{x}(t), t)$ , где  $\mathbf{P}(\mathbf{x}(t), t)$  есть тензор поворота частицы, находящейся в точке  $\mathbf{x}(t)$  в момент

времени  $t$ . Как найти ее угловую скорость? Обычно угловая скорость определяется с помощью уравнения Пуассона [11]

$$\frac{d}{dt} \mathbf{P}(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t) \times \mathbf{P}(\mathbf{x}, t). \quad (1.5)$$

Понятно, что это определение непригодно для наших целей, ибо в разные моменты времени в данной точке  $\mathbf{x}$  системы отсчета находятся разные частицы. Поэтому необходима следующая модификация уравнения Пуассона:

$$\frac{\delta}{\delta t} \mathbf{P}(\mathbf{y}(t), t) = \boldsymbol{\omega}(\mathbf{y}(t), t) \times \mathbf{P}(\mathbf{y}(t), t). \quad (1.6)$$

Если в качестве точки наблюдения выбрать положение рассматриваемой частицы, то выражение (1.6) переходит в определение (1.5), откуда видно, что угловая скорость частицы не зависит от ее трансляционной скорости.

В системе отсчета введем оператор-градиент. Пусть  $q^s$  суть произвольные криволинейные координаты в системе отсчета. Они могут меняться во времени по заданному закону и никак не связаны с частицами. Локальные базис и взаимный базис, а также оператор-градиент, определяются стандартными формулами [10]

$$\mathbf{g}_s = \frac{\partial \mathbf{x}(q^1, q^2, q^3)}{\partial q^s}, \quad \mathbf{g}^s \cdot \mathbf{g}_m = \delta_m^s, \quad \nabla \equiv \mathbf{g}^s \frac{\partial}{\partial q^s},$$

где вектор  $\mathbf{x}$  определяет точку системы отсчета; оператор-градиент определен в системе отсчета и никак не связан с наличием или отсутствием каких-либо частиц или материальной среды.

В дальнейшем нам понадобится градиент угловой скорости  $\nabla \boldsymbol{\omega}$ . Введем в рассмотрение тензор второго ранга  $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$  посредством уравнения

$$\frac{\partial}{\partial q^s} \mathbf{P} = \mathbf{F}_s \times \mathbf{P} \quad \Rightarrow \quad \nabla \mathbf{P} = \mathbf{F} \times \mathbf{P}, \quad \mathbf{F} = \mathbf{q}^s \otimes \mathbf{1} \quad (1.7)$$

Справедливы уравнения структуры Э. Картана [12]

$$\frac{\partial \mathbf{F}_s}{\partial q^m} - \frac{\partial \mathbf{F}_m}{\partial q^s} = \mathbf{F}_m \times \mathbf{F}_s. \quad (1.8)$$

Используя уравнение (1.8), после некоторых преобразований получаем

$$\nabla \otimes \boldsymbol{\omega} = \frac{\delta \mathbf{F}}{\delta t} + \mathbf{F} \times \boldsymbol{\omega} + \nabla \mathbf{V} \cdot \mathbf{F}. \quad (1.9)$$

Последнее равенство справедливо для любого вектора  $\mathbf{V}$  и будет использовано позднее. Пусть частица, которая в данный момент времени  $t$  находится в точке  $\mathbf{x}$ , в момент времени  $t_0 \leq t$  находилась в точке  $\mathbf{x}_0$ . Введем в рассмотрение вектор перемещений  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ , который переводит частицу из положения  $\mathbf{x}_0$  в точку  $\mathbf{x}$ . Имеем очевидное равенство

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta t} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) &\equiv \frac{d}{dt} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \\ &\Rightarrow \frac{d}{dt} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x}, t), \end{aligned} \quad (1.10)$$



где принято

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}, t) \equiv \mathbf{E} - \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \quad \det \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) > 0, \quad \nabla \times \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (1.11)$$

Важно подчеркнуть, что уравнение (1.10) служит для определения вектора перемещений по заданному тензору  $\mathbf{g}(\mathbf{x}, t)$ , удовлетворяющему последним двум условиям в (1.11). Таким образом, тензор  $\mathbf{g}(\mathbf{x}, t)$  является одной из искомым переменных. Вычисляя градиент от обеих частей второго из равенств (1.10) и учитывая перестановочность операторов градиента и полной производной по времени, получаем следующие равенства:

$$\frac{\delta}{\delta t} \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \nabla \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x}, t), \quad \nabla \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \left( \frac{\delta}{\delta t} \nabla \mathbf{u} \right)$$

Эти равенства можно найти в книге [2]. Последнее равенство можно переписать в эквивалентной форме

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) &= - \frac{\delta \mathbf{g}(\mathbf{x}, t)}{\delta t} \cdot \mathbf{g}^{-1}(\mathbf{x}, t) \Rightarrow \\ \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) &= - \frac{\delta \mathbf{g}(\mathbf{x}, t)}{\delta t} \cdot \cdot \mathbf{g}^{-1}(\mathbf{x}, t). \end{aligned} \quad (1.12)$$

Данное соотношение понадобится при записи приведенного уравнения баланса энергии.

## 2. УРАВНЕНИЯ БАЛАНСА ЧАСТИЦ И МАССЫ

Обратимся к рассмотрению закона сохранения частиц. Выберем некоторую инерциальную систему отсчета. Пусть  $Z$  есть данное множество односпиновых частиц. Пусть  $V$  есть некоторая фиксированная область в системе отсчета. В дальнейшем  $V$  будем называть контрольным объемом. Понятно, что контрольный объем нельзя смешивать с материальным объемом среды. Граница  $V$  есть замкнутая поверхность  $S = \partial V$ . Контрольный объем может двигаться с постоянной скоростью без изменения своей формы относительно системы отсчета. Пусть далее  $\eta(\mathbf{x}, t)dV$  есть число частиц в бесконечно малой окрестности точки  $\mathbf{x} \in V$  в актуальный момент времени  $t$

$$\eta(\mathbf{x}, t) \geq 0.$$

Можно вводить несколько различных плотностей частиц, если мы хотим учесть наличие в среде частиц разного сорта. Именно так и поступают при рассмотрении многокомпонентных сред. Чтобы не загромождать изложение техническими деталями, ограничимся однокомпонентной средой. Обобщения не вызывают затруднений. Используя стандартные рассуждения, записываем локальную форму закона сохранения частиц

$$\frac{d\eta(\mathbf{x}, t)}{dt} + \nabla \cdot [\eta(\mathbf{x}, t)(\mathbf{V} - \mathbf{V}_0)] = \chi(\mathbf{x}, t), \quad (2.1)$$

где функция  $\chi(\mathbf{x}, t)$  описывает скорость рождения частиц в данной точке и должна задаваться определяющим уравнением;  $\mathbf{V}_0$  — постоянная скорость движения контрольного объема.

С использованием материальной производной это уравнение принимает вид

$$\frac{\delta \eta}{\delta t} + \eta \nabla \cdot \mathbf{V} = \chi(\mathbf{x}, t) \quad \Rightarrow \quad \frac{\delta(\ln \eta)}{\delta t} + \nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{\chi}{\eta} \quad (2.2)$$

Этому уравнению можно придать другую форму. Для этого достаточно использовать уравнение (1.12) и вспомнить формулу

$$\mathbf{g}^{-1} = \frac{1}{I_3(\mathbf{g})} \left( \frac{\partial I_3(\mathbf{g})}{\partial \mathbf{g}} \right)^T, \quad I_3(\mathbf{g}) = \det(\mathbf{g}),$$

справедливую для любого невырожденного тензора. Тогда имеем

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \mathbf{g}^{-1}(\mathbf{x}, t) \cdot \frac{\delta \mathbf{g}(\mathbf{x}, t)}{\delta t} = \frac{1}{I_3(\mathbf{g})} \left( \frac{\partial I_3(\mathbf{g})}{\partial \mathbf{g}} \right)^T \cdot \delta \mathbf{g}$$

Теперь уравнение (2.2) принимает вид

$$\frac{\delta}{\delta t} \ln \left( \frac{\eta(\mathbf{x}, t)}{I_3(\mathbf{g})} \right) = \frac{\chi(\mathbf{x}, t)}{\eta(\mathbf{x}, t)}. \quad (2.3)$$

Введение функции распределения частиц, по существу, стирает грань между дискретными и сплошными средами, поскольку функцию распределения всегда можно выбрать достаточно гладкой или воспользоваться аппаратом теории обобщенных функций. Функции распределения частиц  $\eta$  можно дать другую интерпретацию, которая иногда оказывается проще для интуитивных рассуждений. Введем некую фиктивную величину  $v_0$ , характеризующую объем, занимаемый одной частицей. Тогда величина  $v_0 \eta dV$  есть объем, занимаемый частицами в бесконечно малой части  $dV$  контрольного объема  $V$ . Введем величину  $\eta_p$ , которую можно назвать пористостью среды, посредством формулы

$$dV - v_0 \eta dV = \eta_p dV \quad \Rightarrow \quad \eta_p = 1 - v_0 \eta.$$

Пористость среды однозначно связана с функцией распределения частиц, но для нее известно большее число экспериментальных данных. Наряду с плотностью частиц  $\eta(\mathbf{x}, t)$  введем неотрицательную функцию с  $\rho(\mathbf{x}, t)$ , называемую плотностью массы. Эти две функции в общем случае следует рассматривать как независимые, поскольку не все частицы среды обладают массой. Локальная форма закона сохранения массы имеет вид

$$\frac{d\rho(\mathbf{x}, t)}{dt} + \nabla \cdot [\rho(\mathbf{x}, t) (\mathbf{V} - \mathbf{V}_0)] = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\delta}{\delta t} \ln \left[ \right] \quad (2.4)$$

В отличие от уравнения (2.3) для плотности частиц, уравнение (2.4) выражает закон сохранения массы, которая не рождается и не уничтожается. В данной работе различие между плотностью частиц и плотностью массы

будет сохраняться и окажется важной при формулировке уравнения баланса энергии и вытекающих из него следствий. В частности, понадобится следующая комбинация уравнений (2.3) и (2.4):

$$\frac{\delta z}{\delta t} = -\frac{\chi(\mathbf{x}, t)}{\eta(\mathbf{x}, t)}, \quad z \equiv \ln \left[ \frac{\rho(\mathbf{x}, t)\eta_0(\mathbf{x}, t)}{\rho_0(\mathbf{x}, t)\eta(\mathbf{x}, t)} \right] \quad (2.5)$$

где  $\eta_0(\mathbf{x})$  и  $\rho_0(\mathbf{x})$  суть некие отсчетные распределения частиц и массы, например, начальные распределения.

Здесь и далее будем считать, что  $\mathbf{V}_0 = \mathbf{0}$ . Учет движения контрольного объема осуществляется простой заменой  $\mathbf{V}(\mathbf{x}, t) \Rightarrow \mathbf{V}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{V}_0$ .

### 3. ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ЗАКОНЫ МЕХАНИКИ

В эйлеровой механике в качестве исходного объекта вводится тело-точка, которое реагирует не только на трансляционные, но и на спинорные движения. Такое тело-точку будем называть односпиновой частицей. Относительно односпиновой частицы считается, что она существует и занимает нулевой объем в теле отсчета. Движение односпиновой частицы определено, если заданы ее вектор положения  $\mathbf{R}(t)$  и тензор поворота  $\mathbf{P}(t)$ . Трансляционная и угловая скорости тела-точки находятся по формулам

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{R}}(t), \quad \boldsymbol{\omega}(t) = -1/2(\dot{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{P}^T)_\times, \quad (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})_\times = \quad (3.1)$$

где точкой обозначена материальная производная.

**Определение:** множество  $M_A$  выделенных по каким-либо признакам тел-точек называется телом  $A$ , а множество  $M_A^e$  всех остальных тел-точек, не входящих в  $M_A$ , называется окружением тела  $A$  и обозначается  $A^e$ .

В данной работе под телом  $A$  будет пониматься множество тел-точек, входящих в контрольный объем  $V$ .

**Определение:** тело  $A$  называется закрытым, если оно не обменивается телами-точками со своим окружением: в противном случае тело  $A$  называется открытым.

При пространственном описании сплошных сред тело  $A$  необходимо считать открытым по нескольким причинам. Во-первых, в контрольном объеме в разные моменты времени находятся разные тела-точки. Во-вторых, на тело  $A$  могут действовать разного рода излучения, например, облучение лазером.

**Аксиома:** кинетическая энергия, количество движения и кинетический момент тела  $A$  аддитивны по массам тел-точек, составляющих тело  $A$ .

Для тела  $\mathcal{A}$ , т.е. для совокупности тел-точек в контрольном объеме, кинетическая энергия определяется выражением

$$K(\mathcal{A}) = \int_{(V)} \mathcal{K} \rho(\mathbf{x}, t) dV, \quad \mathcal{K} = \frac{1}{2} \mathbf{V} \cdot \mathbf{V} + \mathbf{V} \cdot \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\omega} \quad (3.2)$$

где величина  $\mathcal{K}$  называется массовой плотностью кинетической энергии; тензоры  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  суть массовые плотности тензоров инерции, удовлетворяющие условиям

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{P}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{B}_0(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{P}^T(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{C}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{P}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{C}_0(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{P}^T(\mathbf{x}, t), \quad (3.3)$$

где  $\mathbf{B}_0$ ,  $\mathbf{C}_0$  — значения тензоров инерции в отсчетном положении, т.е. при тех значениях  $t_0$ , при которых  $\mathbf{P}(t_0) = \mathbf{E}$ . Условие положительности энергии будет выполнено, если тензор  $\mathbf{C} - \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{B}$  положительно определен и  $\rho \geq 0$ .

Количество движения тела  $\mathcal{A}$  определяется выражением

$$\mathbf{K}_1(\mathcal{A}) = \int_{(V)} \mathcal{K}_1 \rho(\mathbf{x}, t) dV, \quad \mathcal{K}_1 = \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \mathbf{V}} = \mathbf{V}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\omega} \quad (3.4)$$

Для кинетического момента тела  $\mathcal{A}$  имеем аналогичное выражение

$$\mathbf{K}_2^Q(\mathcal{A}) = \int_{(m)} \mathcal{K}_2^Q \rho(\mathbf{x}, t) dV, \quad \mathcal{K}_2^Q = (\mathbf{x} - \mathbf{x}_Q) \times \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \mathbf{V}} \quad (3.5)$$

где  $\mathbf{x}_Q$  задает фиксированную в системе отсчета точку, а величина

$$\mathcal{L} \equiv \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \boldsymbol{\omega}} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\omega} \quad (3.6)$$

называется массовой плотностью динамического спина.

Формулировка фундаментальных законов при пространственном описании отличается только тем, что эти законы должны записываться для открытых систем, т.е. для систем, которые обмениваются со своим окружением массой, количеством движения, кинетическим моментом и энергией. Опуская подробности, приводим окончательные формулировки первого и второго законов динамики Эйлера. Первый закон имеет вид

$$\nabla \cdot \mathbf{T} + \rho \mathbf{F} = \rho \left( \frac{d}{dt} \mathcal{K}_1 + \mathbf{V} \cdot \nabla \mathcal{K}_1 \right) \equiv \rho \frac{\delta}{\delta t} \mathcal{K}_1(\mathbf{x}, t). \quad (3.7)$$

Второй закон динамики в явной форме был впервые сформулирован Л. Эйлером в 1771 году. Однако в механику сплошных сред он был в неявной форме введен только в начале XX века. Под вторым законом динамики Эйлера понимается следующее утверждение:

$$\nabla \cdot \mathbf{M} + \mathbf{T}_x + \rho \mathbf{L} = \rho \frac{\delta}{\delta t} \mathcal{L}(\mathbf{x}, t), \quad (3.8)$$

где  $\mathcal{L}$  — плотность динамического спина, определенная выражением (3.6).

Третий фундаментальный закон механики — это уравнение баланса энергии, которое известно под названием первого начала термодинамики. Последняя включает в себя учение о различных формах энергии и способах ее перехода из одной формы в другую. Проблема заключается в том, что термо-

динамика оперирует с понятиями, которые не определены и не могут быть определены в рамках самой термодинамики [13]. Попытки обосновать термодинамику в рамках классической механики заведомо обречены на неудачу, чем и объясняется включение уравнения баланса энергии в структуры механики. Введем представление о механической энергии. Именно с ней имеют дело в классической механике, когда говорят, например, об интеграле энергии. Примем

**Определение:** механической энергией тела  $A$  называется сумма кинетической энергии тела  $A$  и потенциалов внутренних и внешних сил.

Механическая энергия не является новым понятием. Для ее введения достаточно использовать первые два закона динамики. Механическая энергия имеет ограниченное значение. В частности, она оставляет за рамками анализа такие понятия, как температура, энтропия, химический потенциал и др. Уравнение баланса энергии в качестве независимого постулата механики впервые было введено Дж. Грином [14]. При этом было введено новое понятие внутренней энергии. Для упругих тел внутренняя энергия с точностью до постоянной величины совпадает с потенциалом внутренних сил. Тела общего вида Дж. Грин не рассматривал. Примем, что наряду с такими атрибутами тела, как количество движения и кинетический момент, оно обладает еще одной характеристикой, называемой полной энергией тела  $A$  и обозначаемое символом  $E(A)$ . Полная энергия тела является новой характеристикой тела и нуждается в определении. Всегда, когда вводится новая характеристика, в рассмотрение должен вводиться и новый фундаментальный закон для этой характеристики. Уравнение баланса энергии управляет энергетическими потоками. В отличие от первых двух законов, уравнение баланса энергии суммирует в себе явления самой разной природы, ибо все они так или иначе, но могут быть охарактеризованы в терминах энергии. В качестве исследуемого тела  $A$ , как и ранее, выбираем совокупность частиц, попадающих в данный момент времени в контрольный объем  $V$ . Тогда в соответствии со сказанным выше имеем

$$E(A) = K(A) + U(A) = \int_{(V)} [\rho(\mathbf{x}, t)\mathcal{K} + \eta(\mathbf{x}, t)\mathcal{U}] dV \quad (3.9)$$

где  $\mathcal{K}$  есть массовая плотность кинетической энергии (3.2),  $\mathcal{U}$  есть плотность внутренней энергии. Следует обратить внимание, что кинетическая и внутренняя энергия по-разному представлены в определении (3.9). Кинетическая энергия является аддитивной энергией массы и потому может быть представлена интегралом по массе. Внутренняя энергия\* аддитивна по частицам среды, среди которых могут быть и безынерционные частицы. Поэтому внутреннюю энергию нельзя представить интегралом по массе без существенных противоречий и потерь. В качестве простого примера рассмотрим три материальных точки, соединенных безынерционными пружинами. Данное тело состоит из шести тел-частиц. Кинетическая энергия тела есть сумма кинетичес-

\* Предварительный анализ представленной в данной работе теории показывает, что в некоторых случаях представление (3.9) не является достаточно общим и требует уточнения.

ких энергий материальных точек. Внутренняя энергия есть сумма внутренних энергий материальных точек плюс сумма внутренних энергий пружин, не обладающих массой. В классической механике сплошных сред внутреннюю энергию принято считать аддитивной функцией массы.

**Уравнение баланса энергии:** скорость изменения полной энергии тела  $\mathcal{A}$  равна мощности  $N(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e)$  внешних воздействий на тело  $\mathcal{A}$  плюс скорость подвода энергии в тело  $\mathcal{A}$  от внешних источников

$$\frac{d}{dt} E(\mathcal{A}) = N(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e) + \delta(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e). \quad (3.10)$$

В математической форме уравнение баланса энергии для тела  $\mathcal{A}$  записывается в форме следующего интегрального равенства:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{(V)} (\rho \mathcal{K} + \eta \mathcal{U}) dV &= \int_{(V)} (\rho \mathbf{F} \cdot \mathbf{V} + \rho \mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\omega} + \eta q) dV \\ &+ \int_{(S)} (\mathbf{T}_{(n)} \cdot \mathbf{V} + \mathbf{M}_{(n)} \cdot \boldsymbol{\omega} - h_n) dS - \int_{(S)} \mathbf{n} \cdot (\mathbf{V}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{v}) \end{aligned} \quad (3.11)$$

где  $q(\mathbf{x}, t)$  есть подвод энергии в единицу времени в частицы тела  $\mathcal{A}$ ;  $h_n(\mathbf{x}_S)$  — скорость подвода энергии через границу контрольного объема. Поток энергии  $h_{(n)}$  после стандартных рассуждений выражается через вектор  $\mathbf{h}$  потока энергии по правилу Стокса

$$h_{(n)} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{h}. \quad (3.12)$$

Обычно поток энергии сводится к потоку тепла. Поэтому вектор  $\mathbf{h}$  принято называть вектором потока тепла. Это возможно, поскольку само понятие тепла не определено. В данной работе понятие вектора потока тепла в качестве общего термина не используется, поскольку в традиционное представление о тепле плохо вписывается, например, подвод электрической энергии к телу. Используя теорему о дивергенции и произвольность выбора контрольного объема, приходим к локальной форме уравнения баланса энергии

$$\begin{aligned} \rho [\dot{\mathcal{K}} + \mathbf{V} \cdot \nabla \mathcal{K}] + \eta [\dot{\mathcal{U}} + \mathbf{V} \cdot \nabla \mathcal{U}] + \mathcal{K} [\dot{\rho} + \nabla \cdot (\rho \\ + \mathcal{U} [\dot{\eta} + \nabla \cdot (\eta \mathbf{V})] = \rho \mathbf{F} \cdot \mathbf{V} + \rho \mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\omega} + \eta q + (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \\ + (\nabla \cdot \mathbf{M}) \cdot \boldsymbol{\omega} + \mathbf{T}^T \cdot \nabla \mathbf{V} + \mathbf{M}^T \cdot \nabla \boldsymbol{\omega} - \nabla \cdot \mathbf{h}. \end{aligned}$$

Используя определение материальной производной, уравнение баланса частей (2.1), уравнение баланса массы (2.4), уравнение (2.5), первый (3.7) и второй (3.8) законы динамики, уравнение баланса энергии переписываем в виде

$$\eta \frac{\delta \mathcal{U}}{\delta t} = \eta \mathcal{U} \frac{\delta z}{\delta t} + \mathbf{T}^T \cdot \cdot (\nabla \mathbf{V} + \mathbf{E} \times \boldsymbol{\omega}) + \mathbf{M}^T \cdot \cdot \nabla \boldsymbol{\omega} - \quad (3.13)$$

где переменная  $z$  определена выражением (2.5).

Правая часть равенства (3.13), среди прочего, содержит мощность силовых и моментных напряжений. Часть этой мощности идет на изменение внутренней энергии. Оставшаяся часть мощности частично остается в теле в форме тепла, а частично рассеивается в окружающую среду. Чтобы разделить эти части, тензоры силовых и моментных напряжений представим в виде разложений

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{E} + \boldsymbol{\tau}_e + \boldsymbol{\tau}_f, \quad \mathbf{M} = \mathbf{M}_e + \mathbf{M}_f, \quad \text{tr}\boldsymbol{\tau}_e = \text{tr} \quad (3.14)$$

где  $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_e + \boldsymbol{\tau}_f$  есть девиатор тензора напряжений, а индексом “e” отмечена составляющая напряжений, не зависящая от скоростей.

Напряжения, не зависящие от скоростей, будем называть упругими напряжениями. Индексом “f” обозначена вся оставшаяся часть напряжений, которые будем называть диссипативными. Используя разложение (3.14), уравнение баланса энергии переписываем в виде

$$\frac{\delta(\eta\mathcal{U})}{\delta t} = \frac{p_e + \eta\mathcal{U}}{\rho} \frac{\delta\rho}{\delta t} + \boldsymbol{\tau}_e \cdot \cdot (\nabla\mathbf{V} + \mathbf{E} \times \boldsymbol{\omega}) + \mathbf{M}_e^T \quad (3.15)$$

$$-\nabla \cdot \mathbf{h} + \rho q - p_f \nabla \cdot \mathbf{V} + \boldsymbol{\tau}_f^T \cdot \cdot (\nabla\mathbf{V} + \mathbf{E} \times \boldsymbol{\omega}) + \mathbf{M}_f^T$$

Уравнение баланса энергии, записанное в форме (3.15), нуждается в дальнейшем преобразовании к специальному виду, называемому *приведенным уравнением баланса энергии*. В частности, из уравнения (3.15) не видно от каких аргументов зависит внутренняя энергия. При построении конкретных теорий уравнение баланса энергии должно быть преобразовано к следующей форме:

$$\frac{\delta\eta\mathcal{U}}{\delta t} = \mathbf{f}_1^T(\mathbf{T}_e, \mathbf{M}_e) \cdot \cdot \frac{\delta\mathbf{A}}{\delta t} + \mathbf{f}_2^T(\mathbf{T}_e, \mathbf{M}_e) \cdot \cdot \frac{\delta\mathbf{B}}{\delta t} + \rho\vartheta \xi \quad (3.16)$$

где тензоры  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  называются первой и второй мерой деформации соответственно, скалярные функции  $\vartheta$  и  $\mathcal{H}$  называются температурой и плотностью энтропии. Если имеют место равенства  $\mathbf{f}_1 = \mathbf{T}_e$  и  $\mathbf{f}_2 = \mathbf{M}_e$ , то тензоры  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  называются истинными тензорами деформации.

Равенство типа (3.16) называется *приведенным уравнением баланса энергии*. При его написании в рассмотрение введены два новых параметра: температура  $\vartheta$  и плотность энтропии  $\mathcal{H}$ . Тот факт, что введены только два новых параметра, определяется исключительно нашим желанием обойтись простейшими средствами. С наименьшим основанием вместо (3.16) мы могли бы написать приведенное уравнение баланса энергии в такой, например, форме

$$\frac{\delta\eta\mathcal{U}}{\delta t} = \mathbf{f}_1^T(\mathbf{T}_e, \mathbf{M}_e) \cdot \cdot \frac{\delta\mathbf{A}}{\delta t} + \mathbf{f}_2^T(\mathbf{T}_e, \mathbf{M}_e) \cdot \cdot \frac{\delta\mathbf{B}}{\delta t} + \rho\vartheta_1 \xi$$

где в каждой точке системы отсчета введены две температуры и две энтропии. Так, например, приходится поступать в теории оболочек [15, 16]. Из уравнения (3.16) сразу видно, что внутренняя энергия зависит от мер деформации  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$ , а также от энтропии. В указании аргументов, от которых зависит

внутренняя энергия, и состоит главное назначение приведенного уравнения баланса энергии, вывод которого будет рассмотрен в следующем параграфе.

Рассмотренные выше три фундаментальных закона в настоящее время, по моему мнению, исчерпывают список фундаментальных законов механики. Однако почти общепринято в качестве еще одного фундаментального закона механики рассматривать второй закон термодинамики, в основании которого лежит опытный факт о том, что вся механическая энергия может быть переведена в тепловую энергию, но полностью перевести тепловую энергию в механическую энергию невозможно [17, 18]. Обобщенно говоря, формулировка второго закона термодинамики — это попытка ввести идею необратимости многих природных и техногенных процессов в рациональную механику. Во многих, если не во всех, случаях для введения идеи необратимости в рассматриваемые процессы достаточно обычного здравого смысла. Тем не менее, многих исследователей не оставляет желание перевести идею необратимости с уровня здравого смысла на уровень фундаментального закона. Многие полагают, что этот перевод уже осуществлен формулировкой второго закона термодинамики. По мнению автора, здесь желаемое выдается за действительное. Фактически в настоящее время не существует формулировки второго закона термодинамики, обладающей той же степенью общности, какой обладают законы динамики и уравнение баланса энергии. Основная проблема, возникающая при попытке дать общую формулировку второго закона термодинамики, связана со следующим обстоятельством. Фундаментальные законы представляют собой утверждения, которые принципиально не могут быть опровергнуты экспериментально. Почему такие утверждения всеобщего характера вообще возможны? Дело в том, что любой фундаментальный закон можно воспринимать как определение некой новой величины. Первый закон динамики вводит в рассмотрение новое понятие силы. Второй закон динамики вводит в рассмотрение новое понятие момента. Уравнение баланса энергии вводит в рассмотрение новое понятие внутренней энергии. Комбинация всех трех законов позволяет ввести в рассмотрение температуру, энтропию, химический потенциал. Что же остается на долю второго закона термодинамики? Он не вводит никаких новых понятий, но постулирует некие ограничения на уже введенные величины. Эти ограничения отражают наши представления о характере поведения системы и носят опытный характер. Отсюда следует, что новые наблюдения и новые опыты могут изменить как наши представления о природе сущего, так и, следовательно, формулировку второго закона термодинамики. По этой причине второй закон термодинамики в его существующей трактовке нельзя наделять статусом фундаментального закона, и в данной работе этот закон отдельно не рассматривается.

#### 4. ПРИВЕДЕННОЕ УРАВНЕНИЕ БАЛАНСА ЭНЕРГИИ

Переход от уравнения баланса энергии (3.15) к приведенному уравнению баланса энергии существенно опирается на интуитивные представления, но



даже формальные нарушения уравнения (3.15) недопустимы. Ниже будет показано, что мощность упругих напряжений всегда приводится к нужному виду. Поэтому в дальнейшем преобразовании нуждаются только слагаемые в уравнении (3.15), записанные во второй строке. Именно в них спрятаны многие физические явления, выходящие за рамки, так сказать, классической механики. В качестве измеряемых параметров (параметров состояния), интегрально характеризующих свойства материала, выберем плотность распределения частиц в пространстве  $\eta$  и температуру  $\vartheta$ . При этом считается, что мы располагаем соответствующими приборами, т.е. микроскопом и термометром. В качестве сопряженных переменных, подлежащих определению, выбираем химический потенциал  $\Psi$  и энтропию  $\mathcal{H}$ . Принятые наименования этих переменных не обязательно совпадают с терминами, которые используются в литературе. Поскольку ниже вводятся определения этих понятий, то возможная несогласованность в терминах не является существенной.

В качестве одной части определения для химического потенциала и энтропии принимаем равенство

$$\eta\vartheta \frac{\delta\mathcal{H}}{\delta t} + \eta \frac{\delta\Psi}{\delta t} = \quad (4.1)$$

$$= -\nabla \cdot \mathbf{h} + \rho q - p_f \nabla \cdot \mathbf{V} + \boldsymbol{\tau}_f^T \cdot \cdot (\nabla \mathbf{V} + \mathbf{E} \times \boldsymbol{\omega}) + \mathbf{N}$$

Равенства (4.1), конечно, недостаточно для того, чтобы однозначно определить химический потенциал и энтропию. В дальнейшем уравнение (4.1) необходимо будет разбить на два уравнения: уравнение теплопроводности и уравнение диффузии. Но сейчас нам важно только то, что введение понятий энтропии и химического потенциала равенством (4.1) всегда возможно и не может приводить к противоречиям. Но может случиться, что при этом не будут описываться те или иные экспериментальные данные. Это будет означать, что одного химического потенциала и одной энтропии недостаточно и необходимо контролировать не только плотность частиц и температуру, но и дополнительные параметры. Например, вводить в рассмотрение несколько температур и, соответственно, энтропий, как это делается в динамике разреженного газа.

Левая часть равенства (4.1) содержит два формально похожих слагаемых, но их физический смысл существенно различен. Энтропия характеризует переходы энергии из одной формы в другую и миграцию этих переходов внутри тела. Химический потенциал отвечает за диффузию частиц внутри тела. При этом в данной работе считается, что диффундируют легкие частицы, массой которых можно пренебречь в сравнении с массой частиц основного тела. Иными словами, имеются в виду процессы типа растворения газа в твердом теле или испарения твердых частиц. Можно, конечно, при желании учесть и массу диффундирующих частиц. Нужно просто вместо уравнения (2.4) записать уравнение с источником в правой части.

Обратим внимание на важное с теоретической точки зрения обстоятельство. В литературе [13] приводится такое, например, определение химического потенциала: *химическим потенциалом называется производная от внутренней энергии по числу частиц, составляющих рассматриваемую систему.*

При этом подразумевается, что внутренняя энергия уже каким-то образом определена. Обычно постулируется существование некоей функции состояния, называемой внутренней энергией. Но смысл слова “существование” непонятен. Когда мы говорим, что существует сундук, где деньги лежат, то мы имеем в виду реальное существование сундука. Однако внутренняя энергия, как объективно существующая (измеряемая) величина, в Природе не существует. Равно как не существует в Природе объект, называемый кинетической энергией. Последнюю можно вычислить по измеряемым параметрам, но непосредственно измерить кинетическую энергию невозможно. Аналогично обстоит дело и с внутренней энергией. Обратим теперь внимание, что внутренняя энергия пока еще не определена. О ней сказано, что есть такая новая физическая характеристика тела, поведение которой определяется уравнением баланса энергии. Но как математический объект, т.е. функция некоего числа заданных аргументов, внутренняя энергия у нас еще не определена. Заранее этого сделать нельзя: нельзя сначала определить внутреннюю энергию, а затем химический потенциал и энтропию. Все эти понятия могут быть введены только *одновременно*. Именно в этом состоит существенное отличие используемого подхода от подходов, используемых в статистической физике и термодинамике. Если мы введем несколько температур и, соответственно, несколько энтропий, то изменится и смысловое содержание внутренней энергии. В установлении связи между внутренней энергией, химическим потенциалом, энтропией, давлением и т.д. и состоит основное назначение приведенного уравнения баланса энергии, к выводу которого мы и переходим. Обратим внимание на то, что ниже вообще не понадобятся понятия равновесных и неравновесных процессов.

Используя уравнение (4.1), уравнение баланса энергии переписываем в виде

$$\begin{aligned} \frac{\delta(\eta\mathcal{U})}{\delta t} = & \frac{p_e + \eta\mathcal{U}}{\rho} \frac{\delta\rho}{\delta t} + \eta \frac{\delta\psi}{\delta t} + \eta\vartheta \frac{\delta\mathcal{H}}{\delta t} + \\ & + \boldsymbol{\tau}_e \cdot \cdot (\nabla\mathbf{V} + \mathbf{E} \times \boldsymbol{\omega}) + \mathbf{M}_e^T \cdot \cdot \nabla\boldsymbol{\omega}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Осталось преобразовать последние два слагаемых в правой части уравнения (4.2). Для этого нам понадобится тождество, справедливое для любого вектора  $\mathbf{a}$

$$\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} (\mathbf{a} \times \mathbf{P})^T \cdot \cdot \frac{\delta\mathbf{P}}{\delta t}.$$

С учетом этого тождества и равенства (1.12) имеем

$$\boldsymbol{\tau}_e^T \cdot \cdot (\nabla\mathbf{V} + \mathbf{E} \times \boldsymbol{\omega}) = -(\mathbf{g}^{-1} \cdot \boldsymbol{\tau}_e^T) \cdot \cdot \frac{\delta\mathbf{g}}{\delta t} - \frac{1}{2} (\boldsymbol{\tau}_\times \times \mathbf{P})$$

где вектор  $\boldsymbol{\tau}_\times$  есть векторный инвариант тензора  $\boldsymbol{\tau}_e$ .

С учетом равенства (1.9) для тензора моментных напряжений имеем

$$\mathbf{M}_e^T \cdot \cdot \nabla\boldsymbol{\omega} = \mathbf{M}_e^T \cdot \cdot \frac{\delta\mathbf{F}}{\delta t} + \frac{1}{2} [(\mathbf{M}_e^T \cdot \mathbf{F})_\times \times \mathbf{P}]^T \cdot \cdot \frac{\delta\mathbf{P}}{\delta t}$$

Принимая вышеуказанные равенства, вместо (4.2) получаем окончательную форму приведенного уравнения баланса энергии

$$\frac{\delta(\eta\mathcal{U})}{\delta t} = \frac{p_e + \eta\mathcal{U}}{\rho} \frac{\delta\rho}{\delta t} + \eta \frac{\delta\psi}{\delta t} + \eta\vartheta \frac{\delta\mathcal{H}}{\delta t} -$$
(4.3)

$$-(\mathbf{g}^{-1} \cdot \boldsymbol{\tau}_e^T + \mathbf{g}^{-1} \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{M}_e^T) \cdot \frac{\delta\mathbf{g}}{\delta t} + \mathbf{M}_e^T \cdot \frac{\delta\mathbf{F}}{\delta t} + \frac{1}{2} [(\mathbf{N}$$

Приведенное уравнение баланса энергии показывает, что внутренняя энергия является функцией следующих аргументов:

$$\eta\mathcal{U} = \mathcal{F}(\rho, \psi, \mathcal{H}, \mathbf{g}, \mathbf{F}, \mathbf{P}).$$

Кроме того, из уравнения (4.3) вытекают соотношения, называемые соотношениями Коши~Грина

$$p_e = \rho^2 \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \frac{\eta\mathcal{U}}{\rho} \right), \quad \vartheta = \frac{1}{\eta} \frac{\partial \eta\mathcal{U}}{\partial \mathcal{H}}, \quad \eta = \frac{\partial \eta\mathcal{U}}{\partial \psi},$$

$$\boldsymbol{\tau}_e = -\frac{\partial \eta\mathcal{U}}{\partial \mathbf{g}} \cdot \mathbf{g}^T - \frac{\partial \eta\mathcal{U}}{\partial \mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^T, \quad \mathbf{M}_e = \frac{\partial \eta\mathcal{U}}{\partial \mathbf{F}}.$$
(4.4)

Что касается коэффициента при материальной производной от тензора поворота, то при выводе формулы для него необходимо учесть, что компоненты тензора поворота не являются независимыми. Действительно, согласно модифицированному уравнению Пуассона (1.6) имеем ограничение на материальную производную от тензора поворота следующего вида:

$$\frac{\delta \mathbf{P}(\mathbf{x}, t)}{\delta t} \cdot \mathbf{P}^T(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t) \times \mathbf{E} \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{A} \cdot \mathbf{P})^T \dots$$

которое должно выполняться для любого симметричного тензора  $\mathbf{A}$ . Следовательно, должно выполняться равенство

$$\frac{\partial \eta\mathcal{U}}{\partial \mathbf{P}} = \frac{1}{2} (\mathbf{M}_e^T \cdot \mathbf{F} - \boldsymbol{\tau}_e)_{\times} \times \mathbf{P} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}, \quad \forall \mathbf{A} : \mathbf{A} =$$

Чтобы исключить отсюда произвольный симметричный тензор  $\mathbf{A}$ , необходимо умножить это уравнение на тензор  $\mathbf{P}^T$  слева и вычислить векторные инварианты от обеих частей получившегося равенства. Результатом указанных операций будет следующее уравнение:

$$\left[ \frac{\partial \eta\mathcal{U}}{\partial \mathbf{P}} \cdot \mathbf{P}^T + \mathbf{M}_e^T \cdot \mathbf{F} - \boldsymbol{\tau}_e \right] \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \forall \mathbf{B} : \mathbf{B} = -$$
(4.5)

которое должно выполняться для любого антисимметричного тензора  $\mathbf{B}$ . Поскольку тензоры силовых и моментных напряжений уже определены соот-

ношениями Коши~Грина (4.4), то условие (4.5) налагает некоторые ограничения на задание внутренней энергии. А именно, внутренняя энергия должна удовлетворять следующему уравнению в частных производных первого порядка:

$$\left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathbf{g}}\right)^T \cdot (\mathbf{V} \cdot \mathbf{g}) + \left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathbf{P}}\right)^T \cdot (\mathbf{V} \cdot \mathbf{P}) + \left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathbf{F}}\right)^T \cdot (1 \quad (4.6)$$

где  $\mathbf{V}$  — произвольный кососимметричный тензор.

Таким образом, внутренняя энергия не может быть произвольной функцией аргументов  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{g}$ ,  $\mathbf{F}$ , но должна зависеть от неких комбинаций этих аргументов. Чтобы выявить от каких именно комбинаций зависит внутренняя энергия, необходимо найти общее решение уравнения (4.6) с частными производными первого порядка. Теория таких уравнений хорошо разработана [19]. Помимо уравнения (4.6) внутренняя энергия должна удовлетворять еще одному уравнению в частных производных. Действительно, тензор  $\boldsymbol{\tau}_e$  является девiatorом, т.е. его след должен равняться нулю. Поэтому из соотношений Коши~Грина (4.4) имеем

$$\left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathbf{g}}\right)^T \cdot \mathbf{g} + \left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathbf{F}}\right)^T \cdot \mathbf{F} = 0. \quad (4.7)$$

Итак, внутренняя энергия должна тождественно удовлетворять уравнениям (4.6) и (4.7) в частных производных первого порядка. Конкретные детали будут рассмотрены в следующем пункте для частного случая неполярной среды.

## 5. НЕПОЛЯРНАЯ СПЛОШНАЯ СРЕДА С КУЛОНОВЫМ ТРЕНИЕМ

Сосредоточим свое внимание на неполярных средах со слабо выраженной микроструктурой. Примем, что упругая составляющая тензора моментных напряжений  $\mathbf{M}_e$  равна нулю. В таком случае последнее из соотношений Коши~Грина (4.4) показывает, что внутренняя энергия не зависит от тензора  $\mathbf{F}$ . Кроме того, примем, что девiator упругой части тензора напряжений симметричен

$$\mathbf{M}_e = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\tau}_e = \boldsymbol{\tau}_e^T \quad \Rightarrow \quad (\boldsymbol{\tau}_e^T)_\times = \mathbf{0}.$$

При этих ограничениях приведенное уравнение баланса энергии (4.3) принимает более простой вид

$$\begin{aligned} \frac{\delta(\eta \mathcal{U})}{\delta t} &= \frac{p_e + \eta \mathcal{U}}{\rho} \frac{\delta \rho}{\delta t} + \eta \frac{\delta \psi}{\delta t} + \eta \vartheta \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta t} - (\mathbf{g}^{-1} \cdot \boldsymbol{\tau}_e^T \\ &\Rightarrow \quad \mathcal{U} = \mathcal{U}(\rho, \psi, \mathcal{H}, \mathbf{g}). \end{aligned}$$

Соотношения Коши~Грина (4.4) принимают вид

$$p_e = \rho^2 \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \frac{\eta \mathcal{U}}{\rho} \right), \quad \vartheta = \frac{1}{\eta} \frac{\partial \eta \mathcal{U}}{\partial \mathcal{H}}, \quad \eta = \frac{\partial \eta \mathcal{U}}{\partial \psi}, \quad (5.1)$$

Симметричность тензора  $\tau_e$  и требование  $\text{tr}\tau_e = 0$  приводят к следующим ограничениям, налагаемым на внутреннюю энергию:

$$\left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathbf{g}}\right)^T \cdot (\mathbf{V} \cdot \mathbf{g}) = 0, \quad \left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathbf{g}}\right)^T \cdot \mathbf{g} = 0, \quad \forall \mathbf{V} : \mathbf{V} = -\mathbf{V}^T \quad (5.2)$$

Для внутренней энергии получили два уравнения в частных производных первого порядка. Характеристическая система [19] для первого из этих уравнений имеет вид

$$\frac{d\mathbf{g}}{ds} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{g}, \quad (5.3)$$

Эта система девятого порядка определена в девятимерном пространстве тензоров второго ранга. Первое из уравнений (5.2) показывает, что свободная энергия постоянна вдоль интегральной кривой уравнения (5.3). Иными словами, внутренняя энергия есть интеграл системы (5.3), для которой существует не более восьми независимых интегралов. Однако нас интересуют только те интегралы, которые не зависят от произвольно выбираемого тензора  $\mathbf{V}$ . Таких интегралов шесть, и их нетрудно найти. Для этого достаточно умножить обе части уравнения (5.3) на тензор  $\mathbf{g}^T$  слева. В результате получим

$$\mathbf{g}^T \cdot \frac{d\mathbf{g}}{ds} = \mathbf{g}^T \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{g} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\mathbf{g}^T}{ds} \cdot \mathbf{g} = -\mathbf{g}^T \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{g}.$$

Складывая получившиеся уравнения, находим шесть скалярных интегралов уравнения (5.3) или один тензорный интеграл

$$\frac{d\mathbf{G}_*}{ds} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{G}_* = \mathbf{g}^T \cdot \mathbf{g} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{U} = \mathcal{U}(\rho, \psi, \mathcal{H}, \mathcal{C}) \quad (5.4)$$

Тензор  $\mathbf{G}_*$  является аналогом хорошо известного в литературе по нелинейной теории упругости [10] тензора, который является обратным для меры деформации Коши-Грина. Таким образом, если внутренняя энергия задана как произвольная функция тензора  $\mathbf{G}_*$ , то она тождественно удовлетворяет первому из условий (5.2). Для выполнения второго из условий (5.2) необходимо, чтобы выполнялось следующее условие:

$$\mathbf{g} \cdot \left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathbf{g}}\right)^T = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{G}_* \cdot \left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathbf{G}_*}\right)^T = 0.$$

Характеристическая система для второго из этих уравнений имеет вид первого из уравнений

$$\frac{d\mathbf{G}_*}{ds} = \mathbf{G}_* \quad \Rightarrow \quad \frac{d\mathbf{G}_*^m}{ds} = m\mathbf{G}_*^m, \quad (5.5)$$

где  $m$  есть любое целое число.

Это — система шестого порядка, которая имеет не более пяти независимых интегралов. Нетрудно убедиться, что общим интегралом системы (5.5) является унимодулярный тензор

$$\mathbf{G} = I_3^{-1/3}(\mathbf{G}_*)\mathbf{G}_* = I_3^{-2/3}(\mathbf{g})\mathbf{g}^T \cdot \mathbf{g}, \quad I_3(\mathbf{G}) = 1. \quad (5.6)$$

Тензор  $\mathbf{G}$ , следуя [2], будет называться тензором формоизменения. Окончательно получили, что внутренняя энергия имеет вид

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}(\rho, \psi, \mathcal{H}, \mathbf{G}) \quad (5.7)$$

и тождественно удовлетворяет ограничениям (5.2). Определяющее уравнение для дивергента тензора напряжений (5.1) принимает вид

$$\boldsymbol{\tau}_e = \frac{2}{3} \left( \mathbf{G} \cdot \cdot \frac{\partial \eta \mathcal{U}}{\partial \mathbf{G}} \right) \mathbf{E} - 2I_3^{-2/3} (\mathbf{g}) \mathbf{g} \cdot \frac{\partial \eta \mathcal{U}}{\partial \mathbf{G}} \cdot \mathbf{g}^T. \quad (5.8)$$

Дальнейшая конкретизация требует задания внутренней энергии.

Обратимся к обсуждению тензоров вязких напряжений. Следует подчеркнуть, что пластичность — это свойство материала, которое не исчезает даже в том случае, если диссипация энергии в материале отсутствует. Более того, влияние вязких напряжений на пластические свойства материала не слишком значительно. Исключение, возможно, составляют сыпучие среды, в которых, по мнению многих авторов, важную роль играет сухое трение между частицами среды. Убедительных способов введения сухого трения в механику сплошных сред в настоящее время не предложено, хотя этому посвящено большое число публикаций. Обычно считается, что вязкое трение зависит от градиента вектора скорости. Так обстоит дело, например, в ньютоновской жидкости, материале Максвелла и наиболее популярных теориях пластичности [1, 2]. Полный анализ роли вязких напряжений оставим за рамками данной работы и ограничимся введением только сухого трения. Примем допущение, что тензоры вязких напряжений можно представить в следующем простейшем виде:

$$\mathbf{T}_f = \mathbf{E} \times \mathbf{t}, \quad \mathbf{M}_f = \mathbf{0}. \quad (5.9)$$

Допущениями (5.9) мы исключаем из рассмотрения теории пластичности, основанные на теориях течения. При желании это легко исправить, следуя, например, работе [2]. Для вектора напряжений  $\mathbf{t}$  считаем, что справедлив закон сухого трения Кулона

$$\mathbf{t} = -k |\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}_e \cdot \mathbf{n}| \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}_e \cdot \mathbf{n}) \frac{2\boldsymbol{\omega} - \nabla \times \mathbf{V}}{|2\boldsymbol{\omega} - \nabla \times \mathbf{V}|}, \quad \boldsymbol{\omega} \neq \quad (5.10)$$

где  $k > 0$  — коэффициент трения, который является характеристикой материала; характеристическая функция  $\boldsymbol{\sigma}$  определяется выражением

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}_e \cdot \mathbf{n}) = \begin{cases} 1, & \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}_e \cdot \mathbf{n} < 0; \\ 0, & \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}_e \cdot \mathbf{n} \geq 0. \end{cases}$$

Единичный вектор  $\mathbf{n}$  в выражении (5.10) находится по тензору  $\boldsymbol{\tau}_e$  из решения задачи

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}_e \cdot \mathbf{m} = \max, \quad \forall \mathbf{n}, \mathbf{m} : |\mathbf{n}| = |\mathbf{m}| = 1, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{m} \quad (5.11)$$

Нетрудно доказать, что решение задачи (5.11) единственно.

Сказанное выше относилось к случаю скольжения. Если проскальзывание отсутствует, то выполняются условия

$$2\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{V} \quad \Rightarrow \quad -2\mathbf{t} = \rho \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \mathbf{t}}. \quad (5.12)$$

Используя это соотношение, вектор  $\mathbf{t}$  можно исключить из первого закона динамики. Во многих случаях сухое трение можно заменить значительно более простым вязким трением. В этом случае вместо уравнения (5.10) нужно принять

$$\mathbf{t} = -k \left( \boldsymbol{\omega} - \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{V} \right), \quad (5.13)$$

где  $k > 0$  — коэффициент вязкого трения.

## 6. ИЗОТРОПНАЯ НЕПОЛЯРНАЯ СРЕДА

Приведенные выше построения носили достаточно общий характер, поскольку частные предположения о свойствах среды практически не использовались. Даже предположения сплошности по существу не принимались. В самом деле, разрывы сплошности всегда можно сгладить выбором функции распределения частиц. Поэтому все сказанное выше применимо для описания произвольных неупругих и, в частности, пластических и сыпучих сред. Ранее неоднократно высказывалась точка зрения, что неупругие среды на этапе нагружения ведут себя вполне аналогично нелинейно упругим телам, отличаясь от них только на этапе разгрузки. Выше было показано, что упругие напряжения в общем случае выражаются через производные от внутренней энергии по формулам вполне аналогичным таковым в нелинейной теории упругости. Что касается неупругих составляющих, то их влияние на внутреннюю энергию проявляется в зависимости внутренней энергии от энтропии и химического потенциала. Таким образом, вся информация о свойствах среды определяется строением внутренней энергии. Поэтому задание внутренней энергии эквивалентно заданию уравнения состояния среды. Для жидкостей и газов уравнения состояния изучены достаточно хорошо. Они сводятся к установлению связи между давлением, массовой плотностью и температурой, но могут быть переписаны и в терминах внутренней энергии. Не столь убедительно обстоит дело с уравнением состояния твердых тел, которое записывается в разных формах. С одной из этих форм можно ознакомиться по книге [20]. Существуют и другие уравнения состояния, из которых наиболее известным является уравнение Ми-Грюнайзена. Однако подход, изложенный в [20] и других работах, не позволяет в полной мере описать уравнения состояния твердых тел. Действительно, различие между жидкими и твердыми телами заключается, главным образом, в их реакции на изменение формы. Описать эту реакцию, игнорируя при этом девиатор тензора напряжений, автору кажется проблемой, не имеющей решения. Без учета девиатора тензора напряжений можно доста-

точно полно описать только различие между жидкостями и газами. Вернувшись к механике сплошных сред, заметим, что при классическом подходе к описанию пластических материалов центральную роль играет так называемый критерий текучести, т.е. некое условие, налагаемое на девиатор тензора напряжений. Из критерия текучести следует так называемый ассоциативный закон течения. При этом девиатор тензора напряжений связывается с тензором деформации и тензором скоростей деформации [2] не аналитическими зависимостями. Иными словами, девиатор тензора упругих напряжений, который, по определению, не зависит от скоростей, при описании неупругих свойств материала игнорируется. Это означает, что внутренняя энергия не зависит от тензора формоизменения. Однако для твердых тел, которые очевидным образом сопротивляются изменению формы, это неприемлемо\*, ибо обсуждаемое допущение означает отказ от рассмотрения очень многих наблюдаемых явлений. Поэтому одна из задач теории заключается в определении строения внутренней энергии, которое в общем случае должно не только учитывать наличие твердой фазы, но и отражать наличие многих твердотельных фаз. В настоящее время эта проблема почти не изучена. Поэтому анализ возможных форм задания внутренней энергии целесообразно начать с частных случаев.

Прежде всего, примем, что материал является изотропным. Это означает, что внутренняя энергия зависит только от инвариантов тензора

$$\eta\mathcal{U} = \Phi(\rho, \psi, \mathcal{H}, I_1, I_2), \quad I_1(\mathbf{G}) \equiv \mathbf{E} \cdot \mathbf{G}, \quad I_2(\mathbf{G}) \quad (6.1)$$

Подставляя эти представления в соотношения Коши-Грина (5.1) с учетом соотношений (5.8), получаем

$$p_e = \rho^2 \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \frac{\eta\mathcal{U}}{\rho} \right), \quad \vartheta = \frac{1}{\eta} \frac{\partial \eta\mathcal{U}}{\partial \mathcal{H}}, \quad \eta = \frac{\partial \eta\mathcal{U}}{\partial \psi}, \quad (6.2)$$

$$\boldsymbol{\tau}_e = \frac{2}{3} \left( I_1 \frac{\partial \eta\mathcal{U}}{\partial I_1} + I_2 \frac{\partial \eta\mathcal{U}}{\partial I_2} \right) \mathbf{E} - 2 \left( \frac{\partial \eta\mathcal{U}}{\partial I_1} \boldsymbol{\Lambda} + \frac{\partial \eta\mathcal{U}}{\partial I_2} \boldsymbol{\Lambda}^2 \right),$$

где тензор  $\boldsymbol{\Lambda}$  называется тензором формоизменения, отвечающим мере деформации Альманзи [2].

Инварианты тензоров  $\mathbf{G}$  и  $\boldsymbol{\Lambda}$  совпадают и определяются формулами

$$I_1(\boldsymbol{\Lambda}) = \Lambda_1 + \Lambda_2 + \frac{1}{\Lambda_1 \Lambda_2} \geq 3, \quad I_2(\boldsymbol{\Lambda}) = \Lambda_1^2 + \Lambda_2^2$$

где  $\Lambda_1, \Lambda_2$  суть два собственных числа тензора  $\boldsymbol{\Lambda}$ .

Вместо инварианта  $I_2(\boldsymbol{\Lambda})$  введем другой инвариант  $\sigma$

$$\sigma \equiv 3I_2(\mathbf{G}) - I_1^2(\mathbf{G}) = (\Lambda_1 - \Lambda_2)^2 + (\Lambda_1 - \Lambda_3)^2 + (\Lambda_2 - \Lambda_3)^2 \quad (6.3)$$

$$\Lambda_1 \Lambda_2 \Lambda_3 = 1.$$

\* Сейчас обсуждается общая ситуация. Разумеется, для частных моделей приемлемы и полезны с практической точки зрения самые разные допущения.



Если  $\sigma = 0$ , то  $\mathbf{G} = \mathbf{E}$ . Внутреннюю энергию будем рассматривать как функцию инвариантов  $I_1(\Lambda)$  и  $\sigma$ . В таком случае вместо соотношения для девиатора (6.2) будем иметь

$$\tau_e = -2 \frac{\partial \eta \mathcal{U}}{\partial I_1} \left( \Lambda - \frac{1}{3} I_1 \mathbf{E} \right) + 2 \frac{\partial \eta \mathcal{U}}{\partial \sigma} \left[ \frac{(\sigma - I_1^2)^2}{3} \mathbf{E} + \right.$$

Это соотношение можно переписать в более компактной форме

$$\tau_e = -2 \frac{\partial \eta \mathcal{U}}{\partial I_1} \lambda - 6 \frac{\partial \eta \mathcal{U}}{\partial \sigma} \left( \lambda^2 - \frac{\sigma}{9} \mathbf{E} \right), \quad (6.4)$$

где введены обозначения

$$\lambda = \Lambda - \frac{I_1}{3} \mathbf{E}, \quad \sigma \equiv 3I_2(\mathbf{G}) - I_1^2(\mathbf{G}) = 3\text{tr}\lambda^2. \quad (6.5)$$

Обращает на себя внимание характер зависимости девиатора упругих напряжений от инвариантов  $I_1(\Lambda)$  и  $\sigma$ . Рассмотрим, например, случай малых деформаций, когда  $\|\nabla \mathbf{u}\| \ll 1$ . В этом случае с точностью до малых второго порядка получаем

$$I_1 = I_2 = 3, \quad \Lambda = \mathbf{E} - 2\text{dev}\boldsymbol{\varepsilon}, \quad \lambda = -2\text{dev}\boldsymbol{\varepsilon},$$

где  $\boldsymbol{\varepsilon}$  есть линейный тензор деформации.

Соотношение (6.4) упрощается и принимает вид

$$\tau_e = 2\mu \text{dev}\boldsymbol{\varepsilon} + \frac{\partial \eta \mathcal{U}}{\partial \sigma} O(\boldsymbol{\varepsilon}^2), \quad \mu \equiv 2 \frac{\partial \eta \mathcal{U}}{\partial I_1}. \quad (6.6)$$

Параметр  $\mu$  может быть назван модулем сдвига. Если допустить\*, что производная от внутренней энергии по параметру  $\sigma$  ограничена при  $\sigma \rightarrow 0$ , то из уравнения (6.6) видим, что в линейной теории зависимость внутренней энергии от параметра  $\sigma$  является несущественной. Для простоты можно предположить, что внутренняя энергия вообще не зависит от инварианта  $I_2(\Lambda)$ . Тогда получим более простое определяющее уравнение

$$\tau_e = 2\mu \left( \frac{1}{3} I_1 \mathbf{E} - \Lambda \right) \equiv -2\mu \lambda, \quad \mu \equiv 2 \frac{\partial \eta \mathcal{U}}{\partial I_1}, \quad \mu \quad (6.7)$$

Чтобы яснее представить себе потери, связанные с переходом от уравнения (6.4) к уравнению (6.7), рассмотрим случай сферически симметричной деформации полого шара

$$\mathbf{u} = F(r)\mathbf{e}_r \quad \Rightarrow \quad \mathbf{g} = a\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + b(\mathbf{E} - \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r),$$

$$a \equiv 1 - \frac{dF}{dr}, \quad b \equiv 1 - \frac{F}{r}.$$

\* Это допущение всегда принимается и в линейной, и в нелинейной теории упругости. Однако не существует физических аргументов, оправдывающих это допущение.

Тогда для мер деформации имеем

$$\lambda = \frac{b^2 - a^2}{3\sqrt[3]{a^2b^4}} (\mathbf{E} - \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r), \quad \lambda^2 - \frac{\sigma}{9} \mathbf{E} = -\frac{\sigma}{18} (\mathbf{E} -$$

$$\sigma = \frac{2(b^2 - a^2)^2}{\sqrt[3]{a^4b^8}}.$$

Для однородной деформации сплошного шара верны равенства

$$F(r) = \lambda r, \quad \lambda = \text{const} \Rightarrow a = b,$$

и девиатор тензора напряжений равен нулю, как это и должно быть. В этом случае выражения (6.4) и (6.7) совпадают. Если же  $a \neq b$ , то между выражениями (6.4) и (6.7) имеется качественное различие. А именно, уравнение (6.7) показывает отсутствие напряжений на площадках  $r = \text{const}$ , а выражение (6.4) дает нормальные напряжения на этих площадках. Без специального анализа трудно сказать, насколько существенным является учет упомянутых нормальных напряжений. С формальной математической точки зрения переход от выражения (6.4) к уравнению (6.7), конечно, упрощает теорию и потому весьма желателен. Однако с интуитивной точки зрения зависимость внутренней энергии от параметра  $\sigma$  кажется более разумной, нежели зависимость от параметра  $I_1$ , но ведет к серьезным усложнениям. Если, например, внутренняя энергия является функцией параметра  $\sqrt{\sigma}$ , то выражение (6.4) не допускает линеаризации и принимает вид

$$\tau_c = -6 \frac{\partial \eta \mathcal{U}}{\partial \sigma} \left( \lambda^2 - \frac{\sigma}{9} \mathbf{E} \right) = -\frac{3}{\sqrt{\sigma}} \frac{\partial \eta \mathcal{U}}{\partial \sqrt{\sigma}} \left( \lambda^2 - \frac{\sigma}{9} \mathbf{E} \right) \quad (6.8)$$

Определяющее уравнение (6.8) значительно сложнее, нежели уравнение (6.7). Однако имеется несколько правдоподобных аргументов, говорящих в пользу уравнения (6.8). Не менее сильные аргументы имеются в пользу полного уравнения (6.5), не допускающего переход к упрощенным уравнениям (6.7) или (6.8). Анализ этой ситуации оставим для будущих исследований.

## 7. УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ И ДИФФУЗИИ

Вернемся к уравнению (4.1), вводящему в рассмотрение энтропию и химический потенциал. В приведенном виде оно характеризует только суммарное влияние энтропии и химического потенциала на внутреннюю энергию. Чтобы яснее представить роль этих понятий в рассматриваемых процессах, а не только их участие в формировании внутренней энергии, перепишем уравнение (4.1) в виде двух равенств

$$-\nabla \cdot \mathbf{h}_1 + \rho q_1 - p_1 \nabla \cdot \mathbf{V} + \tau_f^T \cdot \cdot (\nabla \mathbf{V} + \mathbf{E} \times \boldsymbol{\omega}) + \mathbf{M}_f^T \quad (7.1)$$

$$-\nabla \cdot \mathbf{h}_2 + \rho q_2 - p_2 \nabla \cdot \mathbf{V} = \eta \frac{\delta \Psi}{\delta t} - Q. \quad (7.2)$$

В уравнениях (7.1) и (7.2) принято

$$\mathbf{h} = \mathbf{h}_1 + \mathbf{h}_2, \quad q = q_1 + q_2, \quad p_f = p_1 + p_2.$$

Кроме того, в уравнения (7.1) и (7.2) введено дополнительное слагаемое  $Q$ , которое описывает скорость обмена энергиями в процессах теплопроводности и диффузии. Понятно, что разбиение равенства (4.1) на два уравнения (7.1) и (7.2) всегда осуществимо при соответствующем подборе значения  $Q$ . В общем случае весьма затруднительно сделать обоснованный выбор определяющих уравнений для потоков энергии  $q_1$  и  $q_2$ . Для векторов потока энергии примем простейшие уравнения

$$\mathbf{h}_1 = a_{11} \nabla \mathcal{H} + a_{12} \nabla \Psi, \quad \mathbf{h}_2 = a_{21} \nabla \mathcal{H} + a_{22} \nabla \Psi, \quad (7.3)$$

где коэффициенты  $a_{12}$  и  $a_{21}$  характеризуют связанность тепловых и диффузионных потоков энергии; иногда их можно считать малыми или вообще равными нулю; коэффициенты  $a_{11}$  и  $a_{22}$  называются коэффициентами теплопроводности и диффузии соответственно.

При принятии равенств  $a_{12} = a_{21} = a_{22} = 0$  определяющие уравнения (7.3) переходят в известный закон Фурье-Стокса с тем различием, что вместо градиента температуры он содержит градиент энтропии. С физической точки зрения принятое определяющее уравнение кажется правдоподобным, но во многих случаях указанное различие несущественно. Следует подчеркнуть, что уравнения (7.1) и (7.2) определяют только общие контуры. Отдельных и отнюдь не очевидных рассуждений требуют формулировки определяющих уравнений для величин, входящих в уравнения (7.1) и (7.2). Эти рассуждения оставим за рамками данной работы и ограничимся только указанием на их физический смысл и процессы, за которые они ответственны. Вполне ясен смысл величин  $p_1, p_2, \boldsymbol{\tau}_f^T, \mathbf{M}_f^T$  — они отвечают за внутреннее трение в среде, т.е. за переходы энергии из одной формы в другую внутри среды. Величины  $q_1$  и  $q_2$  отвечают за взаимодействие с окружающей средой. При этом следует иметь в виду, что окружающая среда реально существует во всех точках пространства, в том числе и внутри рассматриваемого тела. Например, электромагнитное поле существует как внутри тела, так и вне его. Если мы хотим учесть радиационное облучение тела, то его влияние войдет в обсуждаемые уравнения через величины  $q_1$  и  $q_2$ . Воздействие на вещество пучками заряженных частиц [21] также описывается величинами  $q_1$  и  $q_2$ . Поэтому роль величин  $q_1$  и  $q_2$  во многих случаях очень велика, но проблема их правильного и обоснованного выбора еще ждет своего решения. Понятно, что нельзя игнорировать потоки энергии  $Q, q_1$  и  $q_2$ , если в среде происходят химические реакции.

На этом общие построения заканчиваются. Проблема свелась к построению определяющих уравнений, т.е. к заданию внутренней энергии. Здесь мы вступаем на крайне зыбкую почву. С одной стороны, мы располагаем огромным экспериментальным материалом и знанием того, что происходит в материале. С другой стороны, адекватные математические модели разработаны только для термоупругих материалов. Поэтому необходимы более общие математические модели для описания реальных процессов, идущих в материале.

Без этого механика никогда не сможет принять активное участие в разработке современных технологий. Каковы бы ни были трудности, возникающие на этом пути, они должны быть преодолены. Разумеется, автор не знает всех необходимых для этого рецептов. Поэтому все нижеследующие рассуждения носят качественный характер.

## 8. ОПРЕДЕЛЯЮЩЕЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ УПРУГОГО ДАВЛЕНИЯ

Часто можно считать, что упругая часть давления является линейной функцией температуры

$$p_e(\rho, \psi, \mathcal{H}, I_1, I_2) = f_1(\rho, \psi, I_1, I_2) + f_2(\rho, \psi, I_1, I_2)\vartheta, \quad (8.1)$$

где предполагается, что задано определяющее уравнение, связывающее энтропию и температуру.

Интуитивно кажется ясным, что для качественного рассмотрения аппроксимация (8.1) вполне приемлема. Во всяком случае, именно такой вид имеют наиболее популярные в физике уравнения состояния Ван-дер-Ваальса и Ми-Грюнайзена. В частности, уравнение Ван-дер-Ваальса в принятых обозначениях имеет вид

$$p(\zeta, \vartheta) = -\frac{a}{\zeta^2} + \frac{c\vartheta}{\zeta - b}, \quad \zeta = \frac{\rho_0}{\rho},$$

где  $a$ ,  $b$  и  $c$  суть постоянные материала.

Известно, что уравнение Ван-дер-Ваальса хорошо описывает поведение реальных газов. Интуитивно кажется очевидным, что уравнение (8.1) при соответствующем выборе функций  $f_1$  и  $f_2$  должно хорошо описывать не только газы и жидкости, но и твердые тела с фазовыми переходами. Качественный вид функции  $f_1(\zeta)$ , которая, с формальной точки зрения, описывает давление при нулевой температуре  $\vartheta = 0$ , представлена на рис. 1.

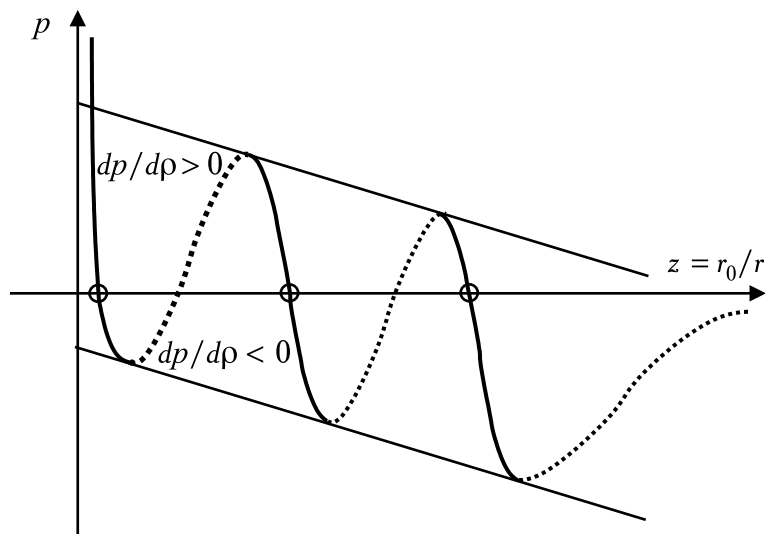


Рис. 1. Определяющее уравнение для давления при нулевой температуре

Давление считается положительным при сжатии. Представленная на рис. 1 зависимость характерна для материалов, упрочняющихся как при сжатии, так и при растяжении. Сплошной линией на диаграмме представлены участки устойчивого деформирования. Пунктирная линия соответствует участкам неустойчивого деформирования, причем на этих участках отсутствуют положения статического равновесия. Кружочками на диаграмме обозначены положения устойчивого равновесия материала при нулевом давлении. Число устойчивых равновесных положений зависит от свойств материала. Например, для снега, тонких порошков, грунтов и других аналогичных материалов число устойчивых равновесных положений очень велико. Рассмотрим изотермическое нагружение шара давлением. Допустим, что в исходном состоянии плотность материала соответствовала крайнему правому кружочку на диаграмме. Начнем теперь медленно увеличивать давление. При этом шар будет квазистатически сжиматься, и мы будем двигаться от правого крайнего кружочка влево-вверх по сплошной линии диаграммы. Когда давление достигнет первой критической величины, соответствующей локальному максимуму диаграммы, квазиравновесное деформирование становится невозможным, а в материале начинается структурная перестройка, сопровождающаяся быстрым самопроизвольным увеличением плотности при почти постоянном давлении. Иными словами, происходит твердотельный фазовый переход. Скорость этого фазового перехода определяется свойствами материала, но не свойствами внешних обстоятельств. Это будет продолжаться до тех пор, пока мы снова не попадем на сплошную линию. При дальнейшем медленном увеличении давления плотность будет медленно (квазистатически) возрастать, пока не будет достигнут следующий локальный максимум. Если, не достигнув второго локального максимума, мы начнем снижать давление до нуля, то попадем в средний кружочек на диаграмме, который соответствует устойчивому состоянию материала с повышенной плотностью. Иными словами, происходит пластическое деформирование шара. Весь описанный процесс отчетливо наблюдался в опытах Бриджмена [8]. Если теперь начать процесс растяжения шара, т.е. начать прикладывать отрицательное давление, то от среднего кружочка мы начнем двигаться по сплошной линии диаграммы вправо-вниз, при этом будет идти процесс квазистатического растяжения шара. Когда мы достигнем локального минимума, то произойдет срыв и начнется самопроизвольное уменьшение плотности материала при почти постоянном давлении. Если материал обладает свойством упрочнения (как это имеет место на изображенной диаграмме), то мы вновь попадем на участок устойчивого растяжения. При дальнейшем увеличении растягивающего давления мы достигнем крайнего правого локального минимума, в котором произойдет разрушение шара. Следует подчеркнуть, что учет конечности прочности материала на разрыв строго обязателен для определяющих уравнений реальных материалов. Кроме того, обратим внимание на тот факт, что в точках локальных минимумов и максимумов происходит нарушение условий так называемой сильной эллиптичности. Разумеется, нарушаются и постулаты типа популярного постулата Драккера. С математической точки зрения это, конечно, неприятно, но так уж устроена природа вещей. Легко понять, что зависимости, типа указанных на рис. 1, принципиально не могут

быть найдены из эксперимента. Однако огибающие истинной диаграммы могут быть установлены и фактически определяются на основе эксперимента. Причем верхняя огибающая описывает свойства материала при сжатии, а нижняя огибающая описывает прочность материала на разрыв. Что касается функции  $f_2$ , то, видимо, ее допустимо принять в той же форме, что и в уравнении Ван-дер-Ваальса. Это возможно, по крайней мере, при качественных рассмотрении. Достаточно общий вид определяющего уравнения для давления дается следующим выражением:

$$p_e = \sum_{k=2}^N a_k(\psi, I_1, \sigma) \zeta^{-k} + \frac{c(\psi, I_1, \sigma) \mathcal{H}}{\zeta - b(\psi, I_1, \sigma)} + a_0(\psi, \mathcal{H}) \quad (8.2)$$

где  $N$  характеризует число фазовых переходов, которые включаются в рассмотрение; параметры  $a_k, c, b$  суть характеристики материала; функция  $a_0(\psi, \mathcal{H})$  описывает давления, независимые от плотности, которые обычно в теории неупругих материалов не рассматриваются. Давления, отвечающие функции  $a_0(\psi, \mathcal{H})$ , будем называть радиационными давлениями\*. Их учет необходим, если мы хотим учесть такие явления, как испарение твердых частиц и их превращение в газообразную фазу. При этом масса сохраняется, но число частиц резко увеличивается, что и является причиной роста давления. В уравнении (8.2) вместо температуры используется энтропия, что является более последовательным, хотя и менее привычным. Одним из простейших является следующее определяющее уравнение:

$$p = f_0(\zeta^{-m} - \zeta^{-n}) + \frac{c\mathcal{H}}{\zeta - b}, \quad m > n \geq 2, \quad \zeta > b. \quad (8.3)$$

Это уравнение содержит пять параметров ( $f_0, m, n, c, b$ ), которые позволяют описать достаточно широкие классы материалов, но, конечно, уравнение (8.3) не является универсальным. Нетрудно построить фазовые диаграммы, отвечающие уравнению (8.3), при различных значениях температуры. Примерный вид зависимостей давления от плотности при некоторых значениях температуры представлен на рис. 2, где приняты значения  $m = 5, n = 3$ .

Уравнение (8.3) соответствует двухфазной среде. В более общем случае коэффициенты уравнения (8.2) должны подбираться так, чтобы уравнение состояния имело вид, представленный на рис. 3.

Жирные кривые на рис. 2 разделяют различные фазы материала. Ниже нижней жирной линии материал находится в твердой фазе. Между жирными кривыми материал находится в жидкой фазе. Выше верхней жирной линии материал находится в газообразной фазе. При нулевой энтропии среда находится в твердой фазе, плотность которой при нулевом давлении равна  $\zeta = 1$  или  $\rho = \rho_0$ . Мы опускаем дальнейшее обсуждение фазовых диаграмм, поскольку оно достаточно стандартно, хотя сами фазовые диаграммы для уравнения типа (8.3) ранее, видимо, не встречались.

\* В механике [22] радиационными давлениями называют другое понятие. Используемое в данной работе понятие ближе, но не тождественно, к понятию давления электромагнитного излучения [23].

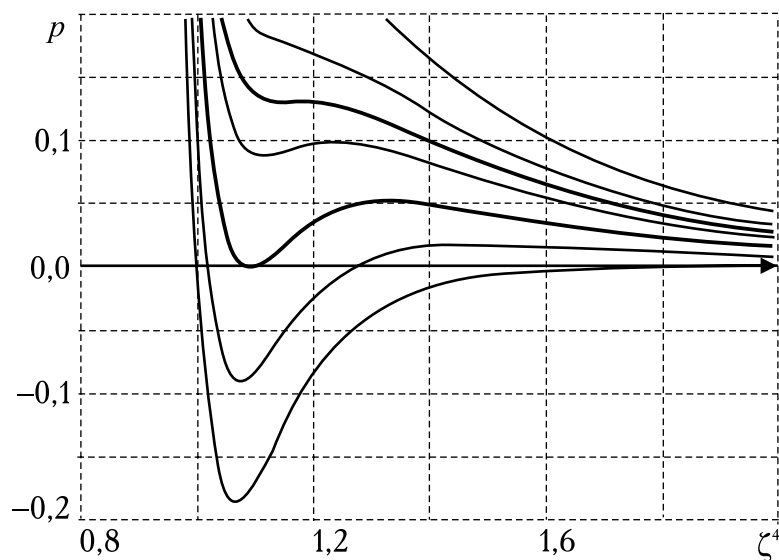


Рис. 2. На рисунке разные кривые отвечают разным энтропиям: чем выше энтропия, тем выше расположена кривая

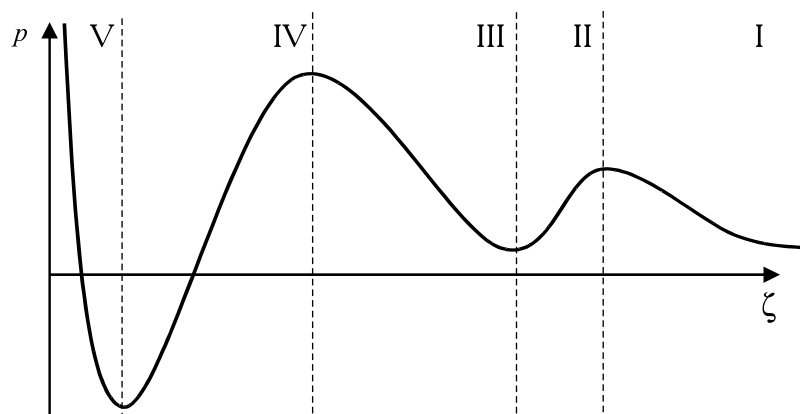


Рис. 3. Определяющее уравнение для трехфазной среды: зоны I, III, V отвечают устойчивым газовой, жидкой и твердой фазам соответственно; зоны II, IV соответствуют метастабильным состояниям

## 9. ЗАДАНИЕ ВНУТРЕННЕЙ ЭНЕРГИИ

Выше было показано, что почти вся информация о физических свойствах рассматриваемой среды заключена в структуре внутренней энергии. С одной стороны, это облегчает работу. Но, с другой стороны, ясного решения проблема задания внутренней энергии до сих пор не получила. Более того, ниже будет показано, что здесь имеются существенные затруднения.

При обсуждении возможной формы задания внутренней энергии будем исходить из соотношений Коши~Грина (6.2)

$$p_e = \rho^2 \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \frac{\eta \mathcal{U}}{\rho} \right) = - \frac{\partial(\zeta \eta \mathcal{U})}{\partial \zeta}, \quad \vartheta = \frac{1}{\eta} \frac{\partial \eta \mathcal{U}}{\partial \mathcal{H}},$$

Принимая для давления определяющее уравнение (8.2) и интегрируя первое из вышенаписанных соотношений, получаем

$$\begin{aligned} \zeta \eta \mathcal{U} = & \sum_{k=2}^N \frac{a_k(\psi)}{k-1} \zeta^{-(k-1)} + c(\psi) \ln [\zeta - b(\psi)] \mathcal{H} + \\ & + d(\psi, I_1, \sigma, \mathcal{H}) + a_0(\psi, \mathcal{H}) \zeta, \end{aligned} \quad (9.1)$$

где функция  $d(\psi, I_1, \sigma, \mathcal{H})$  подлежит дальнейшему определению, и принято, что давление не зависит явно от тензора формоизменения; последнее слагаемое обычно называют тепловой энергией.

Конкретное задание внутренней энергии полностью решает проблему построения общей теории неупругих сред, но это — не простая задача, даже при принятии относительно простого представления (9.1). На первый взгляд выражение (9.1) кажется неудовлетворительным. Действительно, как отмечалось во введении, при больших давлениях и, следовательно, при больших плотностях все тела становятся подобными жидкости, т.е. дивергент тензора упругих напряжений должен стремиться к нулю при  $\zeta \rightarrow 0$ . Однако выражение (9.1) показывает, что при стремлении плотности к бесконечности дивергент стремится к бесконечности. Действительно, согласно (6.4) и (9.1) имеем

$$\tau_e = - \frac{2}{\zeta} \left[ \frac{\partial d(\psi, I_1, \sigma, \mathcal{H})}{\partial I_1} \lambda + 3 \frac{\partial d(\psi, I_1, \sigma, \mathcal{H})}{\partial \sigma} (\lambda^2 - \right. \quad (9.2)$$

Как видим, ни при каком виде функции  $d(\psi, I_1, \sigma, \mathcal{H})$  нельзя устранить зависимость дивергента от плотности (давления). Добиться ограниченности дивергента при стремлении плотности к бесконечности можно только за счет правильного выбора зависимости модуля сдвига от температуры и химического потенциала. Здесь существует много возможностей, обсуждение которых выходит за рамки данной работы. На дивергент накладываются дополнительные ограничения: касательные напряжения должны быть ограничены по модулю и должен проявляться эффект Савара~Массона. Этого также можно достичь разными путями. Например, использовать модель типа Френкеля~Конторовой [20], трехмерный аналог которой можно выразить следующим представлением:

$$\frac{\partial d(\psi, I_1, \sigma, \mathcal{H})}{\partial I_1} = \mu_0(\psi, \mathcal{H}) \Theta \left[ \cos \frac{\pi(I_1 - 3)}{2l_*(\psi, \mathcal{H})} \right], \quad (9.3)$$

где  $l_*$  есть некоторая характеристика материала, зависящая от энтропии и химического потенциала,  $\Theta(x)$  есть характеристическая функция области  $x \geq 0$ : она равна единице при  $x \geq 0$  и нулю в остальных случаях.



## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение перечислим систему уравнений, к решению которых сводится анализ той или иной конкретной задачи. Основными неизвестными являются: плотность частиц  $\eta(\mathbf{x}, t)$  и плотность массы  $\rho(\mathbf{x}, t)$ . Задание функции  $\eta(\mathbf{x}, t)$  определяет и само тело, относительно которого считается, что оно известно в начальный момент времени. Обычно для этого достаточно решить статическую задачу. Для определения эволюции указанных функций служат уравнения баланса частиц и массы. При этом необходимо задать правую часть уравнения (2.1), т.е. функцию  $\chi(\eta, \rho, \mathcal{H}, \psi)$ . К этим уравнениям необходимо добавить первый (3.7) и второй (3.8) законы динамики, а также уравнения теплопроводности (7.1) и диффузии (7.2) с соответствующими определяющими уравнениями для потоков энергии. Далее необходимо конкретизировать задание внутренней энергии (9.1). Следует обратить внимание на то, что фазовые переходы в среде могут быть получены только при рассмотрении полной динамической задачи. Непривычным является тот факт, что решать необходимо задачу с начальными данными, а никаких краевых условий не требуется. Наличие стенок и препятствий другого рода необходимо моделировать объемными силами, как это кратко указано в [5]. В целом теория получается довольно сложной для численной реализации, но стремительное развитие численных методов позволяет надеяться, что эта задача не безнадежна.

Здесь автор вынужден остановиться и не только в силу ограниченности объема статьи. Чтобы использовать изложенную выше теорию для каких-либо полезных целей, необходимы дальнейшие конкретизации и дополнительные исследования. Наиболее сложной является проблема построения определяющего уравнения для девиатора тензора упругих напряжений. Уравнение (9.3) — всего лишь одна из возможностей и, возможно, далеко не лучшая. Автор надеется, что в работе удалось показать направление и содержание исследований, проведение которых необходимо для построения теории неупругих сред с фазовыми переходами.

Автор благодарен академику РАН Н.Ф. Морозову за внимание к работе.

### Литература

1. Годунов С.К. Элементы механики сплошной среды. М., Наука, 1978, 303 с.
2. Пальмов В.А. Колебания упруго-пластических тел. М., Наука, 1976, 328 с.
3. Micro- and Macrostructural Aspects of Thermoplasticity. Eds.: O.T. Bruhns, E. Stein. In: Proc. IUTAM Symp. Bochum, Germany, 1997.
4. Naghdi P.M. A critical review of the state of finite plasticity. J. Appl. Math. and Phys. (ZAMP), v. 41, 1990, p. 315–394.
5. Жилин П.А. Основные уравнения теории неупругих сред. В сб.: Тр. XXVIII летней школы "Актуальные проблемы механики". С.-Пб., 2001, с. 14–58.
6. Zhilin P.A. Phase transitions and general theory of elasto-plastic bodies. В сб.: Труды XXIX летней школы "Актуальные проблемы механики". С.-Пб., 2002, с. 36–48.

7. Белл Дж.Ф. Экспериментальные основы механики деформируемых твердых тел, ч. 1. М., Наука, 1984, 597 с.
8. Белл Дж.Ф. Экспериментальные основы механики деформируемых твердых тел, ч. 2. М., Наука, 1984, 432 с.
9. Хилл Р. Математическая теория пластичности. М., ГИТТЛ, 1956, 407 с.
10. Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. М., Наука, 1980, 512 с.
11. Zhilin P.A. A new approach to the analysis of free rotations of rigid bodies. J. Angew. Math. Mech. (ZAMM), v. 76, 1996, № 4, p. 187–204.
12. Картан Э. Теория конечных непрерывных групп и дифференциальная геометрия, изложенные методом подвижного репера. М., Изд-во МГУ, 1963, 367 с.
13. Терминология термодинамики. Под ред. А.М. Терпигорев. М., Изд-во АН СССР, 1952, 56 с.
14. Green G. On the laws of reflection and refraction of light at the common surface of two non-crystallized media. Trans. Phil. Soc., Cambridge, v. 7, 1839.
15. Zhilin P.A. Mechanics of deformable directed surfaces. Int. J. Solids Struct., 1976, v.12, p. 635–648.
16. Жилин П.А. Основные уравнения неклассической теории оболочек. Механика и процессы управления. С.-Пб., Труды СПбГТУ, №386, 1982, с. 29–46.
17. Трусделл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М., Наука, 1975, 592 с.
18. Truesdell C. Rational Thermodynamics. Springer-Verlag, N.Y., 1984, 578 p.
19. Курант Р. Уравнения с частными производными. М., Мир, 1964, 830 с.
20. Френкель Я.И. Введение в теорию металлов. М., ГИФМЛ, 1958, 368 с.
21. Бойко В.И., Скворцов В.А., Фортвов В.Е., Шаманин И.В. Взаимодействие импульсных пучков заряженных частиц с веществом. М., Наука, 2003, 287 с.
22. Зарембо Л.К., Красильников В.А. Введение в нелинейную акустику. М., Наука, 1966, 519 с.
23. Кузнецов Н.М. Термодинамические функции и ударные адиабаты воздуха при высоких температурах. М., Машиностроение, 1965, 463 с.

*Статья поступила в редакцию 6 января 2004 года*