Работа выполнена в лаборатории прочности отдела гидротурбин Центрального научно-исследовательского и проектно-конструкторского котлотурбинного института им. И. И. Ползунова.

Научный руководитель

член-корреспондент АН СССР, доктор технических наук, профессор И. А. Лурье.

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук В. К. ПРОКОПОВ;
кандидат технических наук, ст. научн. сотрудник В. А. ЗАРУЦКИЙ.

Передовое предприятие — Институт проблем механики АН СССР.

Автореферат разослан « » . . . . 1968 г.

Защита диссертации состоится « » . . . . 1968 г. на открытом заседании Ученого Совета физико-механического факультета Ленинградского ордена Ленина Политехнического института имени М. И. Калинина.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке института.

ЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ РЕБРИСТЫХ ОБОЛОЧЕК

Теория ребристых оболочек (ТРО) является разделом общей теории оболочек (ОТО), быстро развивающимся в последние годы. Интерес и внимание, проявляемые к ней, объясняются не только ее научной значимостью, но главным образом тем, что ребристые оболочки и пластины обладают многими замечательными свойствами, весьма важными для техники.

Первые задачи, относящиеся к ТРО, рассматривались в работах И. Г. Бубнова, Б. Г. Галеркина, С. П. Тимошенко и др. еще в начале XX века. Однако сама теория ребристых оболочек оставалась на уровне частных задач вплоть до конца сороковых — начала пятидесятых годов. Именно к этому сроку следует отнести рождение ТРО как самостоятельного раздела общей теории оболочек. Впервые основные принципы ТРО были сформулированы А. И. Лурье в 1948 году. Общие уравнения равновесия ребристых оболочек выводились на основе вариационного принципа минимума потенциальной энергии. Энергия ребристой оболочки определялась как сумма энергии оболочки и энергии ребер. Другая идея вывода уравнений равновесия ребристых оболочек была предложена В. З. Власовым в 1949 году. Согласно этой идее ребра отрезались от оболочки, а их воздействие на оболочку заменялось некими усилиями и моментами, подлежащими последующему определению. Кроме того привлекалось контактное условие, состоящее в отождествлении деформированных состояний оболочки и стержневой системы, подкрепляющей оболочку. *Общим для обоих вариантов ТРО является то, что для построения теории ребристых оболочек привлекаются две теории: теория оболочек и теория стержней.* Отличие состояло в том, что А. И. Лурье трактовал ребра как стержни Кирхгофа—Клебша, а В. З. Власов рассматривал их как тонкостенные стержни.

Дальнейшее развитие ТРО идет в основном по этим двум направлениям. Типичными представителями первого являются Е. С. Гребень и В. А. Заруцкий, а второго — Л. А. Ильин и Н. А. Карков.

В настоящее время известен ряд других подходов к построению ТРО, но они уступают вариантам ТРО А. И. Лурье и В. З. Власова как в смысле общности, так и в части разработанности. Кроме уже перечисленных авторов в развитии ТРО принимали и принимают участие С. А. Амбарцумян, Л. И. Балабух, Д. В. Вайнберг, Е. Я. Герцберг, Г. А. Кизима, Н. А. Кильчевский, А. А. Назаров, Н. А. Назаров, В. К. Прокопов, В. М. Рябов, Г. Н. Савин, А. Л. Синявский, Н. П. Флейшман и др.*

В современной теории ребристых оболочек уже получено немало интересных результатов. Однако приходится признать тот факт, что в настоящее время нет ни единой точки зрения на саму теорию, ни общих методов решения краевых задач ТРО. Следствием этого является отсутствие всестороннего анализа теории ребристых оболочек. Вместе с тем интенсивное развитие ТРО в последние годы позволяет надеяться, что уже в ближайшее время анализ краевых задач ТРО будет в основном завершен в том смысле, что он будет сведен к анализу проблем классической теории оболочек.

Представленная работа ставит своей целью способствовать развитию ТРО. Работа выполнена в традиционном плане и состоит из трех глав.

I. В первой главе излагаются взгляды автора на современное состояние ТРО. Приводятся краткие исторические справки и обсуждаются современные методы решения краевых задач ТРО. Подробно обсуждается применение тригонометрических рядов к решению краевых задач для оболочек вращения с меридиональными ребрами. Известно и в 1-й главе это показано, что такой путь приводит к бесконечным системам дифференциальных уравнений. Интересно, что диагональные члены в этой бесконечной системе соответствуют схеме конструктивной анизотропии. Этот факт говорит о том, что к решению бесконечной системы посредством ее усечения надо подходить с известной осторожностью. Отмечаются слабые места метода тригонометрических рядов; в частности то, что они сходятся лишь в обобщенном смысле.

* Следует подчеркнуть, что под ТРО здесь всегда понимается теория, учитывающая дискретное распределение ребер.

II. Вторая глава посвящена общей теории ребристых оболочек ОТРО. При построении ОТРО в основном преследовались две цели: 1) уменьшить до минимума число исходных посылок и 2) максимально сблизить ОТРО и классическую теорию оболочек для того, чтобы полнее использовать достижения последней при анализе краевых задач ТРО. Первая из них предопределила отказ от построения ОТРО на базе объединения теории оболочек и теории стержней, поскольку гипотезы, лежащие в их основе, не всегда совместны. Вместо этого в работе содержится утверждение, что ребристую оболочку можно рассматривать как оболочку переменной толщины. Это единственное неустранимое допущение, на котором базируется вся теория ребристых оболочек, построенная в работе. Построение ТРО распадается на несколько этапов.

На первом этапе задается геометрия ребристой оболочки. Прежде всего выбирается базисная поверхность, с которой связывается нормальная система кординат. В классической теории оболочек в качестве базисной обычно выбирается срединная поверхность. Однако в ТРО этого сделать невозможно, поскольку невозможно установить взаимно однозначное соответствие между точками трехмерной области, занятой ребристой оболочкой, и нормальной системой координат, связанной со срединной поверхностью. Поэтому в качестве базисной поверхности для ребристой оболочки выбирается поверхность, которая является срединной для оболочки с мысленно отрезанными ребрами. Пусть ξ^1, ξ^2, z — произвольная нормальная система координат, где z отсчитывается по нормали к базисной поверхности s, которую зададим уравнением

$$r = r\,(\xi^1, \xi^2). \qquad (\text{П. 1})$$

Тогда поверхности, ограничивающие оболочку, задаются уравнениями:

$$\underline{R}^{\pm} = \underline{r} \pm z^{\pm}\underline{a}_3 \qquad (\text{II. 2})$$

Здесь

$$z^{\pm} = \frac{1}{2}h + \sum_{k=1}^{n}\gamma_k(\xi)\,h^{\pm}_{2k}(\xi^2) + \sum_{k=1}^{m}\gamma_k(\xi^2)\,h^{\pm}_{1k}(\xi^1), \qquad (\text{II. 3})$$

где $h=\text{const}$ — толщина оболочки между ребрами;

$h^{\pm}_{1k}(\xi^1)$ — высота k-го верхнего (нижнего) ребра, расположенного в направлении ξ^1;

$h_{2k}^{\pm}(\xi)^2$ — высота k-го верхнего (нижнего) ребра, расположенного в направлении ξ^2;

$\gamma_k(\xi^\alpha)$ — характеристические функции:

$$\gamma(\xi_\alpha) = \theta(\xi_\alpha - \xi_k^\alpha + \varepsilon_k^\alpha) - \theta(\xi_\alpha - \xi_k^\alpha - \varepsilon_k^\alpha),$$

$\Theta(x)$ — характеристическая функция области $x \geqslant 0$,

n, m — числа ребер.

Теперь можно приступить к второму этапу, т. е. к выводу уравнений динамики ребристых оболочек. Для этого запишем интегральные уравнения движения трехмерной упругой среды:

$$\int_O \underline{P} dO + \int_\Omega \rho(\underline{F} - \underline{b})\, d\Omega = 0;$$

$$\int_O \underline{R} \times \underline{P} dO + \int_\Omega \rho\, \underline{R} \times (\underline{F} - \underline{b})\, d\Omega = 0 \qquad \text{(III. 4)}$$

где O — полная поверхность, ограничивающая оболочку;

Ω — объем, занятый оболочкой;

$\underline{F}, \underline{b}$ — поля вектора массовых сил и вектора ускорений;

$\underline{P}$ — поле вектора напряжения.

Приводя в (П. 4) интегрирование по z и применяя теорему Остроградского — Гаусса, получим:

$$\nabla_\alpha N^{\alpha\gamma} - b_\alpha^\gamma Q^\alpha + E_{(0)}^\gamma = b_{(0)}^\gamma, \quad \nabla_\alpha Q^\alpha + b_{\alpha\gamma} N^{\alpha\gamma} + E_{(0)}^3 = b_{(0)}^3,$$
$$\nabla_\alpha M^{\alpha\gamma} - Q^\gamma + E_{(1)}^\gamma = b_{(1)}^\gamma, \quad \varepsilon_{\gamma\beta}(N^{\gamma\beta} + b_\alpha^\beta M^{\alpha\gamma}) = 0. \qquad \text{(II. 5)}$$

Эти уравнения являются вполне точными и не зависят ни от каких гипотез. Из (П. 5) видно, что они не отличаются от уравнений движения классической теории оболочек.

На третьем этапе, к которому мы сейчас переходим, проявляется вся специфика теории ребристых оболочек. Приведем, например, выражение для тензора усилий $N^{\alpha\gamma}$

$$N^{\alpha\gamma} = \int_{z_\alpha^-}^{z_\alpha^+} \mu\tau^{\alpha\lambda}\mu_\beta^\gamma\, dz \qquad \text{(II. 6)}$$

Здесь $\mu = det\ (\mu_\beta^\alpha)$, $\mu_\beta^\alpha = \delta_\beta^\alpha - z b_\beta^\alpha$ — геометрический тензор сдвига; z_α^+ — линия пересечения поверхности z^+ с поверхностью $\xi^\alpha = \text{const}$. После ряда преобразований (II. 6) принимает вид:

$$N^{\alpha\gamma} = N_*^{\alpha\gamma} + \frac{1}{\sqrt{a_{33}}} \sum_k N^{\alpha\gamma} \frac{\gamma_k(\xi^\beta)}{2\varepsilon_k^\beta}, \quad \alpha \neq \beta, \qquad \text{(II. 7)}$$

где

$$N_*^{\alpha\gamma} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mu\tau^{\alpha\beta}\mu_\beta^\gamma\, dz, \quad N^{\alpha\gamma} = \int_{F_{\alpha k}^+} \mu\tau^{\alpha\beta}\mu_\beta^\gamma\, dF + \int_{F_{\alpha k}^-} \mu\tau^{\alpha\beta}\mu_\beta^\gamma\, dF, \qquad \text{(II. 8)}$$

$F_{\alpha k}^+, F_{\alpha k}^-$ — площади соответствующих ребер.

Если ребра достаточно тонкие, то допустимо сделать предельный переход при ширине ребра, стремящейся к нулю, т. е. при $\varepsilon_k^\beta \to 0 \to 0$. При этом получим

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\gamma_k(\xi^\beta)}{2\varepsilon_k^\beta} = \delta(\xi^\beta - \xi_k^\beta). \qquad \text{(II. 9)}$$

Дальнейшее преобразование соотношений упругости для ребристых оболочек не отличается от такового для гладких оболочек. В работе эти соотношения получены как с привлечением гипотез Кирхгофа—Лява, так и без них. Если ребра расположены по линиям главной кривизны, то соотношения упругости принимают простой вид даже в координатной записи и в физических составляющих тензоров.

Приведем, например, выражение для усилий T_1 и T_{12}, причем для физических составляющих возьмем обозначения Лява

$$T_1 = \frac{Eh}{1 - \nu^2}\left[\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2 - (1 + \nu)\alpha T_{(0)}\right] +$$
$$+ \frac{1}{A_2} \sum_k E_{(1k)} (F_{(1k)}\varepsilon_1 + S_{(1k)}\varkappa_1 - \alpha_{(1k)} T_{(k0)}^1)\, \delta(\alpha_2 - \alpha_{2k}), \qquad \text{(II. 10)}$$

$$T_{12} = Gh\omega + \sum_k \frac{1}{A_2} G_{(1k)} \left[F_{(1k)}\omega +\right.$$
$$\left. + S_{(1k)}(\tau_1 + \tau_2)\right]\delta(\alpha_2 - \alpha_{2k}). \qquad \text{(II. 11)}$$

Здесь $\alpha, \alpha_{(1k)}$ — коэффициенты линейных расширений оболочки и ребер; $T_{(0)}, T_{(k0)}^1$ — осредненные по z температуры в оболочке и в ребрах; $E, E_{(1k)}$ — модули упругости оболочки и ребер; $F_{(1k)}$ — площадь ребра; $S_{(1k)}$ — статический момент площади ребра. Выражения, аналогичные (П. 10) и (П. 11), имеют место и для величин: T_2, T_{21}, M_1, M_2, M_{12}, M_{21}.

Полученные в работе соотношения упругости не удовлетворяют шестому уравнению равновесия. В отличие от классической теории оболочки, в ТРО, по-видимому, невозможно построить соотношения упругости, обращающее в тождество шестое уравнение равновесия. Однако для достаточно тонких ребер, когда реакцией ребер на сдвиг и кручение можно пренебречь, такие соотношения построить можно. Они приведены в работе.

Подводя итоги, полезно сравнить общую теорию ребристых оболочек, построенную в работе, с ОТРО, основанной на объединении теории оболочек и теории стержней. Будем называть их вариантами Б и А соответственно.

1. В варианте А привлекаются две теории, т. е. нет единства метода, вариант Б формулируется единым методом в сущности по тому же плану, по которому строится общая теория оболочек.

2. Последовательное построение варианта А приводит к уравнениям двенадцатого порядка. В варианте Б основные уравнения имеют восьмой порядок, т. е. такой же, как и в классической ТО. Возрастание порядка уравнений в варианте А связано с тем, что в теорию вводятся величины, не имеющие смысла в теории оболочек, например, появляются четвертые производные от тангенциальных перемещений.

3. Вариант А существенно опирается на гипотезы Кирхгофа — Лява и плоских сечений. Вариант Б в принципе свободен от них.

4. Получение уравнений динамики с учетом температурных напряжений в варианте А может быть достигнуто ценой очень промоздких выкладок. Видимо поэтому такие уравнения до сих пор не получены. Более того, нет уравнений равновесия ребристых оболочек, в которых правильно бы учитывались массовые силы, если таковые имеются. В варианте Б эти уравнения получаются исключительно просто и быстро. Этому способствует применение тензорной символики.

5. В варианте А в теорию вводятся величины, выходящие за пределы точности теории оболочек, в варианте Б это исключено.

6. *Варианты А и Б можно привести в соответствие, если пренебречь реакцией ребра на сдвиг и кручение. Разумеется, речь идет о варианте Б, упрощенном введением гипотез Кирхгофа—Лява. Учитывая, что реакция тонких ребер на сдвиг и кручение невелика, можно сделать вывод о том, что для этого случая оба варианта ТРО равноценны.*

III. Третья глава посвящена решению некоторых краевых задач ТРО. Несмотря на то, что развитие ТРО тесно связано с развитием общей теории оболочек, краевые задачи ТРО весьма специфичны. Их специфика заключена, главным образом, в основных уравнениях и методах их решения. Своеобразие уравнений ТРО состоит в том, что их коэффициенты являются обобщенными сингулярными функциями. Пользуясь терминологией М. И. Вишика и Л. А. Люстерника, можно сказать, что мы имеем дело с краевыми задачами с бесконечно узкими барьерами. Известно, что решение таких задач является функциями типа погранслоя. Задача явного построения таких решений может быть решена различными методами.

Рассмотрим возможные методы:

1. Метод Стеклова — Фубини. Простейшими задачами, для которых решение строится в явном виде и притом весьма просто, являются краевые задачи для оболочек вращения, подкрепленных шпангоутами. Рассмотрим, например, осесимметричную деформацию цилиндрической оболочки, подкрепленной произвольным числом шпангоутов, расположенных на произвольном расстоянии друг от друга. В работе показано, что решение этой задачи сводится к интегрированию уравнения

$$h_*^2 \frac{d^4W}{d\xi^4} + \left[1 - \nu^2 + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \delta(\xi - \xi_k)\right] W =$$

$$= \frac{a^2}{B}\left[q_3 - \nu\left(\frac{C_1}{a} - \int_{\xi_0}^{\xi} q_1\, d\xi\right)\right], \qquad \text{(III. 1)}$$

где $\lambda_к = \dfrac{E_к F_к}{ab}$ — относительная жесткость ребра на растяжение; B — жесткость оболочки на растяжение; q_1, q_3 — компоненты внешней нагрузки; w — нормальный прогиб; ξ — меридиональная координата; $\delta(x)$ — дельта-функция.

Решение уравнения (1) представим в виде $w = w_0 + w_1$, где w_0 решение уравнения (1) при $\lambda_к = 0$, w_1 — дополнительное перемещение. Используя метод Стеклова—Фубини, для w_1 легко получить интегральное уравнение. Оно имеет вид:

$$W_1 = \sum_{m=1}^{4} K_m V_m - h_x^{-2} \sum_{m=1}^{4} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \int_{\xi_0}^{\xi_1} (w_0 + w_1)\delta(t - \xi_k) L_m(\xi, t)\, dt. \qquad \text{(III. 2)}$$

Здесь K_m — произволы интегрирования; $L_m(\xi, t)$, $v_m(\xi)$ — известные функции; причем $L_m(\xi, \xi) = 0$.

Поскольку ядро уравнения (2) содержит δ-функцию, то его решение сразу же записывается в явном виде

$$w_1 = \sum_{m=1}^{4} K_m v_m - h_*^{-2} \sum_{m=1}^{4} \sum_{k=1}^{h} \lambda_k \theta(\xi - \xi_k) \, | w_0(\xi_k) + \\ + w_1(\xi_k)] \, L_m(\xi, \xi_k) \qquad \text{(III. 3)}$$

где $\Theta(\xi-\xi_k)$ — характеристическая функция. В (3) вошли неизвестные числа $w_1(\xi_k)$, но их легко определить, записывая формулу (3) в точке ξ_k. Итак, формулой (3) дается полное решение задачи, удовлетворяющее всем необходимым требованиям.

2. Асимптотический метод Гольденвейзера — Вишика — Люстерника

Значительно более сложной является задача явного построения функции типа погранслоя вблизи меридиональных ребер (для оболочек вращения). Уравнение, описывающее деформированное состояние оболочки вращения с меридиональными ребрами, имеет вид:

$$L\underline{u} + \frac{h^2}{12} N\underline{u} + \sum_{k=1}^{n} M_k \underline{u} \, \delta(\varphi - \varphi_k) = q. \qquad \text{(III. 4)}$$

где L, N — дифференциальные операторы классической теории оболочек; M_k — дифференциальные операторы, зависящие от параметров ребер; u — вектор перемещений; q — вектор внешней нагрузки; φ — широтная координата.

Уже из вида уравнения (4) можно сделать ряд весьма важных выводов относительно характера решений этого уравнения. Прежде всего отметим две особенности принципиального характера: 1) перед старшими производными стоит малый параметр, 2) коэффициенты при операторах M_k являются обобщенными сингулярными функциями. Каждая из этих особенностей отражается на характере решений. Существенным здесь является то, что и первая и вторая особенности вызывают появление быстро меняющихся функций (типа погранслоя) в общем решении уравнения (4). Для того, чтобы яснее понять влияние каждой из особенностей, полное решение целесообразно представить в виде двух слагаемых:

$$\underline{u} = \underline{u}_0 + \underline{u}_1. \qquad \text{(III. 5)}$$

Причем часть решения $\underline{u}_0$ будем называть основным вектором перемещения и соответствующее ему напряженное состояние будем называть основным. Вектор $\underline{u}_0$ будем определять как решение уравнения

$$L\underline{u}_0 + \frac{h^2}{12} N\underline{u}_0 = \underline{q}, \qquad \text{(III. 6)}$$

т. е. u_0 есть решение уравнений классической теории оболочек для заданной внешней нагрузки. Кроме того потребуем, чтобы оно удовлетворяло заданным краевым условиям на параллельных кругах $\xi=\xi_0$, $\xi=\xi_1$ (ξ — меридиональная координата).

Подставляя (5) в (4) и учитывая (6), для определения u_1 получим уравнение

$$L\underline{u}_1 + \frac{h^2}{12} N\underline{u}_1 + \sum_{k=1}^{n} M_k u_1 \delta(\varphi - \varphi_k) = - \sum_{k=1}^{n} M_k \underline{u}_0 \, \delta(\varphi - \varphi_k) \qquad \text{(III. 7)}$$

Вектор $\underline{u}_1$ будем называть дополнительным и соответствующее ему напряженное состояние — дополнительным. Заметим, что $\underline{u}_1$ должен удовлетворять однородным условиям на краях $\xi=\xi_0$, $\xi=\xi_1$. В характере решения уравнения (7) отражается то новое, что вносится в ТРО по сравнению с классической теорией оболочек. Точное решение уравнения (7) возможно только в одном частном случае, который будет рассмотрен ниже. Поэтому главное значение приобретают приближенные методы, среди которых метод асимптотического интегрирования занимает ведущее положение. Асимптотические методы в теории дифференциальных уравнений стали весьма популярными после появления фундаментальных работ Я. Д. Тамаркина в начале этого века. Применительно к теории оболочек эти методы получили детальное развитие в работах А. Л. Гольденвейзера. Задачи А. Л. Гольденвейзера и математически родственные им получили законченную формулировку в работах М. И. Вишика и Л. А. Люстерника. Хотя подход Гольденвейзера — Вишика — Люстерника является не единственно возможным, тем не менее он является одним из наиболее плодотворных. Именно этот подход к анализу краевых задач ТРО реализуется в данной работе. При этом решение уравнения (7) строится в два этапа. На первом этапе, согласно основной идее работ М. И. Вишика и Л. А. Люстерника, а также О. А. Олейник, формулируются так называемые условия склейки на линиях разрыва ($\varphi=\varphi_k$). На втором этапе решение ничем не отличается от обычного подхода Гольденвейзера — Вишика — Люстерника. Как известно, характер асимптотического решения существенно зависит от того, совпадают ли линии разрыва (в данном случае линии контакта ребра с оболочкой) с асимптотическими линиями на базисной поверхности или нет. Для оболочек вращения с меридиональными ребрами это означает, что необходимо отличать оболочки нулевой гауссовой кривизны от всех прочих оболочек вращения. Поэтому и решения для этих классов оболочек в работе строятся раздельно. До конца в работе определены только головные члены асимптотических разложений, что гарантирует точность «Геккелерова приближения». Остальные члены в асимптотических разложениях могут быть определены обычным путем.

Не останавливаясь на деталях решения, подчеркнем следующее: при решении краевых задач ТРО полное напряженное состояние удобно разбивать на два — основное и дополнительное. Оказывается, что дополнительное напряженное состояние носит характер краевого эффекта. Тип краевого эффекта зависит от вида базисной поверхности.* Для оболочек нулевой гауссовой кривизны дополнительное напряженное состояние носит характер обобщенного краевого эффекта, для всех прочих оболочек вращения — простого краевого эффекта. Эти краевые эффекты определяют концентрацию окружных напряжений вблизи ребра. Величина этой концентрации зависит от относительных жесткостей ребер, а начиная с некоторого n (n — число ребер) и от числа ребер. Величина концентрации напряжений начинает зависеть от числа ребер тогда, когда расстояния между соседними ребрами становятся настолько малыми, что краевые эффекты от них начинают накладываться друг на друга.

Достоинством асимптотических методов является возможность построения простых расчетных формул. Рассмотрим, например, торообразную оболочку, подкрепленную малым числом меридиональных ребер и находящуюся под внутренним давлением p. В работе получена следующая формула для окружных напряжений под ребром

$$\sigma_{2\max}=\frac{pR}{2h}\left[1 \pm \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{1-\nu^2}}\,\frac{a}{a+\sqrt{8h_*}\sqrt[4]{(1-\nu^2)^3}}\left(1-\nu+\frac{1}{1+b\sin\theta}\right)\right],$$

* Напомним, что речь идет об оболочках вращения с меридиональными ребрами.

где R — радиус меридионального сечения тора;
a — относительная жесткость ребра на растяжение;
b — эксцентриситет тора.

Из этой формулы следует, что концентрация окружных напряжений может быть весьма значительной. Итак, асимптотические методы позволяют удовлетворительно решать краевые задачи для оболочек вращения с меридиональными ребрами. В частности, в работе подробно рассмотрены и получены решения для оболочек нулевой гауссовой кривизны, сферического пояса и кругового тора с меридиональными ребрами.

3. Метод собственных функций

Выше было получено строгое решение для цилиндрической оболочки, подкрепленной шпангоутами, теперь рассмотрим строгое решение для цилиндрической шарнирно опертой оболочки, подкрепленной меридиональными ребрами. В настоящее время это единственное строгое аналитическое решение для оболочки с меридиональными ребрами. С принципиальной точки зрения эта задача решается очень просто, поскольку полные уравнения статики будут с разделяющими переменными.

Для этого решения ищутся в виде разложений по собственным функциям от меридиональной координаты. Коэффициенты этих разложений определяются из обыкновенных дифференциальных уравнений восьмого порядка, коэффициенты которых содержат особенности типа дельта-функций. Формулируя условия склейки, удается избавиться от этих особенностей и задача легко решается до конца.

Предложенная процедура легко обобщается на динамические задачи, что и показано на примере свободных колебаний цилиндрической оболочки с меридиональными ребрами. Решение динамической задачи почти не отличается от решения статической задачи. Все отличие будет состоять в том, что как в самих уравнениях, так и в условиях склейки появляются инерционные члены. Частотное уравнение сразу же следует из условий склейки.

4. Метод последовательных приближений

К решению задач теории ребристых оболочек этот метод впервые был привлечен В. М. Рябовым, при этом он исходил из конструктивно анизотропных оболочек, последовательно уточняя решение.

В работе предложен другой вариант метода последовательных приближений.

Перепишем уравнение (4) в виде

$$K \underline{u} + \sum_{k=1}^{n} M_k \underline{u}\, \delta(\varphi - \varphi_k) = \underline{q} \qquad (III.8)$$

где K — известный дифференциальный аффинор классической теории оболочек. Решение уравнения (8) будем искать как предел последовательности $\underline{u}_0, \underline{u}_1, \underline{u}_2 \ldots$ Причем $\underline{u}_0$ есть решение уравнения (6). Векторы $\underline{u}_m$ определяются как решения уравнений

$$K \underline{u}_m = \underline{q} - \sum_{k=1}^{n} M_k \underline{u}_{m-1}\, \delta(\varphi - \varphi_k). \qquad (III.9)$$

Вместо того, чтобы искать векторы u_m, будем определять поправки $\varepsilon_m = u_m - u_{m-1}$, для которых из (9) следуют уравнения

$$K \underline{\varepsilon}_m = -\sum_{k=1}^{n} M_k \underline{\varepsilon}_{m-1}\, \delta(\varphi - \varphi_k). \qquad (III.10)$$

Из (10) следует, что

$$\underline{\varepsilon}_m = -\sum_{k=1}^{n} K^{-1} M_k\, \varepsilon_{m-1}\, \delta(\varphi - \varphi_k). \qquad (III.11)$$

Итерационный процесс будет сходиться в том случае, если норма оператора $K^{-1} M_k$ будет меньше единицы, т. е. $\| K^{-1} M_k \| < 1$. Это условие выполняется для сравнительно широкого класса задач, поскольку оператор K^{-1} ограничен, а норма оператора M_k равна $\| M_k \| \approx a_k$, где a_k — относительная жесткость ребра на растяжение — является малым числом. Интересно, что легко получить простой критерий того, когда ребра можно считать абсолютно жесткими в том смысле, что деформированное состояние ребра можно определять независимо от деформированного состояния оболочки. Но поскольку ребро не отрывается от оболочки, то тем самым нам становится известным деформированное состояние оболочки под ребром. После этого задача по существу сводится к решению краевой задачи для гладкой оболочки. Упомянутый выше критерий для оболочек вращения ненулевой гауссовой кривизны имеет вид $a_k \gg 2\sqrt{2h_*}$. Любопытно, что здесь мы, по-существу, приходим к скелетному методу В. К. Прокопова. Итак, для

оболочек с ребрами малой жесткости проходит метод последовательных приближений, а для жестких ребер можно воспользоваться неким аналогом скелетного метода В. К. Прокопова.

В заключение следует отметить, что, несмотря на наличие решений для ряда более или менее частных задач, окончательные выводы делать еще рано. Всесторонний анализ краевых задач теории ребристых оболочек является главной проблемой современной ТРО. С другой стороны, можно надеяться, что богатый материал для исследований, как теоретических, так и экспериментальных, привлечет внимание еще многих исследователей, а интенсивное развитие ТРО в последние годы позволяет надеяться, что этот анализ будет успешно доведен до конца.

Основные результаты работы опубликованы в статьях автора:

1. Жилин П. А. «К анализу краевых задач для ребристых оболочек», сб. «Прочность гидротурбин». Труды ЦКТИ им. И. И. Ползунова, 1966, № 72.

2. Жилин П. А. Осесимметричная деформация цилиндрических оболочек, подкрепленных шпангоутами. «Механика твердого тела», 1966, № 5.

3. Жилин П. А. и Кизима Г. А. Оболочки нулевой гауссовой кривизны с меридиональными ребрами. Сб. «Прочность гидротурбин», труды ЦКТИ им. И. И. Ползунова, 1966, № 72.

4. Жилин П. А. и Кизима Г. А. Оболочки нулевой гауссовой кривизны с меридиональными ребрами, «Механика твердого тела», 1967, № 3.

5. Теория ребристых оболочек и ее приложения (аннотация доклада, прочитанного на семинаре по механике оболочек и пластин при Институте проблем механики АН СССР). «Механика твердого тела», 1967, № 5.

,п з»№.№ ПМ г.