СФЕРИЧЕСКИЙ ПОЯС С МЕРИДИОНАЛЬНЫМИ РЕБРАМИ

П. А. ЖИЛИН, Г. А. КИЗИМА

(Ленинград)

Дается решение уравнений, описывающих напряженное состояние сферического пояса под равномерным давлением при учете дискретного расположения ребер. Решение построено асимптотическим путем и позволяет вычислять вблизи ребра концентрацию напряжений как меридиональных, так и окружных.

1. Рассмотрим сферический пояс с ребрами, расположенными вдоль меридианов $\varphi = \varphi_k = 2\pi(k-1) / N$, $k = 1, 2, 3, \ldots, N$, где N — число ребер, φ — широтная координата. В качестве меридиональной координаты выбран угол θ, отсчитываемый от вертикального диаметра. Параметры Ляме приняты в виде $A_1 = a$, $A_2 = a \sin\theta$, причем $R_1 = R_2 = a$, где a — радиус сферической оболочки.

Уравнения равновесия ребристых оболочек в перемещениях имеют вид

$$L(\mathbf{u}) + h_*^2 M(\mathbf{u}) + \sum_{k=1}^{N} K(\mathbf{u})\,\delta(\varphi - \varphi_k) = -\frac{a^2 \sin\theta}{B}\,\mathbf{q} \tag{1.1}$$

Здесь L, M — дифференциальные операторы классической теории оболочек, причем L соответствует усилиям T_1, T_2, S, а M — моментам M_1, M_2, H. Дополнительные операторы, возникающие в теории ребристых оболочек, обозначены через K. Они обладают симметрией и для сферы имеют вид

$$K_{12} = K_{21} = K_{22} = K_{23} = K_{32} = 0$$

$$K_{11} = (\alpha + 2\beta + \gamma)\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}, \quad K_{13} = K_{31} = (\alpha + \beta)\frac{\partial}{\partial\theta} - (\beta + \gamma)\frac{\partial^3}{\partial\theta^3}$$

$$K_{33} = \alpha - 2\beta\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \gamma\frac{\partial^4}{\partial\theta^4}$$

$$\alpha = \frac{EF}{aB}, \qquad \beta = \frac{ES}{a^2 B}, \qquad \gamma = \frac{EI}{a^3 B} \tag{1.2}$$

$$F = \int_{{}^1\!/_2 h}^{{}^1\!/_2 h + h_p} b_p\,dz, \quad S = \int_{{}^1\!/_2 h}^{{}^1\!/_2 h + h_p} z b_p\,dz, \quad I = \int_{{}^1\!/_2 h}^{{}^1\!/_2 h + h_p} z^2 b_p\,dz$$

Здесь F — площадь поперечного сечения ребра, S — статический момент, I — момент инерции, h — толщина оболочки, h_p и b_p — высота и ширина ребра. Считаем, что параметры ребра α, β, γ постоянны вдоль меридиана.

2. Краевая задача теории ребристых оболочек состоит в отыскании решений уравнений (1.1) в области $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $\theta_1 < \theta < \theta_2$ и подчинении их условиям на краях $\theta = \theta_1$, $\theta = \theta_2$, причем последние предполагаются произвольными.

Ищем решение уравнений (1.1) в виде

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1 \tag{2.1}$$

Здесь $\mathbf{u}_0$ — решение уравнений равновесия гладкой оболочки без ребер под заданной внешней нагрузкой $\mathbf{q}$, т. е. они удовлетворяют уравнениям

$$L(\mathbf{u}_0)+h_*^2M(\mathbf{u}_0)=-\frac{a^2\sin\theta}{B}\mathbf{q} \tag{2.2}$$

$$\left(h_*^2=\frac{D}{a^2B}=\frac{h^2}{12a^2}\text{ — малый параметр}\right)$$

при заданных условиях на краях $\theta=\theta_1$ и $\theta=\theta_2$.

Дополнительные перемещения, возникающие в ребристой оболочке, обозначены через $\mathbf{u}_1$. Иными словами, полное напряженное состояние в ребристой оболочке складывается из основного напряженного состояния, возникающего в гладкой оболочке при заданной внешней нагрузке, и дополнительного, возникающего из-за наличия ребер. Уравнения, описывающие дополнительное напряженное состояние, получим, подставляя (2.1) в (1.1) и учитывая (2.2)

$$L(\mathbf{u}_1)+h_*^2M(\mathbf{u}_1)=-\sum_{k=1}^{N}K(\mathbf{u}_0+\mathbf{u}_1)\delta(\varphi-\varphi_k) \tag{2.3}$$

где δ — дельта-функция.

Заметим, что в областях между линиями $\varphi=\varphi_k$ уравнения (2.3) совпадают с однородными уравнениями для гладкой оболочки, соответствующими (2.2). Ищем решения уравнений (2.3) в областях $\varphi_k<\varphi<\varphi_{k+1}$, $\theta_1<\theta<\theta_2$ и склеиваем полученные решения на линиях $\varphi=\varphi_k$, т. е. решения уравнений (2.3) должны удовлетворять однородным условиям на краях $\theta=\theta_1$, $\theta=\theta_2$ и $8N$ условиям склейки решений на линиях $\varphi=\varphi_k$.

Допустим, что все ребра одинаковы и внешняя нагрузка осесимметрична или имеем период, кратный числу ребер, тогда достаточно найти решение только в одной области между соседними ребрами $\varphi_0<\varphi<2\pi/N$, $\theta_1<\theta<\theta_2$, в остальных областях решения будут повторяться. Число условий склейки уменьшается до восьми.

Обозначим через $\mathbf{u}_1^+$ значение вектора перемещений на меридиане $\varphi=0$, а через $\mathbf{u}_1^-$ — его значение на меридиане $\varphi=2\pi/N$. Функции u_1, v_1, w_1 как разности непрерывных функций $u-u_0$, $v-v_0$, $w-w_0$, вследствие того факта, что оболочка не имеет изломов и разрывов, должны быть непрерывны всюду, в том числе и на меридианах $\varphi=0$, $\varphi=2\pi/N$, т. е.

$$\lim_{\varepsilon\to0}\left[\mathbf{u}_1(2\pi/N+\varepsilon)-\mathbf{u}_1(2\pi/N-\varepsilon)\right]=0 \tag{2.4}$$

В силу периодичности $\mathbf{u}_1$ имеем, что $\mathbf{u}_1(2\pi/N+\varepsilon)=\mathbf{u}_1(\varepsilon)$, тогда условие (2.4) принимает вид

$$\lim_{\varepsilon\to0}\left[\mathbf{u}_1(\varepsilon)-\mathbf{u}_1(2\pi/N-\varepsilon)\right]=\mathbf{u}_1^+-\mathbf{u}_1^- \tag{2.5}$$

Таким путем получены шесть следующих условий склейки:

$$\begin{gathered}u_1^-=u_1^+,\qquad v_1^-=v_1^+,\qquad w_1^-=w_1^+,\qquad v_1'^-=v_1'^+\\ w_1'^-=w_1'^+,\qquad w_1''^-=w_1''^+\end{gathered} \tag{2.6}$$

Здесь и ниже штрихи означают производные по φ. Остальные два условия склейки получим, проинтегрировав первое и третье уравнения равновесия (2.3) в пределах от $2\pi/N-\varepsilon$ до $2\pi/N+\varepsilon$ и сделав предельный переход при $\varepsilon\to0$.

$$\frac{1-\nu}{2\sin\theta}(u_1'^- - u_1'^+) + K_{11}u_1^- + K_{13}w_1^- = -K_{11}u_0 - K_{13}w_0 \tag{2.7}$$

$$\frac{h_*^2}{\sin^3\theta}(w_1'''^- - w_1'''^+) + K_{33}w_1^- + K_{31}u_1^- = -K_{33}w_0 - K_{31}u_0 \tag{2.8}$$

Если в этих выражениях члены, содержащие оператор K, перенести в левую часть и учесть (1.2), то физический смысл этих условий становится очевидным. Левая часть уравнения (2.7) будет представлять собой скачок касательных усилий в оболочке при переходе через ребро, что математически записывается как разрыв первых производных от продольных перемещений по окружной координате, а правая часть будет представлять собой уравнение внецентренного растяжения балки с криволинейной осью. Левая часть уравнения (2.8) представит собой разрыв в третьих производных от нормального прогиба по окружной координате, что физически означает скачок перерезывающих сил в оболочке при переходе через ребро, а правая часть будет известным уравнением изгиба криволинейного бруса.

В случае, когда тангенциальная реакция ребра отсутствует, т. е. ребро реагирует только на нормальное смещение, условие (2.7) перейдет в условие

$$u_1'^- = u_1'^+ \tag{2.9}$$

3. Следуя общей идее работ [1-3], решение краевой задачи отыскания дополнительного напряженного состояния в ребристой оболочке представим в виде асимптотического ряда

$$u_1 = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s u_{10}^s + \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s u_{11}^s, \quad v_1 = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s v_{10}^s + \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s v_{11}^s \tag{3.1}$$

$$w_1 = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s w_{10}^s + \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s w_{11}^s \qquad (\varepsilon = \sqrt{h_*})$$

Как известно, такое представление решения возможно в том случае, когда выполняются условия регулярного вырождения. Ниже будет показано, что это условие выполнено.

Функции u_{10}^s, v_{10}^s, w_{10}^s представляют собой решения вырожденной системы уравнений

$$L_{i1}u_{10}^s + L_{i2}v_{10}^s + L_{i3}w_{10}^s = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \tag{3.2}$$

подчиняющиеся краевым условиям

$$u_1^- = u_1^+, \qquad v_1^- = v_1^+, \ v_1'^- = v_1'^+ \tag{3.3}$$

$$(1-\nu)\,/\,2\sin\theta\,(u_1'^- - u_1'^+) = -K_{11}(u_0 + u_1^-) - K_{13}(w_0 + w_1^-)$$

и совокупности тангенциальных условий на краях $\theta = \theta_1$, $\theta = \theta_2$. Функции u_{11}^s, v_{11}^s, w_{11}^s есть функции типа погранслоя. Для их определения надо интегрировать уравнения простого краевого эффекта [2] и подчинить полученные решения нетангенциальным условиям на краях $\theta = \theta_1$, $\theta = \theta_2$ и совокупности условий для функции w_1 и ее производных на линиях $\varphi = \varphi_k$.

Для практических целей часто допустимо ограничиться первыми членами в рядах (3.1), с этой точностью

$$u_1 = u_{10} + u_{11}, \qquad v_1 = v_{10} + v_{11}, \qquad w_1 = w_{10} + w_{11}$$

4. При решении вырожденной задачи (3.2), (3.3) удобно перейти к изотермической системе координат

$$x = \ln \operatorname{tg} {}^1/_2\theta, \quad \beta = \varphi - \pi / N, \quad \sin\theta = \operatorname{sch} x \quad \cos\theta = -\operatorname{th} x$$

После элементарных преобразований уравнения равновесия и условия сплошности сферической оболочки принимают вид

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial \beta^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial \beta^2} = 2bt \operatorname{sh} 2x \quad \left(b = \frac{a(1+\nu)}{Eh} \right) \tag{4.1}$$

Здесь введены функции t, r такие, что

$$-T_2 = T_1 = \operatorname{ch}^2 x \frac{\partial t}{\partial \beta}, \quad S = -\operatorname{ch}^2 x \frac{\partial t}{\partial x}, \quad u = \frac{1}{\operatorname{ch} x} \frac{\partial r}{\partial \beta}$$

$$v = \frac{1}{\operatorname{ch} x} \frac{\partial r}{\partial x} - 2bt \operatorname{ch} x$$

На двух линиях симметрии $\beta = 0$ и $x = 0$, очевидные условия:

$$x = 0, \quad u = 0, \quad \partial v / \partial x = 0, \qquad \beta = 0, \quad v = 0, \quad \partial u / \partial \beta = 0 \tag{4.2}$$

Эти условия тождественно выполняются, если r будет нечетной функцией x, β, а t — нечетной функцией β и четной функцией x. Положим

$$r = \sum_n R_n(\beta) \sin \frac{n\pi x}{x_0}, \quad t = \sum_n T_n(\beta) \cos \frac{n\pi x}{x_0} \tag{4.3}$$

$$R_n = \frac{2}{x_0} \int_0^{x_0} r \sin \frac{n\pi x}{x_0} dx, \quad T_n = \frac{2}{x_0} \int_0^{x_0} t \cos \frac{n\pi x}{x_0} dx$$

Умножая первое из уравнений (4.1) на $\cos n\pi x / x_0$, а второе на $\sin n\pi x / x_0$ и интегрируя по x, получим

$$\frac{d^2 T_n}{d\beta^2} - \frac{n^2\pi^2}{x_0^2} T_n = 0, \quad \frac{d^2 R_n}{d\beta^2} - \frac{n^2\pi^2}{x_0^2} R_n = \frac{4b}{x_0} \int_0^{x_0} t \operatorname{sh} 2x \sin \frac{n\pi x}{x_0} dx \tag{4.4}$$

Из первого уравнения получим

$$T_n = D_n \operatorname{sh} \frac{n\pi\beta}{x_0} + D_n' \operatorname{ch} \frac{n\pi\beta}{x_0} \tag{4.5}$$

Поскольку T_n должно быть нечетной функцией β, то $D_n' = 0$.

Из второго уравнения (4.4) получим

$$R_n = E_n \operatorname{sh} \frac{n\pi\beta}{x_0} + E_{nn} \beta \operatorname{ch} \frac{n\pi\beta}{x_0} + \sum_{m=1}^{\infty}{}' E_{nm} \operatorname{sh} \frac{m\pi\beta}{x_0} \tag{4.6}$$

(штрих у суммы означает, что m не принимает значения $m = n$).

Произвольные постоянные D_n и E_n определяются из двух краевых условий на меридиане $\beta = \pi / N$, в качестве которых имеем четыре условия склейки при $\beta = \pm\pi / N$.

$$u = 0, \quad v = 0, \quad \partial v / \partial \beta = 0 \tag{4.7}$$

$$\frac{1-\nu}{2} \frac{\partial u}{\partial \beta} + \frac{\partial}{\partial x} [(\alpha + \beta) a\varepsilon_1 + (\beta + \gamma) a^2 \varkappa_1] =$$

$$= -\frac{d}{dx} [(\alpha + \beta) a\varepsilon_1^0 + (\beta + \gamma) a^2 \varkappa_1^0]$$

Из этих условий первое и третье удовлетворяются тождественно. Последнее условие можно упростить, если принять во внимание тот факт, что $\alpha \gg \beta \gg \gamma$

$$(1-\nu)\frac{\partial u}{\partial \beta} - \alpha\frac{\partial \varkappa_1}{\partial x} = \alpha\frac{d\varkappa_1^0}{dx} \quad \text{при } \beta = \pm\pi/N \tag{4.8}$$

Если теперь подставить сюда u, v, выраженные через t и r, а также учесть (4.3) — (4.6), то после преобразований получим систему уравнений для определения произвольных постоянных D_n и E_n. Если ограничиться в рядах (4.3) — (4.6) первыми членами, то система принимает такой вид:

$$\frac{\pi}{x_0}\operatorname{sh}\frac{\pi^2}{Nx_0}E_1 - \left(m\frac{\pi^2}{Nx_0}\operatorname{ch}\frac{\pi^2}{Nx_0} + 2b\operatorname{ch}^2 x\operatorname{sh}\frac{\pi^2}{Nx_0}\right)D_1 = 0 \tag{4.9}$$

$$\frac{(1-\nu)\pi^2}{x_0^2}\operatorname{sh}\frac{\pi^2}{Nx_0}\sin\frac{\pi x}{x_0}E_1 - \frac{(1-\nu)m\pi}{x_0}\left(2\operatorname{sh}\frac{\pi^2}{Nx_0} + \frac{\pi^2}{Nx_0}\operatorname{ch}\frac{\pi^2}{Nx_0}\right)\times$$

$$\times\sin\frac{\pi x}{x_0}D_1 - 2b\frac{\pi}{x_0}\operatorname{ch}\frac{\pi^2}{Nx_0}\left(\operatorname{sh}2x\operatorname{ch}x\cos\frac{\pi x}{x_0} - \right.$$

$$\left. - \frac{\pi}{x_0}\operatorname{ch}^3 x\sin\frac{\pi x}{x_0}\right) D_1 = \alpha\frac{d\varkappa_1^0}{dx}\operatorname{ch}x \qquad m = \frac{4b\pi x_0\operatorname{sh}2x_0}{(\varkappa_0+\pi)(\varkappa_0^2+\pi^2)}$$

Здесь ε_1^0, $\varkappa_1^0$ деформации гладкой оболочки.

5. Для построения функций типа погранслоя учтем тот факт [2], что $u_{11} \approx \sqrt{h_*}w_{11}$, $v_{11} \approx h_* w_{11}$. Полагаем с заданной степенью точности (h_* по сравнению с единицей), что $u_{11} \approx v_{11} \approx 0$. Для определения w_{11} вблизи краев $\theta = \theta_1$ и $\theta = \theta_2$ требуется интегрировать уравнение

$$\frac{\partial^4 w_{11}}{\partial\theta^4} + \frac{1-\nu^2}{h_*^2}w_{11} = 0 \tag{5.1}$$

и подчинить его решение нетангенциальной части условий на краях $\theta = \theta_1$ и $\theta = \theta_2$. В силу однородности краевых условий и уравнения его решение может быть только тривиальным.

Вблизи краев $\varphi = 0$, $\varphi = 2\pi/N$ требуется интегрировать уравнение

$$\frac{\partial^4 w_{11}}{\partial\varphi^4} + \frac{(1-\nu^2)\sin^4\theta}{h_*^2}w_{11} = 0 \tag{5.2}$$

и подчинить его решение следующим условиям склейки на линиях φ_k:

$$w_1^- = w_1^+, \qquad w_1'^- = w_1'^+, \qquad w_1''^- = w_1''^+ \tag{5.3}$$

$$h_*^2\sin^{-3}\theta(w_1'''^- - w_1'''^+) + K_{33}w_1^- + K_{31}u_1^- = -K_{33}w_0 - K_{31}u_0$$

Поскольку $u_1 = u_{10}$, $v_1 = v_{10}$, $w_1 = w_{10} + w_{11}$, то последнее из условий (5.3) можно записать в виде

$$h_*^2\sin^{-3}\theta(w_{11}'''^- - w_{11}'''^+ + w_{10}'''^- - w_{10}'''^+) + K_{33}(w_{10}^- + w_{11}^-) +$$

$$+ K_{31}u_{10}^- = -K_{33}w_0 - K_{31}u_0 \tag{5.4}$$

Решения вырожденной задачи u_{10}, w_{10} не будут быстроменяющимися и производные от них возрастают незначительно, поэтому ими можно пренебречь по сравнению с производными от быстроменяющейся функции w_{11} [2]. Если к тому же учесть, что коэффициенты α, β, γ отличаются друг от друга на порядок h/a, то выражения $K_{33}w_{10}^-$ и $K_{31}u_{10}^-$ можно записать так:

$$K_{33}w_{10}^- = \alpha w_{10}^-, \qquad K_{31}u_{10}^- = \alpha\partial u_{10}^-/\partial\theta \tag{5.5}$$

Теперь условия (5.3) принимают вид

$$
\begin{gathered}
w_{11}^{-} = w_{11}^{+}, \qquad w_{11}{}'^{+} = w_{11}{}'^{-}, \qquad w_{11}{}''^{+} = w_{11}{}''^{-} \\
(w_{11}{}'''^{-} - w_{11}{}'''^{+}) + K_{33}w_{11}^{-} + aw_{10}^{-} + a\partial u_{10}^{-} / \partial\theta = -K_{33}w_0 - K_{31}u_0
\end{gathered}
\tag{5.6}
$$

Характеристическое уравнение для (5.2)

$$
\lambda^4(\theta) + \frac{(1-\nu^2)\sin^4\theta}{h_*^2} = 0 \tag{5.7}
$$

имеет корни

$$
\lambda_{1,2,3,4} = \pm(1 \pm i)\sqrt[4]{1-\nu^2}\,\frac{\sin\theta}{\sqrt{2h_*}} \tag{5.8}
$$

Два из них имеют положительную вещественную часть, а два — отрицательную, следовательно, условия регулярного вырождения выполнены и представление решений в виде асимптотических рядов (3.1) справедливо.

Общий интеграл уравнения (5.2) имеет вид

$$
\begin{gathered}
w_{11} = e^{-\lambda\varphi}(C_1\cos\lambda\varphi + C_2\sin\lambda\varphi) + e^{-\lambda(2\pi/N-\varphi)} \times \\
\times [C_3\cos\lambda(2\pi/N-\varphi) + C_4\sin\lambda(2\pi/N-\varphi)] \\
\lambda = (1-\nu^2)^{1/4}\sin\theta(2h_*)^{-1/2}
\end{gathered}
\tag{5.9}
$$

Здесь C_1, C_2, C_3, C_4 — произвольные постоянные, которые определяются из условий (5.6). Из (5.9) видно, что два решения убывают от края $\varphi = 0$, а два убывают от края $\varphi = 2\pi / N$. Зона протяженности простого краевого эффекта $\sqrt{h_*}$. В случае, когда выполняется условие $2\pi / N > \sqrt{h_*}$, взаимным влиянием ребер можно пренебречь, тогда из первых трех условий (5.3) следует, что $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = C(\theta)$, а последнее из условий (5.3) дает дифференциальное уравнение для определения произвольной функции $C(\theta)$

$$
\begin{gathered}
\gamma d^4C / d\theta^4 - 2\beta d^2C / d\theta^2 + \Delta C = p_0 \\
\Delta = \alpha + \sqrt{8h_*}(1-\nu^2)^{3/4}, \qquad p_0 = -K_{33}w_0 - K_{31}u_0
\end{gathered}
\tag{5.10}
$$

Решив это дифференциальное уравнение, найдем функцию C, при этом ее можно выбрать так, чтобы выполнялось по два краевых условия на краях $\theta = \theta_1$ и $\theta = \theta_2$. Следует подчеркнуть, что пренебрегать в уравнении членом, содержащим $\sqrt{h_*}$ нельзя, так как α, β, γ — малые величины. В случае, когда $\alpha \gg \sqrt{8h_*}$ оказывается, что допустимо рассчитывать оболочку и ребра раздельно. Действительно, если в уравнении (5.10) отбросить член $\sqrt{8h_*}(1-\nu^2)^{3/4}$, то оставшееся уравнение совпадет с уравнением кривого бруса, в котором p_0 определяется через известные перемещения в гладкой оболочке под заданной внешней нагрузкой. Теперь легко определяется реакция бруса, тем самым известна полная нагрузка на ребристую оболочку, которая состоит из внешней нагрузки и реакции ребер. Дальнейший ход расчета очевиден. Подробное обсуждение этого способа расчета ребристых оболочек выходит за рамки предлагаемой статьи.

Если ребра расположены несимметрично относительно срединной поверхности оболочки, то корни характеристического уравнения (5.10)

$$
f_{1,2,3,4} = \pm[\beta \pm (\beta^2 - \gamma\Delta)^{1/2}]^{1/2}\gamma^{-1/2}
$$

Рассмотрим выражение $\beta^2 - \gamma\alpha$. Пусть для простоты ребро имеет прямоугольное сечение; тогда

$$
F = b_ph_p, \qquad S = {}^1/_2 b_ph_p(h+h_p), \qquad I = {}^1/_4 b_ph_p[(h+h_p)^2 + {}^1/_3 h_p^2]
$$

$$
\beta^2 - \gamma\alpha = -\frac{b_p^2h_p^4}{a^4h^2}\,\frac{1-\nu^2}{12} = \delta
$$

Здесь δ — отрицательная величина; следовательно

$$f_{1,2,3,4} = \pm(F_1 \pm iF_2) \tag{5.11}$$

$$F_1 = (2\gamma)^{-1}(\beta + \sqrt{\gamma\Delta})^{1/2}, \qquad F_2 = (2\gamma)^{-1}(-\beta + \sqrt{\gamma\Delta})^{1/2}$$

$$C(\theta) = e^{-F_1(\theta-\theta_1)}[B_1 \cos F_2(\theta - \theta_1) + B_2 \sin F_2(\theta - \theta_1)] +$$
$$+ e^{-F_1(\theta_2-\theta)}[B_3 \cos F_2(\theta_2 - \theta) + B_4 \sin F_2(\theta_2 - \theta)] + p_0 / \Delta$$

Здесь частное решение уравнения (5.10) построено приближенно на том основании, что $C(\theta)$ при дифференцировании мало возрастает, а постоянные коэффициенты α, β, γ подчиняются условию $\alpha \gg \beta \gg \gamma$.

Если ребра расположены симметрично относительно срединной поверхности оболочки, то $\beta = 0$ и корни характеристического уравнения имеют вид

$$f_{1,2,3,4} = \pm(1 \pm i)(\Delta / 4\gamma)^{1/4}$$

Тогда

$$C(\theta) = e^{-F(\theta-\theta_1)}(B_1 \cos F(\theta - \theta_1) + B_2 \sin F(\theta - \theta_1)] +$$
$$+ e^{-F(\theta_2-\theta)}[B_3 \cos F(\theta_2 - \theta) + B_4 \sin F(\theta_2 - \theta)] + p_0 / \Delta$$

$$F = (\Delta / 4\gamma)^{1/4} \tag{5.12}$$

Произвольные постоянные B_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ определяются из условий на краях $\theta = \theta_1$, $\theta = \theta_2$.

6. В качестве примера рассмотрим сферический пояс с меридиональными равноотстоящими друг от друга одинаковыми ребрами, расположенными на внешней стороне оболочки. Сфера нагружена равномерным внутренним давлением p края оболочки $\theta = \theta_1$ и $\theta = \theta_2$ защемлены.

Общее решение задачи складывается из решения для гладкой оболочки под внутренним давлением с защемленными краями и дополнительного решения, которое в свою очередь состоит из решения вырожденной задачи и краевого эффекта $u = u_0 + u_{10} + u_{11}$. Поскольку

$$u_0 = 0, \quad v_0 \approx 0, \quad u_{11} \approx 0, \quad v_{11} \approx 0$$

следовательно

$$u = u_{10}, \quad v = v_{10}, \quad w = w_0 + w_{10} + w_{11} \tag{6.1}$$

Прежде всего отметим, что u_0 мало, а поскольку интерес представляет лишь относительный порядок величин u_0, v_0, w_0, то приближенно полагаем $u_0 \approx 0$. Однако можно вычислить действительную величину u_0 [2].

Для гладкой сферической оболочки под равномерным давлением с защемленными поперечными краями нетрудно получить следующие выражения:

$$w_0 = \frac{a^2 p(1 - \nu^2)}{2Eh}(1 - \psi_1 - \psi_2 - \psi_3 - \psi_4)$$

$$T_{01} = T_{02} = {}^1/_2 ap(1 - \psi_1 - \psi_2 - \psi_3 - \psi_4)$$

$$M_{01} = -\frac{ap}{2}\frac{h}{2\sqrt{3}}\left(\frac{1 - \nu}{1 + \nu}\right)^{1/2}(\psi_1 - \psi_2 + \psi_3 - \psi_4)$$

$$M_{02} = \nu M_{01} \tag{6.2}$$

Перемещения u_{10}, v_{10}, w_{10} и соответствующие им усилия известны из решения системы уравнений (4.9), а w_{11} нетрудно получить для случая сферы с защемленными краями

Для защемленного края $C = C' = 0$, поэтому в выражениях (5.12)

$$B_1 = B_2 = B_3 = B_4 = -p_0 / \Delta$$
$$C(\theta) = p_0 / \Delta(1 - \psi_5 - \psi_6 - \psi_7 - \psi_8) \tag{6.3}$$
$$w_{11} = p_0 / \Delta(1 - \psi_5 - \psi_6 - \psi_7 - \psi_8)(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4)$$

Зная перемещения, определим напряжения, возникающие в сферическом поясе с меридиональными ребрами

$$\sigma_1 = \frac{T_1}{h} \pm \frac{6M_1}{h^2}, \qquad \sigma_2 = \frac{T_2}{h} \pm \frac{6M_2}{h^2} \tag{6.4}$$

Здесь T_i, M_i $(i = 1, 2)$ — полные усилия и моменты, возникающие в ребристой оболочке, определяются из решения для гладкой оболочки, вырожденной задачи и простого краевого эффекта от ребер. Полные меридиональные напряжения в ребристой сфере

$$\sigma_1 = \frac{ap}{2h}(1 - \psi_1 - \psi_2 - \psi_3 - \psi_4) + R_1D_1 - R_3(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4) \pm$$
$$\pm \left[-\frac{ap}{2h}\sqrt{3}\left(\frac{1-\nu}{1+\nu}\right)^{1/2}(\psi_1 - \psi_2 + \psi_3 - \psi_4) - \right.$$
$$\left. - \nu\sqrt{3}\left(\frac{1-\nu}{1+\nu}\right)^{1/2} R_3(\varphi_1 - \varphi_2 + \varphi_3 - \varphi_4)\right] \tag{6.5}$$

Полные окружные напряжения

$$\sigma_2 = \frac{ap}{2h}(1 - \psi_1 - \psi_2 - \psi_3 - \psi_4) + R_1D_1 - R_3(\varphi_1 + \tag{6.6}$$
$$+ \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4) \pm \left[-\nu\frac{ap}{2h}\sqrt{3}\left(\frac{1-\nu}{1+\nu}\right)^{1/2}(\psi_1 - \psi_2 + \psi_3 - \psi_4) - \right.$$
$$\left. - \sqrt{3}\left(\frac{1-\nu}{1+\nu}\right)^{1/2} R_3(\varphi_1 - \varphi_2 + \varphi_3 - \varphi_4)\right]$$

Здесь

$$R_1 = \frac{\pi}{x_0h}\csc^2\theta \cos\left(\frac{\pi}{x_0}\ln\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right)\operatorname{ch}\frac{\pi(\varphi - \pi/N)}{x_0}$$
$$R_2 = \frac{\pi}{x_0}\csc^2\theta \cos\left(\frac{\pi}{x_0}\ln\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right)\operatorname{ch}\frac{\pi^2}{x_0N}$$
$$R_3 = \frac{ap}{2h}\frac{b_ph_p}{ah}\frac{1-\nu^2}{\Delta}(1 + l_1\psi_1 + l_2\psi_2 + l_1\psi_3 + l_2\psi_4) +$$
$$+ \frac{1+\nu}{1-\nu}\frac{2}{ap}R_2D_1(1 - \psi_5 - \psi_6 - \psi_7 - \psi_8)$$

$$\psi_1 = e^{-k(\theta-\theta_1)}\cos k(\theta - \theta_1), \qquad \psi_2 = e^{-k(\theta-\theta_1)}\sin k(\theta - \theta_1)$$
$$\psi_3 = e^{-k(\theta_2-\theta)}\cos k(\theta_2 - \theta), \qquad \psi_4 = e^{-k(\theta_2-\theta)}\sin(\theta_2 - \theta)$$
$$k = (1 - \nu^2)^{1/4}(2h_*)^{-1/2}$$
$$\varphi_1 = e^{-\lambda\varphi}\cos\lambda\varphi, \qquad \varphi_2 = e^{-\lambda(2\pi/N-\varphi)}\cos\lambda(2\pi/N - \varphi)$$
$$\varphi_3 = e^{-\lambda\varphi}\sin\lambda\varphi, \qquad \varphi_4 = e^{-\lambda(2\pi/N-\varphi)}\sin\lambda(2\pi/N - \varphi)$$
$$\lambda = (1 - \nu^2)^{1/4}\sin\theta(2h_*)^{-1/2}$$

В случае несимметричных ребер

$$\psi_5 = e^{-F_1(\theta-\theta_1)}\cos F_2(\theta-\theta_1), \qquad \psi_6 = e^{-F(\theta-\theta_1)}\sin F_2(\theta-\theta_1)$$

$$\psi_7 = e^{-F_1(\theta_2-\theta)}\cos F_2(\theta_2-\theta), \qquad \psi_8 = e^{-F_1(\theta_2-\theta)}\sin F_2(\theta_2-\theta)$$

$$F_1 = {}^1/_2\gamma^{-1}(\beta+\sqrt{\gamma\Delta})^{1/2}, \qquad F_2 = {}^1/_2\gamma^{-1}(-\beta+\sqrt{\gamma\Delta})^{1/2}$$

$$l_1 = (m-1)^2 + (1-\nu^2)h_p^2/h^2 - 2, l_2 = (m+1)^2 + (1-\nu^2)h_p^2/h^2 - 2$$

$$m = \sqrt{3(1-\nu^2)}\,(1+h_p/h)$$

В случае симметричных ребер

$$\beta = 0, \quad F_1 = F_2 = F = (\Delta/4\gamma)^{1/4}, \quad l_1 = l_2 = l = $$
$$= m^2 + (1-\nu^2)h_p^2/h^2 - 1$$

Все члены в (6.6), (6.5), содержащие D_1, учитывают касательную реакцию ребра. Величина D_1 определяется решением системы уравнений (4.9). Напряжения в гладкой оболочке

$$\sigma_1 = \frac{ap}{2h}(1-\psi_1-\psi_2-\psi_3-\psi_4) \pm$$
$$\pm\left[-\frac{ap\sqrt{3}}{2h}\left(\frac{1-\nu}{1+\nu}\right)^{1/2}(\psi_1-\psi_2+\psi_3-\psi_4)\right]$$

$$\sigma_2 = \frac{ap}{2h}(1-\psi_1-\psi_2-\psi_3-\psi_4) \pm$$
$$\pm\left[-\nu\frac{ap\sqrt{3}}{2h}\left(\frac{1-\nu}{1+\nu}\right)^{1/2}(\psi_1-\psi_2+\psi_3-\psi_4)\right]$$

Остальные члены в (6.5), (6.6) учитывают нормальную реакцию ребер.

Пусть для определения $\theta_1 = {}^1/_4\pi$, $\theta_2 = \pi - \theta_1 = {}^3/_4\pi$, $h = 1$ *см*, $a = 100$ *см*, $N = 4$ (наружные), $b_p h_p = 25$ *см*^{2}, $E = 2\cdot 10^6$ *кг/см*^{2}, $x_0 = \ln \operatorname{tg} {}^1/_2\theta = 0.88$. Тогда $D_1 = -0.21\,p$, $E_1 = -1.8\cdot 10^{-5}\,p$. Подсчитаем напряжения в точке $\theta = {}^1/_2\pi$, $\varphi = 0$. В этом случае выражения (6.5), (6.6) существенно упрощаются, в них можно положить $\varphi_1 \approx 1$, $\varphi_2 \approx \varphi_3 \approx \varphi_4 \approx 0$, $\psi_1 \approx \psi_2 \approx \psi_3 \approx \psi_4 \approx \psi_5 \approx \psi_6 \approx \psi_7 \approx \psi_8 = 0$.

На наружной поверхности оболочки меридиональные и окружные напряжения соответственно равны

$$\sigma_1^+ = (50+3-40)p = 13\,p, \qquad \sigma_2^+ = (50-10-64)p = -4\,p$$

на внутренней поверхности

$$\sigma_1^- = (50-3-16)p = 31\,p, \qquad \sigma_2^- = (50-9+8)p = 49\,p$$

где первый член описывает напряжения в гладкой оболочке, второй — учитывает касательную реакцию ребер, а третий — их нормальную реакцию.

Если не учитывать касательной реакции ребер, то задача существенно упрощается, в этом случае растяжением ребра можно пренебречь. Тогда условие (2.7) переходит в (2.9), а дополнительное напряженное состояние описывается лишь решением уравнений простого краевого эффекта.

Поступила 9 IV 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Гольденвейзер А. Л. Некоторые математические проблемы линейной теории упругих тонких оболочек. Успехи матем. н., 1960, т. 15, вып. 5.
2. Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек. М. — Л., Гостехиздат, 1953.
3. Вишик М. И., Люстерник Л. А. Асимптотическое поведение решений линейных дифференциальных уравнений с большими или быстроменяющимися коэффициентами и граничными условиями. Успехи матем. н., 1960, т. 15, вып. 4.