МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 · 1984

УДК 539.384

ОСЕСИММЕТРИЧНЫЙ ИЗГИБ КРУГЛОЙ ГИБКОЙ ПЛАСТИНКИ ПРИ БОЛЬШИХ ПЕРЕМЕЩЕНИЯХ

ЖИЛИН П. А.

Строится асимптотическое решение краевой задачи для защемленной круглой пластинки, нагруженной поперечным давлением. Показано, что задача разбивается на безмоментную и краевой эффект. Приводится точное решение нелинейной безмоментной задачи. Для нелинейного краевого эффекта строятся два члена асимптотического разложения. Приводится сравнение с известными результатами, полученными численными и приближенными методами.

1. Постановка задачи. Исследование изгиба тонкой упругой круглой пластинки сводится [1] к решению следующей краевой задачи:

$$r^2\frac{d^2t_1}{dr^2}+3r\frac{dt_1}{dr}=-\frac{1-\nu^2}{2}\vartheta^2,\qquad \vartheta=\frac{dw}{dr},\qquad t_2=\frac{drt_1}{dr}$$

$$\frac{h^2}{12}\left(\frac{d^2\vartheta}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d\vartheta}{dr}-\frac{\vartheta}{r^2}\right)=-\frac{pr(1-\nu^2)}{2Eh}+t_1\vartheta \tag{1.1}$$

$$t_1=\varepsilon_1+\nu\varepsilon_2,\qquad t_2=\varepsilon_2+\nu\varepsilon_1,\qquad \varepsilon_1=\frac{du}{dr}+\frac{1}{2}\vartheta^2,\qquad \varepsilon_2=\frac{u}{r}$$

Здесь p — поперечное давление, u, w — радиальное и нормальное смещения, t_1, t_2 — радиальное и окружное безразмерные усилия, ϑ — угол поворота, h — толщина пластины, E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона, $r\in[0,R]$ — радиальная координата, R — радиус пластинки.

На краю $r=R$ принимаются условия защемления

$$u=w=0,\qquad \vartheta=0 \tag{1.2}$$

Достаточно строгое и простое аналитическое решение задачи (1.1), (1.2) в литературе отсутствует [2, с. 245], хотя, конечно, имеется много приближенных решений, погрешность которых не установлена.

Задачу (1.1), (1.2) удобно преобразовать к другой форме. Для этого введем замену искомых и независимых переменных $t_1=\beta^{2/3}s$, $t_2=\beta^{2/3}s_2$, $u=R\beta^{2/3}U$, $w=R\beta^{1/3}W$, $\vartheta=\beta^{1/3}\theta$, $r=R\rho$, $\beta=(1-\nu^2)^{3/2}pR/Eh$. Тогда система (1.1) может быть переписана:

$$\rho^2s''+3\rho s'=-{}^1/_2(1-\nu^2)\theta^2,\qquad (\;)'\equiv d/d\rho$$

$$\varepsilon^2\frac{d}{d\rho}\frac{1}{\rho}\frac{d\rho\theta}{d\rho}=s\theta-\frac{\rho}{2\sqrt{1-\nu^2}}\qquad \varepsilon^2=\frac{1}{12(1-\nu^2)}\left(\frac{Eh^4}{pR^4}\right)^{2/3} \tag{1.3}$$

$$s_2=(\rho s_1)',\qquad W'=\theta \tag{1.4}$$

В систему (1.3) входят две неизвестные функции s и θ (радиальное усилие и угол поворота), которые, согласно (1.1) и (1.2), должны удовлетворять краевым условиям при $\rho=1$:

$$s'+(1-\nu)s=0,\qquad \theta=0 \tag{1.5}$$

Краевое условие для нормального прогиба может быть выполнено после интегрирования системы (1.4) и ниже не рассматривается. В систему (1.3) входит параметр ε^2, который при не слишком малом давлении для достаточно тонких пластин может считаться малым: $\varepsilon^2 \ll 1$.

Решение задачи (1.3) — (1.5) ищется в виде

$$s=s_0+s_1, \qquad \theta=\theta_0+\theta_1 \tag{1.6}$$

где s_0 и θ_0 — решение вырожденой ($\varepsilon=0$) системы (1.3), удовлетворяющее первому из условий (1.5):

$$\rho^2 s_0''+3\rho s_0'+\rho^2/(8s_0^2)=0, \qquad \theta_0={}^1/_2(\rho/s_0)/\sqrt{1-\nu^2} \tag{1.7}$$

$$s_0'+(1-\nu)s_0=0 \quad \text{при} \quad \rho=1 \tag{1.8}$$

Первое из уравнений (1.7) есть уравнение типа Эмдена — Фаулера, которое, как известно, не интегрируется в квадратурах.

Функции s_1 и θ_1 подчиняются уравнениям

$$s_1=-\frac{1}{4}\int_0^1\left[\left(1+\frac{1+\nu}{1-\nu}\tau\right)f(\sqrt{\tau})-\rho^2(1-\tau)f(\rho\sqrt{\tau})\right]d\tau$$

$$\varepsilon^2\frac{d}{d\rho}\frac{1}{\rho}\frac{d\rho\theta_1}{d\rho}-s_0\theta_1=(\theta_0+\theta_1)s_1-\varepsilon^2\frac{d}{d\rho}\frac{1}{\rho}\frac{d\rho\theta_0}{d\rho} \tag{1.9}$$

$$f(\rho)=-\frac{1-\nu^2}{2}\frac{1}{\rho^2}\theta_1(\rho)\left[2\theta_0(\rho)+\theta_1(\rho)\right]$$

Функция θ_1 находится из второго уравнения системы (1.9), после исключения из него функции s_1, и должна удовлетворять условию

$$\theta_1(1)=-\theta_0(1) \tag{1.10}$$

Функция $s_1(\rho)$, определенная первым из уравнений (1.9) (при произвольно заданных θ_1, s_0, θ_0), тождественно удовлетворяет условию (1.8).

Краевая задача (1.7) — (1.10), (1.5) эквивалентна задаче (1.1), (1.2). Таким образом, исходная задача разбита на две: безмоментную (1.7), (1.8) и краевой эффект (1.9), (1.10). Последнее название нуждается в обосновании, которое существенно опирается на положительность функции $s_0(\rho)$. Поэтому, прежде всего, необходимо дать решение безмоментной задачи и изучить его свойства.

2. Построение мембранного решения и его свойства. Решению задачи (1.7), (1.8) посвящено много работ, в частности в статьях [3, 4] дано ее качественное исследование.

Сформулируем несколько утверждений о свойствах мембранного решения.

1. Функция s_0 положительна и монотонно убывает при возрастании ρ от 0 до 1.

Доказательство. Примем обозначения: $s_0(0)=a$, $s_0(1)=b$. Уравнение (1.7) и условие $|a|<\infty$ эквивалентны интегральному уравнению

$$a-s_0(\rho)=\frac{\rho^2}{32}\int_0^1\frac{(1-\tau)\,d\tau}{s_0^2(\rho\sqrt{\tau})} \tag{2.1}$$

Отсюда получаем, что $s_0(\rho)<a$ при $\rho\neq0$ и

$$s_0'(\rho)=-\frac{\rho}{16}\int_0^1\frac{\tau\,d\tau}{s_0^2(\rho\sqrt{\tau})}<0 \qquad (\rho\neq0) \tag{2.2}$$

т. е. $s_0(\rho)$ — монотонно убывающая функция. Подставляя (2.2) в (1.8), получаем, что $b>0$. Утверждение 1 доказано: $0<b\leqslant s_0(\rho)\leqslant a$, $s_0'(\rho)<0$.

2. Справедливы неравенства

$$1<a/b<{}^1/_2(3-\nu),\quad (3-\nu)/(1-\nu)<(4a)^3<(3-\nu)^2/(1-\nu) \tag{2.3}$$

Доказательство. Краевое условие (1.8) с учетом (2.1) можно записать в виде

$$32a=H_0+\frac{1+\nu}{1-\nu}H_1,\qquad H_\alpha\equiv\int\limits_0^1\frac{\tau^\alpha\,d\tau}{s_0^2(\sqrt{\tau})}\quad(\alpha=0,1) \tag{2.4}$$

Кроме того, из (2.1) вытекает равенство

$$32(a-b)=H_0-H_1 \tag{2.5}$$

По второй теореме о среднем для интегралов можно записать

$$H_1=\gamma H_0,\quad {}^1/_2<\gamma<1 \tag{2.6}$$

причем в левой части последнего неравенства стоит $^1/_2$, а не 0, поскольку $s_0(\rho)$ монотонно убывает. Далее из (2.4)—(2.6) имеем

$$a/b={}^1/_2(1+\nu)+{}^1/_2(1-\nu)/\gamma\Rightarrow 1<a/b<{}^1/_2(3-\nu)$$

Это первое из неравенств (2.3). Второе неравенство следует из (2.4) и первого из неравенств (2.3). Действительно, по (2.4) имеем

$$32a=\frac{1-\nu+(1+\nu)\gamma}{1-\nu}H_0\Rightarrow 2\frac{1-\nu+(1+\nu)\gamma}{1-\nu}<(4a)^3<2\frac{1-\nu+(1+\nu)\gamma}{1-\nu}\frac{a^2}{b^2}$$

Здесь были использованы оценки $a^{-2}<H_0<b^{-2}$. Используя теперь неравенство (2.6) и первое из неравенств (2.3), получаем второе неравенство утверждения 2.

3. Решение задачи (1.7), (1.8), ограниченное в центре пластины, существует и единственно.

Доказательство. Введем новые независимую и искомую переменные

$$\xi=\sqrt{q}\rho,\quad q\equiv(4a)^{-3}>0,\quad s_0(q^{-1/2}\xi)=aF(\xi) \tag{2.7}$$

Для функции $F(\xi)$ по (1.7) получаем задачу

$$\xi^{-3}[\xi^3F'(\xi)]'+8F^{-2}(\xi)=0,\qquad F(0)=1 \tag{2.8}$$

решение которой ищем в виде ряда

$$F(\xi)=\sum_{\infty}^{0}a_k\xi^{2k},\qquad a_0=1 \tag{2.9}$$

(нетрудно убедиться, что нечетные степени ξ не могут входить в это разложение). Переменная ξ меняется в интервале

$$0\leqslant\xi^2\leqslant q<(1-\nu)/(3-\nu)\leqslant{}^1/_3\quad(0\leqslant\nu\leqslant{}^1/_2) \tag{2.10}$$

Предполагая, что ряд (2.9) сходится вместе с первыми двумя производными, и подставляя его в (2.8), приходим к линейной системе для определения коэффициентов a_k $(k\geqslant1)$, имеющей единственное решение, определяемое формулами

$$a_{n+1}=\frac{-2b_n}{(n+1)(n+2)},\qquad b_n=-\sum_{k=0}^{n-1}b_kc_{n-k},\qquad c_n=\sum_{k=0}^{n}a_ka_{n-k}$$

$$a_0=b_0=c_0=1,\quad a_1=-1\quad(n=1,2,3,\ldots) \tag{2.11}$$

Теперь исследуем сходимость ряда (2.9) в интервале (2.10). Согласно (2.11), имеем

$$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}=\frac{(n+1)\,b_{n+1}}{(n+3)\,b_n}=\frac{n+1}{n+3}\left(1+\frac{b_{n+1}-b_n}{b_n}\right),\qquad \frac{b_{n+1}-b_n}{b_n}<1{,}2$$

Последнее неравенство справедливо при $n\geqslant 2$ и получено в результате численного расчета по формулам (2.11), причем с ростом n отношение $(b_{n+1}-b_n)/b_n$ убывает, но весьма медленно. Например, $(b_3-b_2)/b_2=1{,}179$, $(b_{12}-b_{11})/b_{11}=1{,}146$, $(b_{24}-b_{23})/b_{23}=1{,}130$.

Таким образом, имеем неравенства $|a_n|<2{,}2^n$, $|b_n|<2{,}2^n$ $(n=1,2,\ldots)$ и ряд (2.9) абсолютно сходится, если $2{,}2\,\xi^2<1$, т. е. $\xi^2<0{,}4545$. Поэтому в интервале (2.10) ряд (2.9) сходится вместе со всеми производными конечного порядка и подстановка этого ряда в уравнение (2.8) оправдана. Использование ряда (2.9) в практических расчетах весьма удобно, ибо, во-первых, он не содержит ни одного параметра, а во-вторых, быстро сходится из-за малости ξ^2. Заметим, что оценка (2.10) завышена.

Теперь вопрос о единственности и существовании решения задачи (1.7), (1.8) сводится к проблеме существования и единственности числа $a=s_0(0)$. Перепишем краевое условие (2.4) в несколько ином виде:

$$\frac{1}{2}=\int_0^q\frac{d\tau}{F^2(\sqrt{\tau})}+\frac{1+\nu}{1-\nu}\,\frac{1}{q}\int_0^q\frac{\tau\,d\tau}{F^2(\sqrt{\tau})}\tag{2.12}$$

Правая часть этого равенства, обозначаемая $P(q)$, есть монотонно возрастающая функция. Действительно, вычисляя производную, имеем

$$\frac{dP}{dq}=\frac{1}{F^2(\sqrt{q})}+\frac{1+\nu}{1-\nu}\left[\frac{1}{F^2(\sqrt{q})}-\frac{1}{q^2}\int_0^q\frac{\tau\,d\tau}{F^2(\sqrt{\tau})}\right]>0$$

ибо выражение в квадратных скобках положительно в силу оценки

$$\frac{1}{q^2}\int_0^q\frac{\tau\,d\tau}{F^2(\sqrt{\tau})}<\frac{1}{2}F^{-2}(\sqrt{q})$$

Поскольку $P(0)=0$ и $P'(q)>0$, то существует единственное решение уравнения (2.12). Поиск решения уравнения (2.12) не представляет трудностей, ибо $F(\xi)$ известна, а величину q нужно искать в сравнительно узком интервале $(1-\nu)/(3-\nu)^2<q<(1-\nu)/(3-\nu)$.

Решения уравнения (2.12) при различных значениях ν приводятся ниже:

ν	0,00	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
$q\cdot 10^4$	2350	2292	2231	2167	2099	2027	1950	1869	1783	1690	1591
$q_*\cdot 10^4$	2357	2305	2249	2187	2119	2045	1966	1880	1788	1688	1581

Видно, что для инженерных расчетов допустимо пользоваться и грубой формулой

$$q_*=\frac{(1-\nu)\sqrt{2+\nu}}{2(3-\nu)}\Rightarrow s_0(0)\simeq\frac{1}{4}\sqrt[3]{\frac{2(3-\nu)}{(1-\nu)\sqrt{2+\nu}}}\tag{2.13}$$

После определения q радиальное усилие в мембране находится по формуле

$$s_0=a\sum_{k=0}^{\infty}a_kq^k\rho^{2k},\qquad a=0{,}25q^{-1/3}\tag{2.14}$$

k	$-a_k$	b_k	$d_k/(k+1)$	k	$-a_k$	b_k	$d_k/(k+1)$
2	0,6667	0,4333	0,5556	14	196,6	44 209	27,24
3	0,7222	9,444	0,4861	15	368,4	94 626	47,30
4	0,9444	20,55	0,5046	16	695,8	202 397	83,19
5	1,370	44,63	0,5908	17	1322,9	432 640	138,0
6	2,125	96,67	0,7569	18	2530,1	924 270	265,9
7	3,452	208,9	1,039	19	4864,6	1 973 530	482,0
8	5,804	450,7	1,556	20	9397,7	4 211 900	880,7
9	10,02	970,9	2,277	21	18 233	8 985 030	1621
10	17,66	2088	3,564	22	35 514	19 159 400	3003
11	31,64	4486	5,739	23	69 418	40 839 400	5595
12	57,51	9627	9,462	24	136 131	87 020 700	10 482
13	105,8	20 639	15,92	25	267 756	–	–

Остальные величины выражаются через $s_0(\rho)$. Например, для нормального прогиба мембраны имеем

$$\frac{w_0}{h}=\left(\frac{pR^4}{Eh^4}\right)^{1/3}\sqrt[3]{q}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{d_k}{k+1}q^k(1-\rho^2\rho^{2k})$$

$$d_k=-\sum_{s=0}^{k-1}d_s a_{k-s},\qquad d_0=1\qquad (k=1,2,3\ldots) \tag{2.15}$$

Значения коэффициентов a_k и d_k даны в таблице.

Таким образом, построение мембранного решения полностью завершено.

3. Построение нелинейного краевого эффекта. Обратимся к решению задачи (1.9), (1.10). Хотя она и является нелинейной, тем не менее, для нее можно построить основной итерационный процесс [5] по малому параметру ε. Поскольку построение этого процесса представляет скорее математический, чем прикладной интерес, то ниже ограничимся построением только главного члена асимптотического разложения по параметру ε с указанием возникающей погрешности. Второе уравнение системы (1.9) содержит малый параметр при старшей производной. Кроме того, в его правую часть входит слагаемое $\varepsilon^2 L\theta_0$, где θ_0 — бесконечно дифференцируемая функция, не зависящая от ε. Поэтому ее удержание приводит к поправкам $O(\varepsilon^2)$. Во многих задачах эти поправки можно игнорировать. Если теперь отбросить слагаемое $\varepsilon^2 L\theta_0$ в (1.9), то видно, что функция θ_1 будет функцией типа погранслоя нулевого порядка, а $s_1(\rho)$ — второго порядка. Поэтому удержание слагаемого $(\theta_0+\theta_1)s_1$ в правой части (1.9) также приводит к поправкам $O(\varepsilon^2)$ и его можно отбросить. В результате для функции θ_1 получается линейная задача

$$\varepsilon^2(\rho^2\theta_1''+\rho\theta_1'-\theta_1)-\rho^2 s_0\theta_1=0,\quad \theta_1(1)=-\theta_0(1) \tag{3.1}$$

В основе возможности перехода к уравнению (3.1) лежит тот факт, что функция $s_0(\rho)$ ограничена снизу не малым числом $b=s_0(1)>0$. Поэтому условия регулярности вырождения [5] выполнены и справедливы все приведенные рассуждения.

Решение задачи (3.1) с погрешностью $O(\varepsilon^2)$ имеет вид

$$\theta_1(\rho)=-\theta_0(1)\rho g(\rho,\varepsilon)\exp\left[-\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_\rho^1\sqrt{s_0(\tau)}\,d\tau\right]+O(\varepsilon^2)$$

$$g(\rho,\varepsilon)=\exp\int\limits_\rho^1\frac{6s_0(\tau)+\tau s_0'(\tau)}{6\varepsilon\sqrt{s_0(\tau)}+4\tau s_0(\tau)}\,d\tau \tag{3.2}$$

Для всех значений ρ функция $g(\rho,\varepsilon)$ удовлетворяет неравенству ($m={}^3/_2a/b$):

$$1\leqslant g(\rho,\varepsilon)\leqslant[(3\varepsilon+2\sqrt{b})/(3\varepsilon+2\rho\sqrt{b})]^m \tag{3.3}$$

Отсюда следует, что θ_1, действительно, является функцией типа погранслоя. Для практических расчетов допустимо положить $g(\rho,\varepsilon)=1$, но в этом случае погрешность формулы (3.2) будет иметь порядок $O(\varepsilon)$, а не $O(\varepsilon^2)$. Специфичность формулы (3.2) объясняется тем, что $\rho=0$ – особая точка уравнения (3.1).

Было показано, что полное решение задачи об изгибе гибкой пластины не малым давлением представимо в виде суперпозиции мембранного решения и краевого эффекта. Окончательные формулы имеют вид

$$s(\rho)=s_0(\rho)+O(\varepsilon^2),\quad s_2(\rho)=(\rho s_0)'+\rho s_1'(\rho)+O(\varepsilon^2)$$

$$\theta(\rho)=\frac{\rho}{2\sqrt{1-\nu^2}}\left[\frac{1}{s_0(\rho)}-\frac{1}{s_0(1)}g(\rho,\varepsilon)\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_\rho^1\sqrt{s_0(\tau)\,d\tau}\right)+O(\varepsilon^2)\right] \tag{3.4}$$

Причем последнее представление можно дифференцировать без увеличения погрешности. В (3.4) функция s_1' вычисляется согласно (1.9) по формуле

$$s_1'(\rho)=\frac{1}{2}\rho\int\limits_0^1\tau f(\rho\sqrt{\tau})\,d\tau$$

в которой функцию θ_1 можно вычислять при $g(\rho,\varepsilon)=1$. Поскольку вычисление перемещений не требует дифференцирования, то они определяются с погрешностью $O(\varepsilon^2)$.

Рассмотрим пример, взятый из [2, с. 246], где приведено численное решение задачи (1.1), (1.2). Пластина радиуса 100 мм и толщиной $h=0{,}4$ мм выполнена из сплава с параметрами $E=2{,}1\cdot10^5$ МПа и $\nu=0{,}3$. Нагрузка – поперечное давление $p=0{,}04$ МПа. В данной задаче параметр ε равен

$$\varepsilon^2=\frac{1}{12\sqrt{1-\nu^2}}\left(\frac{E}{p}\frac{h^4}{R^4}\right)^{2/3}=1{,}115\cdot10^{-3},\qquad \varepsilon=0{,}0334$$

Судить о малости этого параметра можно только в сравнении с числом $b=s_0(1)$. Согласно (2.14), имеем

$$s_0(1)=\frac{1}{4\sqrt[3]{q}}\sum_{k=0}^{\infty}a_kq^k,\qquad q=0{,}195\Rightarrow s_0(1)=0{,}3353,\qquad s_0(0)=0{,}4311$$

Поэтому величину $\varepsilon/b^{1/2}=0{,}0577$ нельзя считать пренебрежимо малой, однако квадратами этой величины уже можно пренебрегать. Это означает, что радиальное усилие достаточно точно определяется по безмоментной теории

$$T_1 = \frac{Eh}{1-\nu^2} t_1 = \frac{Eh}{1-\nu^2} \beta^{2/3} s_0 \Rightarrow h^{-1} T_1(0) = 0{,}4311 \sqrt[3]{E \left(\frac{pR}{h}\right)^2}$$

Теперь вычислим нормальный прогиб в центре. Согласно (1.4) и (1.6), имеем

$$w = w_0 + w_1 = \beta^{1/3} R \int_{\rho}^{1} [\theta_0(\tau) + \theta_1(\tau)]\,d\tau$$

где w_0 – прогиб по безмоментной теории, а w_1 – добавка, обусловленная защемлением края пластины.

По формуле (2.15) находим

$$w_0(0) = 0{,}6512 h (pR^4)^{1/3} / (Eh^4)^{1/3} = 5{,}901 h = 2{,}3604 \text{ мм}$$

Для $w_1(0)$ получается формула

$$h^{-1} w_1(0) = -\frac{b^{-3/2}}{2\sqrt{12(1-\nu^2)}} \left(1 - \frac{\varepsilon}{\sqrt{b}}\right) + O\left(\varepsilon^3 \beta^{1/3} \frac{R}{h}\right) = -0{,}734$$

Общий прогиб в центре имеет величину $w(0) = w_0(0) + w_1(0) = 2{,}3604 - 0{,}734h = 2{,}07$ мм.

Для сравнения приведем значение прогиба в центре согласно [2, с. 247; 6, с. 612] соответственно $w(0) = 2{,}3$ мм, $w(0) = 2{,}5$ мм.

Безмоментная теория по [6, с. 614] дает $w_0(0) = 2{,}4$ мм, $h^{-1} T_1(0) = 0{,}423\ [E^{1/3} \cdot (pR)^{2/3} / h^{2/3}]$. Видна физическая противоречивость данных, приведенных в [6]. Отметим, что полученные результаты являются в данном случае практически точными, ибо, например, величина $\varepsilon^3 \beta^{1/3} R/h = 0{,}322 \cdot 10^{-3}$ пренебрежимо мала в сравнении с $h^{-1} w_0(0) = 5{,}9$. Поэтому заметное расхождение с литературными данными, видимо, следует отнести к неточности последних.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Вольмир А. С.* Гибкие пластинки и оболочки. М.: Гостехиздат, 1956. 419 с.
2. *Пономарев С. Д., Андреева Л. Е.* Расчет упругих элементов машин и приборов. М.: Машиностроение, 1980. 326 с.
3. *Морозов Н. Ф.* Качественное исследование мембранного решения.– Тр. IV Всес. конф. по теории оболочек и пластин. Ереван: Изд-во АрмССР, 1964, с. 702–705.
4. *Морозов Н. Ф., Срубщик Л. С.* Применение метода Чаплыгина к исследованию уравнения мембраны.– Дифференц. уравнения, 1966, т. 2, № 3, с. 425–427.
5. *Вишик М. И., Люстерник Л. А.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром.– Успехи матем. наук, 1957, т. 12, вып. 5, с. 3–122.
6. Прочность. Устойчивость. Колебания. Справочник. Т. 1. М.: Машиностроение, 1968. 831 с.

Ленинград

Поступила в редакцию 14.V.1982