МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 • 1992

УДК 539.3

© 1992 г. П. А. ЖИЛИН

О ТЕОРИЯХ ПЛАСТИН ПУАССОНА И КИРХГОФА С ПОЗИЦИЙ СОВРЕМЕННОЙ ТЕОРИИ ПЛАСТИН

25 апреля 1990 года исполняется 150 лет со дня смерти выдающегося французского математика, физика и механика Симеона Дени Пуассона (21.06.1781 — 25.04.1840). Отмечая день памяти, мы не только подтверждаем заслуги великого ученого, но и имеем возможность с позиций современного знания понять давно свершившиеся события и их влияние на современное состояние той или иной научной проблемы.

Подобно многим великим ученым, Пуассон оставил не только общепризнанные достижения, но и результаты, удивляющие своей загадочностью. Одна из таких загадочных ситуаций возникла следующим образом. В 1828 году Пуассон представил мемуар [1], в котором среди прочих результатов, он построил теорию изгиба тонких плит. При этом он показал, что нормальный прогиб пластины удовлетворяет неоднородному бигармоническому уравнению С. Жермен — Лагранжа. Однако на контуре пластины Пуассон сформулировал три граничных условия. Знаменитый математик, один из создателей теории уравнений в частных производных, Пуассон, конечно, не мог не знать, что в общем случае сформулированная им задача неразрешима. Тем не менее, он именно так и поступил. Почему? Вот в этом и состоит загадка, нерешенная до сих пор в литературе по теории пластин, где она получила название «Ошибка Пуассона в теории пластин». Первым, кто заострил внимание на неразрешимости задачи Пуассона, был Густав Роберт Кирхгоф. В 1850 году в работе [2] он, исследуя поперечные колебания тонкой пластины, исходил из функционала энергии пространственной теории упругости. Введя специальные гипотезы, которые по существу явились перефразировкой результатов Пуассона, он упростил функционал и из требования его стационарности в качестве уравнения Эйлера получил уравнение Жермен — Лагранжа, а в качестве естественных условий — два условия в перемещениях на свободном крае, вместо трех у Пуассона. Этот успех, видимо, дал основание Кирхгофу заявить, «что в общем случае условия Пуассона вообще не могут быть удовлетворены, так что согласно Пуассону пластина вообще не может находиться в равновесии». Трудно поверить, чтобы зрелый Кирхгоф подписался бы под этим заявлением. Во всяком случае, если судить по изложению теории пластин в [3], Кирхгоф не мог не понимать, что нарушение условий равновесия имеет место именно в его теории, а не в теории Пуассона. Так или иначе, но работа [2] привлекла всеобщее внимание и разгорелась самая продолжительная в истории механики упругого тела дискуссия, в которой приняли участие многие выдающиеся ученые: Клебш (1862), Кельвин и Тэт (1867), Матье (1869), Буссинеск (1871, 1879), Лемб (1890), Митчел (1900), Адамар (1902) и др.

Раскаты этой дискуссии дошли и до наших дней [4, с. 242—246], [5, с. 58—71]. Наиболее заметное влияние на ход дискуссии оказали Кельвин и Тэт [6, с. 188—193]. Например, А. Ляв свидетельствует [7, с. 41]: «Кельвин и Тэт сделали невозможными какие-либо сомнения по поводу теории, относящейся к уравнениям равновесия...; объединение двух граничных условий Пуассона в одном условии Кирхгофа они объяснили с точки зрения принципа упругой равнозначности систем нагрузок. Позднейшие исследования содействовали устранению последних затруднений, связанных с теорией Кирхгофа». Строго говоря, и это важно, А. Ляв теорией Кирхгофа называет теорию Кельвина и Тэта. Между тем, эти теории принципиально различаются. Отмеченная подмена понятий сохраняется и в современной литературе. Во избежание недоразумений, мы будем строго различать теорию Пуассона (П-теория), теорию Кирхгофа (К-теория) и теорию Кирхгофа — Кельвина — Тэта (ККТ-теория). Итак, ККТ-теория полностью победила и укоренилась легенда об ошибке Пуассона в теории пластин. Мы говорим — легенда — ибо ни один из авторов до сих пор не указал, какие именно уравнения или условия в теории Пуассона являются ошибочными. Подобная ситуация является, видимо, уникальной в истории механики и заслуживает отдельного рассмотрения, которое имеет значение не только с исторической точки зрения.

Прежде всего мы должны объяснить, почему Пуассона не смутило несоответствие числа краевых условий и порядка дифференциального уравнения. Из работы Пуассона видно, что он ставил три условия во всех случаях, а не только в случае силовых граничных условий. Тем не менее, во всех рассмотренных им задачах (шарнирно-опертая и защемленная пластины, осесимметричная деформация круглой пластины) никаких недоразумений не произошло: все три условия выполнялись точно. Очевидно, что Пуассон не считал теорию пластин универсальной и полагал, что она применима тогда и только тогда, когда переопределенная задача Пуассона разрешима. Поэтому Пуассон вряд ли согласился бы с критикой Кирхгофа, аппелирующего к «общему случаю». Как раз в общем случае никакими ухищрениями невозможно три условия заменить двумя. Чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть задачу с кинематическими условиями. В этом смысле переопределенная задача Пуассона весьма конструктивна: ее неразрешимость указывает на необходимость обращения к более точным теориям. И теория Кирхгофа здесь не спасет. Правда, в случае силовых граничных условий ККТ-теория позволяет рассмотреть задачи, неразрешимые в теории Пуассона. Однако это достигается не даром, а ценой значительной потери информации. Кроме того, с математической точки зрения ККТ-теория оказывается значительно более сложной, чем теория Пуассона.

В заключении этого пункта отметим следующее обстоятельство. Обычно, едва ли не главным достоинством ККТ-теории объявляется ее простота и наглядность с физической точки зрения. Так ли это? Напомним, что в механике порядок уравнения n и число краевых условий m тесно связаны с числом используемых законов сохранения k, а именно $n = 2k$, $m = k$. В теории изгиба пластин используются три закона сохранения: баланс поперечных сил и два уравнения баланса моментов. Это означает, что теория пластин должна описываться уравнениями шестого порядка с тремя краевыми условиями. С этой точки зрения в теории Пуассона, когда она приводит к разрешимой задаче, оказывается все в порядке (это будет показано ниже). Поэтому о нарушении условий равновесия в теории Пуассона не может быть и речи. А вот в ККТ-теории, описывающейся уравнениями четвертого порядка с двумя краевыми условиями, один закон сохранения потерян:

уравнение баланса поперечных сил строго говоря не выполняются. Конечно, теория Пуассона нуждается в дополнениях: порядок уравнения все-таки желательно повысить и тем самым расширить область применимости теории пластин. Этот путь был найден Е. Рейсснером в 1944 году. О поисках этого пути и различных подходах к решению этого вопроса подробно изложено в [8]. Именно существование теорий пластин типа Рейсснера и позволяет нам разобраться во всех нюансах более чем столетней дискуссии.

1. Теория изгиба пластин типа Рейсснера. В настоящее время теории пластин, учитывающие деформацию поперечного сдвига и обжатия хорошо известны. Основной вклад в развитие такого рода теорий внес Е. Рейсснер, поэтому будем их называть теориями типа Рейсснера. Ниже используется версия теории пластин типа Рейсснера, предложенная в [9—11], хотя для целей данной работы используемый вариант теории типа Рейсснера не имеет значения. С другой стороны, приводимые ниже соотношения имеют очень широкую область применимости и могут использоваться, например, для расчета относительно толстых плит.

Напряженно-деформированное состояние в тонкой пластине при поперечном изгибе определяется заданием: тензора моментов $\mathbf{M}$, вектора перерезывающих сил $\mathbf{N}$, нормального прогиба W и вектора поворота Ψ. Если через $\mathbf{V}$ обозначить вектор смещения частиц трехмерной среды, а через τ — тензор напряжения, то связь между двухмерными и трехмерными характеристиками дается формулами

$$\mathbf{M} = \langle \mathbf{a}\cdot\tau\cdot\mathbf{a}z\rangle,\quad \mathbf{N} = \langle \mathbf{a}\cdot\tau\cdot\mathbf{n}\rangle,\quad hW = \langle \mathbf{V}\cdot\mathbf{n}\rangle \tag{1.1}$$

$$h^3\Psi = 12\langle \mathbf{a}\cdot\mathbf{V}z\rangle,\quad \mathbf{a} = \mathbf{E} - \mathbf{nn},\quad \langle \mathbf{f}\rangle \equiv \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{f}\,dz$$

где h — толщина пластины, $\mathbf{n}$ — единичная нормаль к срединной плоскости до деформации, $\mathbf{E}$ — единичный тензор 2-го ранга размерности 3. Обратим внимание, что $\mathbf{M}$, $\mathbf{N}$ и Ψ являются плоскими $\mathbf{M}\cdot\mathbf{n} = \mathbf{n}\cdot\mathbf{M} = 0$, $\mathbf{N}\cdot\mathbf{n} = 0$, $\Psi\cdot\mathbf{n} = 0$. Формулы для моментов и усилий в (1.1) являются общепринятыми, но для перемещений и поворотов они отличаются от традиционных. В частности, W нельзя отождествлять с перемещением срединной плоскости. В некоторых задачах это обстоятельство является важным [10]. Вектор момента $\mathbf{M}_{(\nu)}$ и перерезывающая сила $N_{(\nu)}$, действующие по площадкам с нормалью ν: $\nu\cdot\mathbf{n} = 0$, $\nu\cdot\nu = 1$, вычисляются по формулам Коши

$$\mathbf{M}_{(\nu)} = \nu\cdot\mathbf{M},\quad N_{(\nu)} = \nu\cdot\mathbf{N} \tag{1.2}$$

Полная система уравнений, описывающая изгиб пластин поперечными нагрузками (касательные нагрузки к лицевым плоскостям не приложены), имеет вид

$$\nabla\cdot\mathbf{N} = p_2 - p_1,\quad \nabla\cdot\mathbf{M} = \mathbf{N} \tag{1.3}$$

$$\mathbf{M} = m\mathbf{a} + D[(1-\nu)\kappa + \nu\,\mathrm{tr}\kappa\,\mathbf{a}],\quad \mathbf{N} = Gh\Gamma\gamma \tag{1.4}$$

$$2\kappa = \nabla\Psi + \nabla\Psi^{\mathrm{T}},\quad \gamma = \nabla W + \Psi \tag{1.5}$$

В формулах (1.3) — (1.5) принято $\nabla = \mathbf{r}^\alpha\partial/\partial q^\alpha$ – двумерный оператор-градиент (суммирование по повторяющемуся греческому индексу от 1 до 2); q^α – гауссовы координаты на срединной плоскости; $\mathbf{r}_\alpha = \partial\mathbf{r}/\partial q^\alpha$ – базисные векторы на плоскости; $\mathbf{r}^\alpha$ – векторы взаимного базиса $\mathbf{r}^\alpha\cdot\mathbf{r}_\beta = \delta^\alpha_\beta$; $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$ – жесткость пластины на изгиб; $G = E/2(1+\nu)$; $m = \nu h^2(p_1 - p_2)/12(1-\nu)$; p_1 и p_2 — поперечные давления, действующие на верхнюю и нижнюю лицевые поверхности пластин соответственно; они считаются положительными, если являются растягивающими; Γ — коэффициент поперечного сдвига: обычно $\Gamma = \pi^2/12$, но допускаются и другие значения $\Gamma = 5/6$, $\Gamma = 5/(6-\nu)$ — последнее рекомендуется в задачах с ярко выраженным изгибом [10, 11].

Система уравнений (1.3) — (1.5) описывает теорию пластин типа Рейсснера, в которой учитывается деформация поперечного сдвига и обжатия, и является системой 6-го порядка эллиптического типа. В этой теории в каждой точке контура необходимо поставить три краевых условия. Если трехмерные краевые условия известны, то по формулам (1.1) и (1.2) легко сопоставить им двумерные краевые условия. Приведем наиболее употребительные типы краевых условий.

Кинематические условия

$$W|_C = W_*, \quad \Psi|_C = \Psi_*, \quad (\Psi_* \cdot \mathbf{n} = 0) \tag{1.6}$$

Силовые граничные условия

$$\nu \cdot \mathbf{M}|_C = \mathbf{m}, \quad (\mathbf{m} \cdot \mathbf{n} = 0), \quad \nu \cdot \mathbf{N}|_C = q \tag{1.7}$$

Условия шарнирного опирания

$$\nu \cdot \mathbf{M} \cdot \nu|_C = 0, \quad W|_C = 0, \quad \tau \cdot \Psi|_C = 0 \tag{1.8}$$

В правых частях (1.6) и (1.7) стоят заданные функции точек контура C. Вектор τ в (1.8) обозначает единичную касательную к контуру C.

Часто оказывается удобной постановка задачи изгиба в потенциалах [12, с. 160] Φ и F, которые определяются как решения уравнений

$$D\Delta\Delta\Phi = p_2 - p_1 - \Delta m, \quad h^2\Delta F - 12\Gamma F = 0 \tag{1.9}$$

где $\Delta = \nabla \cdot \nabla$ — двумерный оператор Лапласса. Из уравнений (1.9) видим, что потенциал Φ описывает проникающие внутрь области пластины решения, а потенциал F — является функцией типа погранслоя, т. е. описывает затухающие при удалении от границы решения. Зона затухания F имеет протяженность около двух толщин пластины. Поэтому во внутренних точках области, отстоящих от границы на расстояниях больших $2h$, решение практически точно описывается проникающим потенциалом Φ. Отсюда, конечно, не вытекает, что погранслойный потенциал F можно игнорировать, ибо он может существенно влиять на проникающий потенциал Φ через граничные условия.

Искомые величины выражаются через потенциалы по следующим формулам

$$Gh\Gamma W = -Gh\Gamma\Phi + D\Delta\Phi + m \tag{1.10}$$

$$\Psi = \nabla\Phi + \nabla F \times \mathbf{n} \tag{1.11}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M} = m\mathbf{a} + D\,[(1-\nu)\nabla\nabla\Phi + \nu\Delta\Phi\mathbf{a}] + \\ + \tfrac{1}{2}(1-\nu)\,D\,[\nabla\nabla F \times \mathbf{n} - \mathbf{n} \times \nabla\nabla F] \end{aligned} \tag{1.12}$$

$$\mathbf{N} = Gh\Gamma\nabla F \times \mathbf{n} + D\nabla\Delta\Phi + \nabla m \tag{1.13}$$

Обратим внимание на то, что нормальный прогиб W в соответствии с (1.10) и (1.9) удовлетворяет уравнению

$$D\Delta\Delta W = p_1 - p_2 - \underline{\frac{h^2}{6(1-\nu)}\left(\frac{1}{\Gamma} - \frac{\nu}{2}\right)\Delta(p_1 - p_2)} \tag{1.14}$$

Для тонких пластин и гладких медленно меняющихся функции p_1 и p_2 подчеркнутое слагаемое в (1.14) можно отбросить. Это означает, что нормальный прогиб удовлетворяет уравнению С. Жермен — Лагранжа, даже когда кинематические гипотезы Кирхгофа не принимаются.

В заключение этого пункта приведем запись соотношений (1.11) — (1.13) в декартовой системе координат

$$\Psi_x = \partial\varphi/\partial x + \partial F/\partial y, \quad \Psi_y = \partial\Phi/\partial y - \partial F/\partial x$$

$$M_x = m + D\left[\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + (1-\nu)\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}\right]$$

$$M_y = m + D\left[\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} - (1-\nu)\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}\right]$$

$$M_{xy} = M_{yx} = (1-\nu)D\left[\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial y} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)\right] \tag{1.15}$$

$$N_x = Gh\Gamma\frac{\partial F}{\partial y} + D\frac{\partial\Delta\Phi}{\partial x} + \frac{\partial m}{\partial x}, \quad N_y = -Gh\Gamma\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial\Delta\Phi}{\partial y} + \frac{\partial m}{\partial y}$$

Сформулированная теория типа Рейсснера, как показывает большое количество расчетов, хорошо согласуется с трехмерной теорией упругости во всех случаях, включая действие сосредоточенных сил [10], если в качестве критерия согласования принимать формулы (1.1).

2. Теория пластин Пуассона. Не останавливаясь на деталях вывода уравнений теории Пуассона, отметим, что она получается из теории типа Рейсснера, приведенной выше, оставлением только главных членов и отбрасыванием погранслойного потенциала $F = O_0$. В результате получается следующая краевая задача

$$D\Delta\Delta W = p_1 - p_2, \quad \Psi = -\nabla W \tag{2.1}$$

$$\mathbf{M} = -D[(1-\nu)\nabla\nabla W + \nu\Delta W\mathbf{a}], \quad \mathbf{N} = D\nabla\Delta W \tag{2.2}$$

Краевые условия следуют из (1.6) — (1.8): во всех случаях Пуассон ставит три условия.

Кинематические условия

$$W|_C = W_*, \quad -dW/d\nu|_C = \Psi_{*\nu}, \quad -dW/d\tau|_C = \Psi_{*\tau} \tag{2.3}$$

Сравнивая первое и третье условия в (2.3), видим, что задача Пуассона разрешима, если заданные на контуре функции W_* и $\Psi_{*\tau}$ удовлетворяют условию разрешимости $dW_*/d\tau = -\Psi_{*\tau}$. Это условие выполнено, например, для защемленной пластины $W_* = 0$, $\Psi_* = 0$. Причем, если условие разрешимости выполнено, то решение по теории типа Рейсснера в главных членах совпадает с решением по теории Пуассона. Сказанное верно для всех величин: перемещений, моментов и перерезывающих сил. Ошибки в перемещениях и изгибающих моментах имеют порядок $O(h^2)$ в сравнении с единицей, а ошибки в крутящих моментах и перерезывающих силах имеют порядок $O(h)$ в сравнении с единицей, причем в качестве единицы длины берется характерный размер пластины в плане, т. е. h выражено в долях этого размера и, следовательно, мало. Шарнирное опирание

$$\nu\cdot\mathbf{M}\cdot\nu|_C = 0, \quad W|_C = 0, \quad -dW/d\tau|_C = 0 \tag{2.4}$$

Здесь условие разрешимости выполнено и справедливо все, что было сказано выше, при обсуждении кинематических условий.

Силовые граничные условия

$$\nu\cdot\mathbf{M}\tau|_C = \mathbf{m}, \quad (\mathbf{m}\cdot\mathbf{n} = 0); \quad \nu\cdot\mathbf{N}|_C = q \tag{2.5}$$

В этом случае, как правило, все три условия задаются независимо и, вообще говоря, задача Пуассона может быть неразрешима. Отсюда делается вывод, что на контуре нужно задавать два условия. Однако на самом деле все три условия (2.5) являются необходимыми не только с физической, но и с формально математической точек зрения. На это обстоятельство почему-то никогда не обращается внимания, но вполне вероятно, что Пуассон интуитивно это ощущал. (Строгая теория задачи Неймана была разработана через 37 лет после смерти Пуассона.) Чтобы подтвердить сказанное, введем в рассмотрение функцию

$$\sigma = \operatorname{tr} \mathbf{M} = M_x + M_y = -(1+\nu)D\Delta W \tag{2.6}$$

Тогда согласно (2.1) функция σ удовлетворяет уравнению

$$\Delta\sigma = -(1+\nu)(p_1 - p_2) \tag{2.7}$$

Второе из условий (2.5) с учетом (2.6) принимает вид

$$\nu\cdot\mathbf{N}\rfloor_C = -D\Delta W/d\nu|_C = q \Rightarrow d\sigma/d\nu|_C = (1+\nu)q \tag{2.8}$$

Первое из условий (2.5) эквивалентно двум условиям

$$\nu\cdot\mathbf{M}\cdot\nu|_C = \left[(1-\nu)D\left(\frac{1}{\rho}\frac{dW}{d\nu} + \frac{d^2W}{d\tau^2}\right) + \frac{\sigma}{1+\nu}\right]\Big|_C = \mathbf{m}\cdot\gamma \tag{2.9}$$

$$\nu\cdot\mathbf{M}\cdot\tau|C = -(1-\nu)D\frac{\partial^2 w}{\partial\nu\,\partial\tau}\Big|_C = -(1-\nu)D\left[\frac{\partial^2 w}{\partial\tau\,\partial\nu} - \underline{\frac{1}{\rho}\frac{\partial w}{\partial\tau}}\right]\Big|_C = \mathbf{m}\cdot\tau \tag{2.10}$$

где ρ — радиус кривизны контура C в рассматриваемой точке. Надеемся, что читателя не смутит двойное использование ν: в обозначении производной по нормали и для обозначения коэффициента Пуассона.

Для функции σ получили задачу Неймана (2.7) — (2.8), которая разрешима, если поперечные нагрузки, действующие на пластину, уравновешены. Как известно, решение задачи Неймана определено с точностью до постоянной A. Обратимся теперь к задаче (2.6), (2.10). Это уже не задача Неймана, но она сохраняет все особенности последней. Для качественных рассуждений ограничимся случаем, когда подчеркнутое слагаемое в (2.10) можно отбросить. Тогда условие (2.10) можно записать в проинтегрированной вдоль контура форме

$$-(1-\nu)D\frac{\partial w}{\partial\nu}\Big|_C = \int_0^\tau \mathbf{m}(s)\cdot\tau(s)ds + B \tag{2.11}$$

где B — произвольная постоянная.

Для функции w вновь получили задачу Неймана (2.6), (2.11), которая содержит два произвольных параметра A и B. Условие ее разрешимости имеет вид

$$(1-\nu)\int_{(\Omega)} \sigma\, d\Omega = (1+\nu)\int_C d\tau\left[\int_0^\tau \mathbf{m}(s)\cdot\tau(s)ds + B\right] \tag{2.12}$$

Условие (2.12) доставляет связь между A и B, но не устраняет связанную с ними неединственность, для исключения которой и необходимо привлекать условие (2.9). Это обстоятельство показывает необходимость постановке на контуре всех трех условий Пуассона. Приведенные рассуждения являются, конечно, достаточно условными, но мы не хотим привлекать более строгие (и намного более пространные) рассуждения, поскольку он представляет скорее математический, нежели физический интерес. В п. 5 будет приведен простой пример, иллюстрирующий сказанное. В этом примере будет видно, что все три условия необходимы. Если задача Пуассона при условиях (2.5) разрешима, то легко убедиться, что ее решение совпадает в главных членах с решением по теории типа Рейсснера. Отсюда вытекают два следствия. Первое: в разрешимой задаче Пуассона все три закона сохранения выполнены. Второе: если задача Пуассона не разрешима, то необходимо учитывать погранслойный потенциал и никакие манипуляции с краевыми условиями помочь здесь не могут. Это означает, что устоявшийся взгляд на теорию пластин Кирхгофа — Кельвина — Тэта не может быть правильным и требует пересмотра. В заключение этого пункта подчеркнем, что теория Пуассона при силовых граничных условиях приводит не к полной бигармонической проблеме, а к последовательному решению двух задач Неймана, что, конечно, несравнимо проще.

3. **Теория Кирхгофа.** Под этим названием известны три различные теории. Первая была предложена в [2] и хорошо известна. Вторая — есть симбиоз уравнений Пуассона, записанных Р. Клебшем в терминах усилий и моментов, силовых краевых условий Кирхгофа и преобразования Кельвина — Тэта, оправдывающего переход от условий Пуассона к условиям Кирхгофа. Третья теория пластин — именно она должна называться теорией Кирхгофа — была разработана Ф. Герингом (1860) под руководством Кирхгофа. Изложение работы Ф. Геринга можно найти в книге [15, с. 207—214]. Версия самого Киргофа изложена в лекциях 28 и 30 книги [3]. Из-за недостатка места ниже будет дана упрощенная трактовка результатов Кирхгофа. Если сравнить изложения теории Кирхгофа — Геринга в [15] и теории Кирхгофа в [3], то бросается в глаза полное совпадение всех основных уравнений и резкое различие в обоснованиях этих уравнений. Очевидно, что рассуждения Кирхгофа не показались его современникам убедительными. Свой метод Г. Кирхгоф разработал при создании теории стержней (1858). Без всяких изменений этот метод был перенесен Ф. Герингом на теорию пластин, поэтому неясно, почему работа Ф. Геринга была опубликована без имени Кирхгофа. Два принципиально новых момента присущи методу Кирхгофа. Во-первых, здесь впервые возник асимптотический метод, хотя и в зачаточной форме. Формальная сторона асимптотического подхода, видимо, была еще не полностью ясна Кирхгофу, но на интуитивно-прикладном уровне Кирхгоф сформулировал его вполне отчетливо. В дальнейшем метод Кирхгофа был переоткрыт и существенно развит в работах [13]. Во-вторых, для вывода линейной теории пластин Кирхгоф применяет асимптотический анализ нелинейных соотношений пространственной теории упругости. Важность этого обстоятельства, видимо, ускользает от внимания современных авторов.

Дальнейшее изложение отнюдь не является общепринятым, поэтому его можно рассматривать как личную точку зрения автора на теорию Кирхгофа. Представленные ниже оценки отсутствуют в явном виде у Кирхгофа, но словесно они им формулируются совершенно отчетливо.

Прежде всего отметим, что теории Пуассона и Кирхгофа суть несравнимые теории. Именно игнорирование этого обстоятельства и породило обсуждаемую во введении дискуссию. Если задача Пуассона разрешима, то теория Пуассона позволяет вычислить все интересующие инженера характеристики: прогибы, усилия, моменты. При этом асимптотический порядок этих величин практически не имеет значения. В теории Кирхгофа дело обстоит иначе. Она позволяет рассмотреть и те случаи, когда задача Пуассона неразрешима, но достигается это ценой значительной потери информации. А именно, теория Кирхгофа позволяет правильно определить главные члены асимптотических разложений прогиба и изгибающих моментов при условии, что они имеют указанный Кирхгофом асимптотический порядок. Перерезывающие усилия в теории Кирхгофа вообще не имеют смысла (полагаются равными нулю) и с этим связана потеря баланса поперечных сил. Крутящие моменты по теории Кирхгофа вблизи границы вычисляются правильно тогда и только тогда, когда разрешима задача Пуассона. Однако последнее обстоятельство из рассуждений Кирхгофа не вытекает и им не отмечено.

На основе анализа трехмерных уравнений теории упругости Кирхгоф установил асимптотические порядки всех напряжений

$$\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy} \sim O(h^{-2});\ \tau_{xz}, \tau_{yz} \sim O(h^{-1});\ \sigma_z \sim O(1).$$

При этом считается, что внешние нагрузки имеют порядок $O(1)$. Из полученных оценок для напряжений следует, что прогиб имеет порядок $O(h^{-3})$. Кирхгоф не строил асимптотических разложений и считал, что главные члены полностью определяют искомые функции. Еще раз подчеркнем, что Кирхгоф под главными членами понимал члены определенного асимптотического порядка, а не первый, отличный от нуля, член асимптотического разложения. Например, для напряжений имеем

$$\sigma_x = h^{-2}\sigma_x^{(0)} + O(h^{-1}), \quad \tau_{xz} = h^{-2}\tau_{xz}^{(0)} + O(h^{-1}).$$

Из сказанного следует, что главный член асимптотического разложения τ_{xz} равен нулю ($\tau_{xz}^{(0)} = 0$) – это и есть одна из «гипотез» Кирхгофа, которая просто фиксирует результат асимптотического анализа. То же самое можно сказать о прогибе — теория Кирхгофа позволяет найти W только в том случае, когда он имеет порядок $O(h^{-3})$. Если же W имеет порядок, например, $O(h^{-2})$, то теория Кирхгофа приведет к выводу, что $W = 0$, т. е. нулю равно слагаемое порядка $O(h^{-3})$. Кроме того, Кирхгоф вводил явное допущение о том, что все искомые функции трех пространственных координат не меняют своего асимптотического порядка при дифференцировании по продольным координатам. Это единственное трудно проверяемое допущение в теории Кирхгофа. По существу такое же допущение принималось в теории Пуассона, но там оно автоматически выполняется, если переопределенная задача Пуассона разрешима. В теории Кирхгофа этого нет. Очевидно, что по теории Кирхгофа нельзя найти перерезывающие силы, но не очевидно, когда по К-теории правильно вычисляются крутящие моменты вблизи границы. Поэтому, строго говоря, К-теория позволяет правильно вычислять только нормальный прогиб, если он имеет порядок $O(h^{-3})$, и изгибающие моменты. Мы не будем проводить дальнейшего анализа теории Кирхгофа. Отметим только, что теория Кирхгофа осталась непонятой современниками. Она действительно расширяет диапазон применимости теории пластин в сравнении с теорией Пуассона, но за это расширение заплачено весьма ощутимой с прикладной точки зрения ценой. Поэтому, будучи почти безупречной с математической точки зрения, теория Кирхгофа не могла бы претендовать на роль ведущей прикладной теории. Эту роль взяла на себя теория Кирхгофа — Кельвина — Тэта, которая и известна в литературе под названием теории Кирхгофа.

4. Теория Кирхгофа — Кельвина — Тэта. Кельвин и Тэт не заметили существенного различия в теориях Пуассона и Кирхгофа и свели это различие только к вопросу о краевых условиях. А именно, Кельвин и Тэт приняли, что справедливы уравнения Пуассона (2.1), (2.2) — у самого Кирхгофа не было второго из уравнений (2.2),— а от теории Кирхгофа позаимствовали гипотезы Кирхгофа (проигнорировав их асимптотическую природу) и, самое главное, краевые условия Кирхгофа. При этом они приобрели возможность обращаться с силовыми факторами, как имеющими реальный физический смысл. Это обстоятельство и придало теории Кирхгофа — Кельвина — Тэта ту привлекательность, которая завоевала этой теории роль ведущей прикладной теории в теории пластин. Обратим внимание, что в этом пункте будет обсуждаться именно теория Кирхгофа — Кельвина — Тэта и будут как бы забыты факты, установленные самим Кирхгофом и описанные в предыдущем пункте. Это допустимо, ибо эти факты игнорировались в работе Кельвина — Тэта [6] и в современных монографиях. Иными словами, анализироваться будет логика рассуждений Кельвина — Тэта. Очевидно, что подробно излагать теорию Кирхгофа — Кельвина — Тэта нет необходимости — она изложена во множестве книг. Одно из наиболее четких и концентрированных изложений содержится в [14, с. 52—68], на которую мы и будем ссылаться. Следует, однако, иметь в виду, что все принципиальные положения, изложенные в [14], содержатся в [6], [15]. В теории Кирхгофа — Кельвина — Тэта за основу приняты уравнения Пуассона (2.1) и (2.2). Но вместо трех условий Пуассона (2.5) формулируются два условия Кирхгофа

$$\nu\cdot\mathrm{M}\cdot\nu|_C = \mathrm{m}\cdot\nu, \quad \left[\nu\cdot\mathrm{N} + \frac{d}{d\tau}(\nu\cdot\mathrm{M}\cdot\tau)\right]\Big|_C = q + \frac{d}{d\tau}(\mathrm{m}\cdot\tau) \qquad (4.1)$$

Условия (4.1) впервые появились в [6]. Они могут быть получены двумя способами: на основе вариационного принципа и на основе преобразования

Кельвина — Тэта. Интересно, что именно второй способ способствовал всеобщему признанию того, что условия (4.1) действительно выражают некую физическую реальность. Обратим внимание, что у Кирхгофа второе из условий (4.1) не фигурировало и не могло появиться. Во-первых, в правой части условия Кирхгофа стоит нуль, т. е. рассматривается свободный от напряжений край. Это не случайно. Если бы Кирхгоф рассмотрел нагруженный край, он пришел бы к очевидному противоречию с результатами своего асимптотического анализа. Во-вторых, левая часть второго условия (4.1) выражена у Кирхгофа через перемещение, что так же принципиально, ибо понятие перерезывающей силы у Кирхгофа отсутствует.

Основные результаты Кельвина и Тэта заключаются в следующем. Первое: они показали, что действие крутящего момента эквивалентно действию соответствующим образом подобраной перерезывающей силы. Второе: вместо настоящей перерезывающей силы в рассмотрение введена приведенная перерезывающая сила

$$N^{*}_{(\nu)} = \nu \cdot \mathbf{N} + \frac{d}{d\tau}(\nu \cdot \mathbf{M} \cdot \tau) \tag{4.2}$$

с которой предлагается работать так же, как с настоящей перерезывающей силой, вплоть до того, что реакцию на опорах предлагается вычислять как интеграл вдоль контура от $N^{*}_{(\nu)}$ [14, с. 72]. Третье: утверждается, что при переходе от (2.5) к (4.1) в угловых точках контура возникает сосредоточенная сила, равная по величине скачку в крутящем моменте, но при этом ничего не говорится о том, что делать с этой сосредоточенной силой. До сих пор ведутся споры о том, являются ли эти силы настоящими или фиктивными [4, с. 245]. В [14, с. 72] эти силы считаются реальными. Четвертое: утверждается, что переход от условий Пуассона (2.5) к условиям Кирхгофа (4.1) сопровождается погрешностью, локализованной в узкой зоне вблизи края пластины. Это оправдывается ссылкой на принцип Сен-Венана.

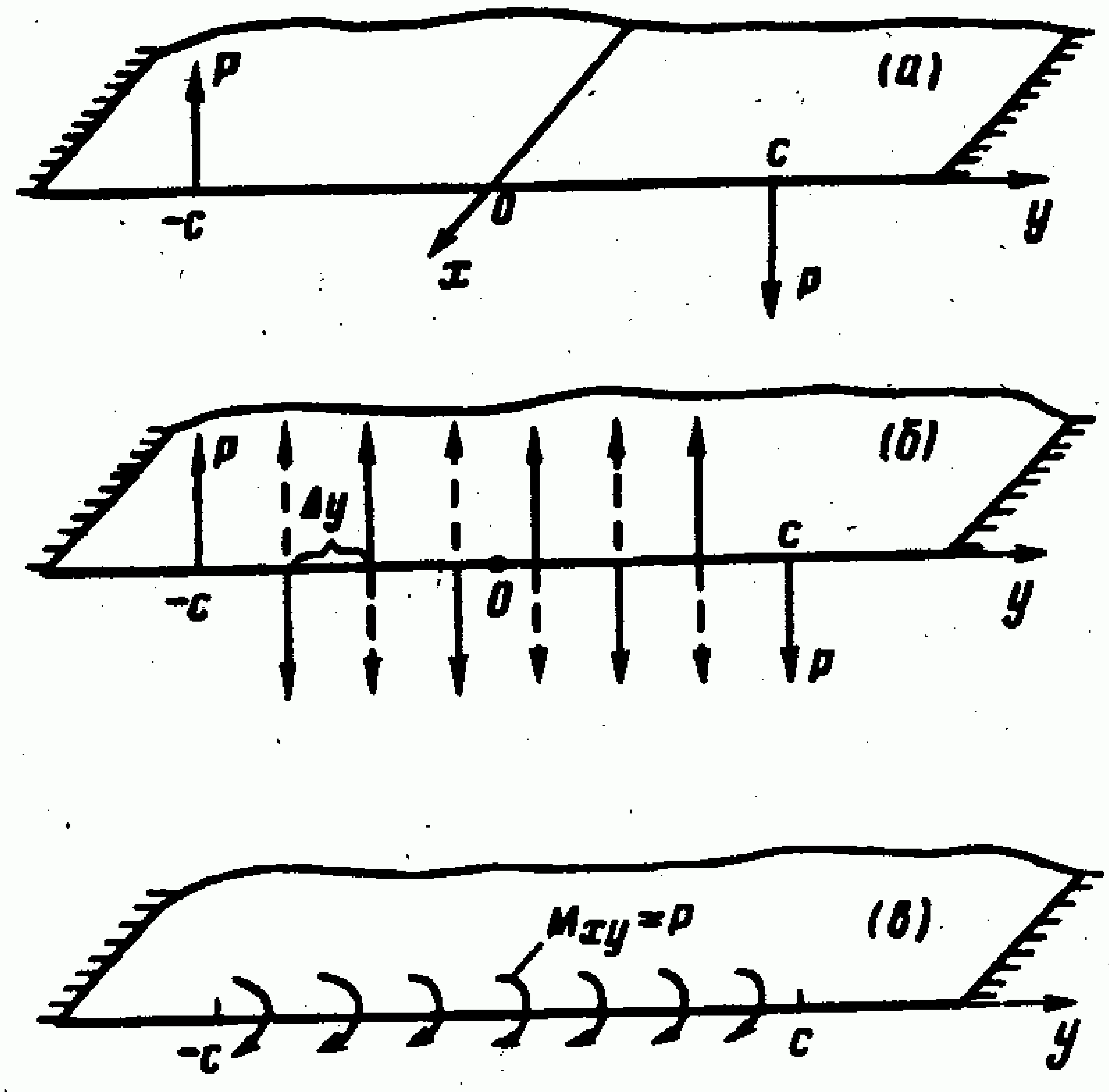
Цель нижеследующего состоит в том, чтобы показать, что все эти утверждения, строго говоря, неверны. Сами по себе условия (4.1), вытекающие из вариационного принципа, конечно, в некотором смысле правильны. Но вариационный принцип, давая формально верные результаты, далеко не всегда приводит к физически осмысленным результатам. Ошибка возможна, например, если в вариационный принцип заложены аппроксимации, не отражающие физическую реальность. Не случаен поэтому интерес к преобразованию Кельвина — Тэта.

Прежде всего следует сказать, что условия (4.1) достаточны для существования единственного решения задачи (2.1), (2.2), (4.1) тогда и только тогда, когда у контура нет угловых точек. Если же угловые точки имеются, то из того же вариационного принципа вытекает условие на разрывах:

$$\left[\nu \cdot \mathbf{M} \cdot \tau - \tau \cdot \mathbf{m}\right]_{\tau = \tau_k + 0} = \left[\nu \cdot \mathbf{M} \cdot \tau - \tau \cdot \mathbf{m}\right]_{\tau = \tau_k - 0} \tag{4.3}$$

где τ_k — дуговая координата угловой точки; $k = 1, 2, \ldots, s$; s — число угловых точек. Условия (4.3) должны были возникать у многих авторов, но их роль осталась неотмеченной. Ниже будет показана необходимость условий (4.3) для существования единственного решения задачи (2.1), (2.2), (4.1). Кроме того, условия (4.3) избавляют от необходимости в разговорах о сосредоточенных силах в угловых точках — их просто нет: ни фиктивных, ни действительных. При этом, разумеется, реакции опор должны вычисляться по перерезывающей силе $N_{(\nu)}$, а не по приведенной силе $N^{*}_{(\nu)}$.

Обратимся к обсуждению самой идеологии рассуждений Кельвина и Тэта. Для краткости ограничимся обсуждением простого примера. Рассмотрим прямоугольную пластину, занимающую область $0 \le x \le a$, $-b \le y \le b$. Допустим, что края $y = \pm b$ защемлены, а край $x = a$ свободен от нагружения. На краю $x = 0$ рассмотрим два случая нагружения



Фиг. 1

$$x = 0{:}\ M_x = 0,\ \ N_x = P[\delta(y + c) - \delta(y - c)],\ \ M_{xy} = 0 \tag{4.4}$$

где $\delta(y)$ — дельта-функция Дирака, $0 < c < b$.

$$x = 0{:}\ M_x = 0,\ \ N_x = 0,\ \ M_{xy} = P[\theta(y + c) - \theta(y - c)] \tag{4.5}$$

где $\theta(y)$ — характеристическая функция области $y > 0$. В случае (4.4) на краю $x = 0$ в точках $y = \pm c$ заданы сосредоточенные силы (фиг. 1, *а*). В случае (4.5) на краю $x = 0$ задан крутящий момент M_{xy} постоянной на интервале $[-c, c]$ интенсивности P — фиг. 1, *в*. Согласно ККТ-теории задачи (4.4) и (4.5) эквивалентны. Однако, согласно принципу Сен-Венана, различие между задачами (4.5) и (4.4) может иметь место в области с диаметром $2c \gg h$. Поэтому неясно, каким образом принцип Сен-Венана позволяет заключить, что переход от задачи (4.4) к задаче (4.5) сопровождается погрешностью, локализованной в узкой зоне порядка толщины h вблизи края пластины.

Покажем теперь, что преобразование Кельвина и Тэта в принципе неправомерно. Цепочка рассуждений Кельвина и Тэта изображена на рис. 1, где показан переход от задачи (4.4) к задаче (4.5): а) на край $x = 0$ действуют сосредоточенные силы; б) во внутренних точках, отстоящих друг от друга на расстоянии Δy, прикладываются пары противоположно-направленных сил P, причем считается, что они ничего не меняют; в) подсчитывается крутящий момент от двух соседних противоположных сил ($\Delta M^*_{xy} = P\Delta y$) и вычисляется их интенсивность $M_{xy} = \Delta M^*_{xy}/\Delta y = P$: получается, что на интервале $[-c, c]$ действует распределенный крутящий момент интенсивности P. Сделаем теперь еще один шаг. Устремим размер a к h. В результате получим балку — полоску, изображенную на фиг. 1 — (раньше это был край $x = 0$). Легко убедиться, что балочные решения для случаев а) и в) существенно различаются. А именно, прогибы у них оказываются одинаковыми, а распределения перерезывающих сил — разные. Иными словами, даже для балок схема рассуждений Кельвина и Тэта не удовлетворительна — она вообще неприменима для деформируемых сред. В частности, если обратиться к [14, с. 58], то элемент границы hdy не «поворачивается в своей плоскости, как жесткий диск», а деформируется. Предшествующее исследование сведено к балочной схеме. Однако следует иметь в виду, что между балками и пластинами имеется существенная разница. Именно, в теории балок при переходе от теории с учетом сдвига к гипотезе плоских сечений не происходит понижение порядка уравнений, т. е. в теории балок не теряется ни одного закона сохранения. В теории пластин при таком переходе баланс поперечных сил нарушается. Поэтому в теории пластин рассуждения Кельвина и Тэта еще более неправильны, чем в теории балок.

Теперь обратимся к обсуждению центрального вопроса: в чем же состоит истинный смысл условия Кирхгофа (4.1)? Если рассуждения Кельвина и Тэта неправильны, то, может быть, и условие (4.1) неправильно? Ответ таков: если отказаться от асимптотических допущений Кирхгофа, то условия (4.1) действительно неправильны и не позволяют найти правильное решение. Иллюстрация этого утверждения будет приведена ниже в п. 7. Если же речь вести только о главных членах асимптотических разложений установленного Кирхгофом асимптотического порядка (для напряжений — $O(h^{-2})$), а для прогиба — $O(h^{-3})$), то условие Кирхгофа (4.1) приводит к верному результату. Покажем этот факт.

Обратимся к уравнениям теории пластин типа Рейсснера (1.15). Примем, что порядок внешних нагрузок есть 0(1). Тогда главный член асимптотического разложения потенциала Φ имеет порядок $O(h^{-3})$, а порядок главного члена погранслойного потенциала F равен $O(h^{-1})$. Погранслойный потенциал затухает при удалении от границы по экспоненте, причем на расстоянии $2h$ он затухает в $\exp(-2\pi)$ раз, т. е. практически равен нулю. При дифференцировании вдоль границы F не меняет своего порядка, а при дифференцировании по нормали к границе приобретает большой множитель h^{-1}. Рассмотрим теперь плоский край пластины $x = 0$ (искривленный край в принципе ничего не меняет). Тогда, оставляя в (1.15) только главные члены, будем иметь

$$x = 0: M_x = D\Big[\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\Big],\ \ M_{xy} = (1-\nu)D\Big[\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial y} - \frac{6\Gamma}{h^2}F\Big]$$

$$N_x = Gh\Gamma\,\partial F/\partial y + D\partial\Delta\Phi/\partial x,\ \ (\partial^2F/\partial x^2 = 12\Gamma F/h^2) \tag{4.6}$$

Из этих формул видим, что погранслойный потенциал нельзя отбросить вблизи границы ни в крутящем моменте, ни в перерезывающей силе. Однако мы можем исключить F из второго и третьего соотношений (4.6). Для этого составим комбинацию Кирхгофа

$$N_x + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = D\Big[(1-\nu)\frac{\partial^3\Phi}{\partial x\,\partial y^2} + \frac{\partial\Delta\Phi}{\partial x}\Big] + \underline{\Big(Gh\Gamma - \frac{6(1-\nu)\Gamma D}{h^2}\Big)}\frac{\partial F}{\partial y} \tag{4.7}$$

Подчеркнутая скобка очевидно равняется нулю и мы получили, что комбинация Кирхгофа не зависит от погранслойного потенциала. Тем самым мы получили для проникающего потенциала отдельную задачу

$$D\Delta\Delta\Phi = p_1 - p_2$$

$$x = 0: D(\partial^2\Phi/\partial x^2 + \nu\partial v^2/\partial y^2) = \mathrm{m}\cdot\nu$$

$$D\Big(\frac{\partial\Delta\Phi}{\partial x} + (1-\nu)\frac{\partial^3\Phi}{\partial x\,\partial y^2}\Big) = q + \frac{dm_y}{dy}$$

Условия на других участках границы также должны выражаться только через Φ. Итак, успех условия Кирхгофа совершенно не связан с логикой рассуждений Кельвина и Тэта, а имеет другую — асимптотическую — природу. Важно подчеркнуть, что сказанное верно только тогда, когда Φ имеет порядок $O(h^{-3})$. В противном случае все отбрасывания незаконны и ошибка может быть какой угодно. Обратим также внимание на то, что при таком подходе правильно определяется прогиб, изгибающие моменты, но не крутящие моменты и перерезывающие силы, так как в последних вблизи границы поправки от погранслойного потенциала попадают в главные члены асимптотических разложений.

Итак, условия Кирхгофа можно обосновать только с помощью асимптотических рассуждений, совершенно чуждых аргументации Кельвина и Тэта. Можно быть уверенным, что другого способа обосновать условия Кирхгофа не существует

Если отказаться от асимптотических рассуждений, то переход от теории Пуассона к теории Кирхгофа — Кельвина — Тэта возможен тогда и только тогда, когда задача Пуассона разрешима.

5. Кручение прямоугольной пластины крутящими моментами постоянной интенсивности. Эта простая задача может служить хорошей моделью для иллюстрации особенностей и теории Пуассона, и теории Кирхгофа — Кельвина — Тэта. Чтобы исключить какие-бы то ни было сомнения, приведем ее решение в четырех постановках: трехмерной и по теориям Рейсснера, Пуассона и Кирхгофа — Кельвина — Тэта.

Рассмотрим упругий параллелепипед, занимающий область $-a \le x \le a$, $-b \le y \le b$, $-h/2 \le z \le h/2$. Объемные силы и напряжения на лицевых поверхностях $z = \pm h/2$ отсутствуют, а на боковых гранях заданы напряжения

$$
\begin{gathered}
x = \pm a: \tau_{xy} = 2\sigma z/h, \quad \sigma_x = \tau_{xz} = 0 \\
y = \pm b: \tau_{yx} = 2\sigma z/h, \quad \sigma_y = \tau_{yz} = 0
\end{gathered}
\tag{5.1}
$$

Решение трехмерной задачи дается формулами

$$
\begin{gathered}
Ghu = \sigma yz, \quad Ghv = \sigma xz, \quad Ghw = -\sigma xy \\
h\tau_{xy} = 2\sigma z, \quad \sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0
\end{gathered}
\tag{5.2}
$$

Решение этой же задачи по теории типа Рейсснера получается по (5.2) и (1.1) и прямой проверкой результата

$$
\begin{gathered}
W = -\Phi = -\sigma xy/Gh, \quad F = 0, \quad Gh\Psi_x = \sigma y, \quad Gh\Psi_y = \sigma x \\
6M_{xy} = 6M_{yx} = \sigma h^2, \quad N_x = N_y = 0, \quad M_x = M_y = 0
\end{gathered}
\tag{5.3}
$$

Обратимся к решению этой задачи по теории Пуассона. Ясно, что оно полностью совпадает с (5.3), т. к. погранслойный потенциал равен нулю. Но наша цель — показать необходимость всех трех условий Пуассона в данной задаче. Условия Пуассона (2.5) в данной задаче принимают вид

$$
\begin{gathered}
x = \pm a: M_{xy} = \sigma h^2/6, \quad M_x = 0, \quad N_x = 0 \\
y = \pm b: M_{yx} = \sigma h^2/6, \quad M_y = 0, \quad N_y = 0
\end{gathered}
\tag{5.4}
$$

Уравнение (2.7) и условие (2.8) дают нам задачу Неймана для функции σ, решение которой имеет вид $\sigma = A = \text{const}$. Уравнение (2.6) и условие (2.10) в данном случае принимают вид

$$
(1 + \nu)D\Delta W = -A \tag{5.5}
$$

$$
\begin{gathered}
x = \pm a: -(1 - \nu)D\partial^2 W/\partial x\, \partial y = \sigma h^2/6 \\
y = \pm b: -(1 - \nu)\partial^2 W/\partial x\, \partial y = \sigma h^2/6D
\end{gathered}
$$

Эти условия можно переписать в «проинтегрированном» виде

$$
\begin{gathered}
x = a: \frac{\partial W}{\partial x} = -\frac{\sigma h^2 y}{6(1 - \nu)D} + B_1; \quad x = -a: \frac{\partial W}{\partial x} = -\frac{\sigma h^2 y}{6(1 - \nu)D} + B_2 \\
y = b: \frac{\partial W}{\partial y} = -\frac{\sigma h^2 x}{6(1 - \nu)D} + B_3; \quad y = -b: \frac{\partial W}{\partial y} = -\frac{\sigma h^2 x}{6(1 - \nu)D} + B_4
\end{gathered}
\tag{5.6}
$$

где $B_1, \ldots, B_4$ — произвольные постоянные. Условия разрешимости задачи Неймана (5.5), (5.6) выражено в форме (2.12):

$$
-2abA = b(B_1 + B_2) + a(B_3 + B_4) \tag{5.7}
$$

Решение задачи (5.5), (5.6), (5,7) имеет вид

$$W = \frac{1}{2}P(x^2 - y^2) - \frac{\sigma h^2 xy}{6(1-\nu)D} \tag{5.8}$$

где P — произвольная постоянная. При получении (5.8) мы исключили жесткое смещение пластины. При этом произвольные постоянные A и B_i ($i = 1, 2, 3, 4$) получились следующими $A = 0$, $B_1 = -B_2 = Pa$, $B_3 = -B_4 = -Pb$. Выражение (5.8) есть однопараметрическое семейство решений. Но у нас пока еще не использовалось условие, что изгибающий момент на контуре равен нулю. Использование этого условия (2.9) дает нам $P = 0$. Задача Пуассона оказалась разрешимой и понадобились все три условия Пуассона. Разумеется, найденное решение совпало с (5.3).

Наконец, обратимся к решению этой задачи по теории Кирхгофа — Кельвина — Тэта, т. е. к решению краевой задачи

$$\Delta\Delta W = 0 \tag{5.9}$$

$$x = \pm a: \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = 0, \quad (1-\nu)\frac{\partial^3 W}{\partial x\,\partial y^2} + \frac{\partial \Delta W}{\partial x} = 0$$

$$y = \pm b: \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0, \quad (1-\nu)\frac{\partial^3 W}{\partial x^2\,\partial y} + \frac{\partial \Delta W}{\partial y} = 0 \tag{5.10}$$

Условия на разрывах (4.3) в данном случае сводится к выполнению во всех угловых точках равенства

$$\partial^2 W/\partial x\,\partial y = -\sigma h^2/[6(1-\nu)D] \tag{5.11}$$

Общих методов отыскания решений задачи (5.9) — (5.11) не существует. Поэтому ограничимся просто констатацией, что функция $W = Kxy, K = \mathrm{const}$ удовлетворяет как уравнению (5.9), так и условиям (5.10) при любом значении постоянной K. Поэтому без условия на разрывах единственного решения не существует. Подчеркнем, что рассуждения, вводящие силы в угловых точках здесь помочь не могут, т. к. эти рассуждения носят неконструктивный характер, т. е. они позволяют вычислить силу в угловой точке, но не позволяют использовать эту силу для каких-либо полезных целей. Условия на разрывах, напротив, позволяют вычислить постоянную K. В результате мы вновь приходим к (5.3). Конечно, никаких сил в углах не возникает.

6. Задача Лэмба о кручении прямоугольной пластины силами, приложенными в углах. Рассмотрим пластину, занимающую область $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$, нагруженную четырьмя поперечными силами величины $2Q$ каждая, приложенными в углах пластины. Причем силы, находящиеся на одной диагонали направлены вверх, а на другой — вниз. Глобально нагрузка, действующая на пластину, самоуравновешена.

Эта задача, видимо, впервые была рассмотрена Лэмбом (1890). На основании преобразования Кельвина — Тэта, рассмотренном в п. 4, можно заключить, что эта задача эквивалентна кручению пластины крутящими моментами интенсивности Q. Если далее согласиться с тем, что переход от условий Пуассона к условиям Кирхгофа сопровождается только локализованными вблизи края погрешностями, то, следовательно, прогибы пластины в обеих задачах должны совпадать. Мы видели, что на самом деле в теории Кирхгофа — Кельвина — Тэта, не связанной с асимптотическими представлениями, такое заключение ниоткуда не вытекает. Более того, примеры следующих пунктов покажут, что оно неверно. С другой стороны, асимптотическое рассмотрение показывает, что прогиб действительно (в главном члене) должен, как правило, определяться правильно. Здесь мы сталкиваемся с известным в науке феноменом, когда выдающиеся ученые могут выдвигать правильные утверждения с неверными их обоснованиями, но, как правило, эти утверждения носят более ограниченный характер, чем предполагали их авторы. Возвращаясь к задаче Лэмба, отметим, что она была включена в первое издание книги А. Лява [15, с. 200], но в последующих изданиях, например, в [7] А. Ляв ее исключил. В современном изложении задачу Лэмба можно найти в книге Ю. Н. Работнова [16]. Почему же Ляв исключил задачу Лэмба из рассмотрения? Вероятно, ему не понравилось следующее рассуждение, никем, видимо, до сих пор не отмеченное. Согласно теории Кирхгофа — Кельвина — Тэта решение задачи Лэмба совпадает с решением (5.3) задачи о кручении пластинами моментами. Но тогда перерезывающие силы во всей области пластины равны нулю. Рассмотрим теперь четверть пластины $0 \le x \le a/2, 0 \le y \le b/2$. Получили пластину, на которую действует только сила $2Q$, сосредоточенная в угле. Других поперечных сил на нее не действует. Баланс поперечных сил очевидным образом нарушен. Уже одно это обстоятельство показывает неправомерность рассуждений Кельвина и Тэта: ведь они обращаются с перерезывающими силами, как с величинами, которые в их теории имеют реальный физический смысл. В теории Кирхгофа [3] нарушение баланса поперечных сил не только допустимо, но и прямо заложено в его построениях. Однако, если рассуждать с инженерной точки зрения, то нарушение баланса поперечных сил является серьезным недостатком ККТ-теории. Этот недостаток углубляется тем, что он не описан в литературе.

Рассмотрим задачу Лэмба в несколько иной постановке, которая с физической точки зрения близка к таковой у Лэмба, но более корректна в математическом отношении.

Краевые условия зададим в виде

$$x = 0, a\colon\ M_x = 0,\ \ N_x = \frac{Q}{\varepsilon}\,\frac{e(y) - e(b-y)}{1 + e(b)},\ \ M_{xy} = -Q\,\frac{e(y) + e(b-y)}{1 + e(b)}$$

$$y = 0, b\colon\ M_y = 0,\ \ N_y = \frac{Q}{\varepsilon}\,\frac{e(x) - e(a-x)}{1 + e(a)},\ \ M_{xy} = -Q\,\frac{e(x) + e(a-x)}{1 + e(a)}$$

$$e(s) \equiv \exp(-s/\varepsilon),\ \ \varepsilon^2 = h^2/12\Gamma \tag{6.1}$$

Из этих условий видим, что на края пластины действуют поперечные силы, локализованные вблизи углов, но распределенные непрерывно. Если вычислить полную силу, действующую на угол пластины, то получим, что на каждый угол действует сила $2Q$. При отступлении от вершины угла вдоль края на расстояние $2h$ перерезывающая сила практически равна нулю. Кроме того, на края пластины действуют крутящие моменты, но интеграл от них вдоль края, т. е. суммарный момент, пренебрежимо мал. Таким образом, задача (6.1) является очень хорошим приближением к задаче Лэмба. Достоинство этой задачи в том, что она допускает элементарное точное решение по теории типа Рейсснера. Оно имеет вид

$$\Phi = \frac{6Q}{Gh^3}\,xy,\ \ F = \frac{12\varepsilon^2 Q}{Gh^3}\left[\frac{e(x) + e(a-x)}{1 + e(a)} - \frac{e(y) + e(b-y)}{1 + e(b)}\right] \tag{6.2}$$

Вычисляя крутящие моменты в соответствии с (1.15) и (6.2), получаем выражение

$$M_{xy} = Q\left[1 - \frac{e(x) + e(a-x)}{1 + e(a)} - \frac{e(y) + e(b-y)}{1 + e(b)}\right] \tag{6.3}$$

Сравнивая выражения (6.2), (6.3), с (5.3), видим, что существенные расхождения решений рассматриваемых задач имеют место только в узкой зоне вблизи края, как это и утверждали Кельвин и Тэт. Чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть задачу (6.1) по ККТ-теории. В этом случае нужно построить бигармоническую функцию в прямоугольнике, удовлетворяющую условиям

$$x = 0, a\colon\ \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \nu\,\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = 0,\ \ (1-\nu)\,\frac{\partial^3\Phi}{\partial x\,\partial y^2} + \frac{\partial\Delta\Phi}{\partial x} = \frac{2N_x}{D}$$

$$y = 0, b\colon \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} = 0, \quad (1-\nu)\frac{\partial^3\Phi}{\partial x^2\,\partial y} + \frac{\partial\Delta\Phi}{\partial y} = \frac{2N_y}{D} \tag{6.4}$$

где N_x и N_y на краю даются выражениями (6.1). Кроме того, нужно потребовать, чтобы в угловых точках выполнялись условия

$$(1-\nu)D\partial^2\Phi/\partial x\,\partial y = -Q \tag{6.5}$$

Обратим внимание, что проникающий потенциал Φ из (6.2) не может являться решением задачи (6.4) и (6.5). Объясняется это тем, что в данной задаче переход к условию Кирхгофа сопровождается существенной погрешностью. Например, на крае $x = 0$ точнее условие для Φ, после исключения потенциала F из (1.15), имеет вид

$$x = 0\colon N_x + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - \underline{\frac{h^2}{6\Gamma}\frac{\partial^2 N_x}{\partial y^2}} = (1-\nu)D\frac{\partial^3\Phi}{\partial x\,\partial y^2} + D\left(1 - \underline{\frac{h^2}{6\Gamma}\frac{\partial^2}{\partial y^2}}\right)\frac{\partial\Delta\Phi}{\partial x} \tag{6.6}$$

Условие Кирхгофа получается из (6.6) отбрасыванием подчеркнутых членов, что допустимо, когда функции медленноменяющиеся. В данной задаче это не так. Например, если в левую часть (6.6) подставить значения N_x и M_{xy} из (6.1), то получим точный нуль. Условие (6.6) станет однородным и функция Φ из (6.2) будет удовлетворять ему тождественно. Если теперь обратиться к задаче (6.4), (6.5), то сразу увидим, что ее решение существенно отличается от функции $\Phi(x, y)$ из (6.2). Строгое исследование задачи (6.4), (6.5) затруднительно. Однако можно установить характер этого решения на основе правдоподобных рассуждений. Решение задачи (6.4) и (6.5) представим в виде

$$\Phi(x, y) = (6Qxy)/Gh^3 + \varphi(x, y) \tag{6.7}$$

Тогда для функции $\varphi(x, y)$ вновь получим задачу (6.4), (6.5), но в правой части (6.5) вместо Q будет стоять $2Q$. Примем теперь интуитивно очевидное допущение, что функция $\varphi(x, y)$ не содержит медленно меняющихся составляющих. Можно привести много обоснований для этого допущения, но, к сожалению, все они носят косвенный характер. Из условий (6.4), записанных для $\varphi(x, y)$, вытекает, что функция $\varphi(x, y)$ является быстроменяющейся функцией обеих переменных. Более того, поскольку является бигармонической, то показатели изменяемости $\varphi(x, y)$ по обеим переменным одинаковы и равны 1. Это означает, что при дифференцировании $\varphi(x, y)$ по обеим переменным появляется большой множитель h^{-1}. В этом случае из (6.4) и (6.5) следует, что функция $\varphi(x, y)$ имеет асимптотический порядок $O(h^{-1})$. Поэтому $\varphi(x, y)$ в (6.7) может быть отброшена. Однако при вычислении вторых и, тем более, третьих производных от $\Phi(x, y)$, функцию $\varphi(x, y)$ игнорировать нельзя.

Очевидны следующие выводы. Первый: ККТ-теория в данной задаче позволяет правильно вычислять асимптотически главную часть прогиба во всей области и асимптотически главную часть всех характеристик при отступлении от границ на расстояние порядка $2h$.

Замечание: в прикладном отношении этот результат малоутешителен, ибо прогибы, найденные по ККТ-теории, практически для инженера неинтересны, а разрушение пластины вблизи границы столь же опасно, как и во внутренних точках области.

Второй вывод: решение данной задачи по теории типа Рейсснера во всех отношениях намного проще, чем по ККТ-теории. Поэтому простота ККТ-теории — а это главный аргумент в ее пользу — является кажущейся и пропадает при внимательном рассмотрении. Теория Пуассона в данном случае приводит к неразрешимой задаче и сразу отправляет нас к теории типа Рейсснера, что является ее достоинством, а не недостатком.

7. Шарнирно-опертая полуполоса. Рассмотрим теперь пример, показываю-

щий, что утверждения Кельвина и Тэта, касающиеся перехода к условию Кирхгофа, являются неверными.

Рассмотрим пластину, занимающую область $x \geq 0, 0 \leq y \leq b$. По краям $y = 0$, b примем условия шарнирного опирания

$$y = 0, b\colon \Phi = 0,\ \partial^2\Phi/\partial y^2 = 0,\ \partial F/\partial y = 0 \tag{7.1}$$

На краю $x = 0$ поставим условия

$$x = 0\colon M_x = 0,\ N_x = Q\sin\lambda y,\ M_{xy} = H\cos\lambda y,\ \lambda = \pi/b \tag{7.2}$$

Кроме того, примем, что Q и H связаны условием

$$Q = \lambda H + \lambda h P. \tag{7.3}$$

Здесь Q и H имеют асимптотические порядки $O(1)$, как это и предполагалось во всех предыдущих рассмотрениях. Поверхностные нагрузки на пластину не действуют.

Решение задачи (7.1), (7.2) по ККТ-теории имеет вид

$$\Phi = \frac{6(1-\nu)P}{(3+\nu)\lambda^2h^2G}\left[\frac{2}{1-\nu} + \lambda x\right]\exp(-\lambda x)\sin\lambda y \tag{7.4}$$

С точки зрения теории Кирхгофа данный результат следует понимать так, что $\Phi(x, y) = 0$, т. е. равен нулю член порядка $O(h^{-3})$. На нахождение членов другого асимптотического порядка, даже если они являются главными, Кирхгоф не претендовал. В ККТ-теории ситуация совершенно иная; в ней асимптотические рассуждения полностью устранены и заменены некими псевдофизическими аргументами. С точки зрения ККТ-теории выражение (7.4) являет собой «нормальный» результат, которым можно пользоваться, причем утверждается, что он верен всюду, кроме узкой зоны вблизи границы. Убедимся, что это не так. Решение задачи (7.1) и (7.2) будем искать по теории типа Рейсснера в виде

$$\begin{gathered}\Phi(x, y) = (A + \lambda x B)\exp(-\lambda x)\sin\lambda y \\ F(x, y) = C\exp(-\mu x)\cos\lambda y,\quad \mu = \sqrt{\lambda^2 + 12\Gamma/h^2}\end{gathered} \tag{7.5}$$

Постоянные A, B, C, находятся из условий (7.2) и имеют довольно громоздкий вид. Поэтому приведем для них асимптотические формулы, считая, что $\lambda h \ll 1$:

$$\begin{gathered}A = \frac{12P\,[1 + O(\lambda h)]}{(3+\nu)\ \lambda^2h^2G} + \frac{1+\nu}{3+\nu}\frac{\sqrt{12\Gamma}\,Q[1 + O(\lambda h)]}{\lambda^2h^2G\Gamma} \\ B = \frac{6(1-\nu)P[1 + O(\lambda h)]}{(3+\nu)\lambda^2h^2G} - \frac{1-\nu}{3+\nu}\frac{\sqrt{12\Gamma}\,Q[1 + O(\lambda h)]}{\lambda^2h^2G\Gamma} \\ C = \frac{2P[1 + O(\lambda h)]}{(3+\nu)G\Gamma} - \frac{Q[1 + O(\lambda h)]}{\lambda hG\Gamma}\end{gathered} \tag{7.6}$$

В этих формулах параметры P и Q являются независимыми. Сравнение решений (7.4) и (7.5) — (7.6) показывает, что они существенно различаются и притом во всей области, а не только в узкой зоне вблизи края. Поэтому (7.4) нельзя рассматривать как какое-либо приближение к (7.5) — (7.6). Конечно, в данной задаче было принято весьма искусственное условие (7.3), но в теории Кирхгофа — Кельвина — Тэта нет никаких ограничений, запрещающих это условие. Обратим также внимание на то, что при небольшом отступлении от края $x = 0$, гипотезы Кирхгофа выполняются практически точно. Тем не менее, ККТ-теория оказывается неприменимой даже для определения прогиба. Отсюда видна неприемлемость отождествления понятий точности гипотез Кирхгофа и точности теории пластин. Строго говоря, эти понятия вообще не связаны между собой.

Из изложенного вытекают следующие утверждения. Первое: легенда об ошибке

Пуассона не находит подтверждения и является исторической несправедливостью, которая должна быть исправлена в литературе по теории пластин и оболочек. Второе: несмотря на кажущуюся привлекательность и наглядность, преобразование Кельвина — Тэта является ошибочным и потому не может применяться в учебных курсах. Третье: фактически теория Кирхгофа при правильном изложении намного сложнее и менее надежна, нежели теория типа Рейсснера. Поэтому в учебных курсах и в инженерных расчетах целесообразно рекомендовать для использования теорию типа Рейсснера. Теорию же Кирхгофа целесообразно получать как асимптотическое следствие из теории типа Рейсснера. Следует, однако, отметить, что непосредственное использование теории типа Рейсснера в численных расчетах на ЭВМ малопригодно и необходимо в явном виде учитывать специфику погранслойной части решения, что можно делать многими способами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Poisson S.* Sur l'equilibre et le mouvement des corps elastiques//Mem. l'Acad Sci. Paris. 1829. 8. P. 357—570; 623—627.
2. *Kirchhoff G.* Uber das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe//J. reine und angew. Math. 1850. Bd. 40. I. S. 51—88.
3. *Кирхгоф Г.* Механика (Лекции по математической физике). М.: Изд-во АН СССР, 1962. 402 с.
4. *Доннел Л. Г.* Балки, пластины и оболочки. М.: Наука, 1982. 567 с.
5. *Пановко Я. Г.* Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1985. 287 с.
6. *Thomson W., Tait P. G.* Theatise on Natural Philosophy P. 11. Cambridge: Univ. Press. 1890. 527 p.
7. *Ляв А.* Математическая теория упругости. М.; Л.: ОНТИ, Гостехиздат, 1935. 674 с.
8. *Reissner E.* Reflections on the theory of elastic plates//Appl. Mech. Rev. 1985. V. 38. No. 11. P. 1453—1464.
9. *Жилин П. А.* Основные уравнения неклассической теории оболочек//Тр. Ленинград. политехн. ин-та. 1982. № 386. С. 29—46.
10. *Жилин П. А., Ильичева Т. П.* Анализ применимости теории типа Тимошенко при сосредоточенном воздействии на пластинку//ПМТФ. 1984. № 1. С. 150—156.
11. *Жилин П. А., Скворцов В. Р.* Описание простого краевого эффекта теорией оболочек и пространственной теорией упругости//Изв. АН СССР. МТТ. 1983. № 5. С. 137—147.
12. Вибрации в технике. Т. I. М.: Машиностроение. 1978. 352 с.
13. *Гольденвейзер А. Л.* Теория тонких упругих оболочек. М.: Наука, 1976. 512 с.
14. *Бидерман В. Л.* Механика тонкостенных конструкций. М.: Машиностроение, 1977. 488 с.
15. *Love A. E.* A treatise on the mathematical theory of elasticity. V. 2. Cambridge Univ. press. 1893. 327 p.
16. *Работнов Ю. Н.* Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1979. 744 с.

Санкт-Петербург

Поступила в редакцию
21.X.1991