МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 1995

УДК 539.3

© 1995 г. П. А. ЖИЛИН

О КЛАССИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ПЛАСТИН И ПРЕОБРАЗОВАНИИ КЕЛЬВИНА — ТЭТА

Благодарю редколлегию МТТ за предоставленную возможность дать ответ на критику в мой адрес, содержащуюся в статье В. М. Даревского [1], а также в других дошедших до меня сообщениях. Конечно, хотелось бы дать ответ на все замечания, но из-за опасения усложнить дискуссию второстепенными деталями в публикуемой заметке ограничимся обсуждением двух пунктов разногласий, неразрывно связанных между собой и имеющих принципиальное значение.

1. Теория Кирхгофа и классическая теория пластин. В статье [2], вызвавшей неоднозначную реакцию, обсуждаются три различные версии теории пластин: теория Пуассона, теория Кирхгофа и теория Кирхгофа — Кельвина — Тэта, именно последняя в литературе называется классической теорией пластин. Чтобы отчетливее выявить существо разногласий, ниже теории Кирхгофа будут приписаны некоторые свойства, органически ей присущие, но не отмеченные самим Кирхгофом. Итак, теорией Кирхгофа ниже будет называться теория, описывающаяся уравнениями (2.1)—(2.2) [1], краевыми условиями Кирхгофа (4.1) и условиями на разрывах (4.3). Важно, что в теории Кирхгофа условия (4.1) трактуются в асимптотическом смысле, как это безусловно вытекает из рассуждений самого Кирхгофа и описано в [2]. Классическая теория пластин описывается теми же уравнениями, что и теория Кирхгофа. Естественное ее отличие от теории Кирхгофа состоит в том, что краевые условия Кирхгофа трактуются не в асимптотическом смысле, а в смысле преобразований Кельвина — Тэта, которое «сделало невозможным какие-либо сомнения по поводу (классической) теории» пластин (А. Ляв). Видимо, недостатки изложения в [2] не позволили довести до читателя важность этого обстоятельства. Казалось бы какая разница, как трактовать (интерпретировать) те или иные условия? Однако различие, и весьма существенное, имеется. Оно заключается в пределах применимости теории пластин. Преобразование Кельвина — Тэта, если оно справедливо, резко расширяет область применимости классической теории пластин. Чтобы подчеркнуть это различие, полезно сопоставить пределы применимости теории Кирхгофа, как они описаны в [2], и пределы применимости классической теории. В отношении теории Кирхгофа в [2] высказаны следующие три утверждения.

Т*1*. При силовых граничных условиях теория Кирхгофа позволяет правильно вычислять нормальные прогибы и изгибающие моменты во всей области пластины при условии, что их асимптотические порядки имеют вид

$$w \sim O(h^{-3}),\quad M_x \sim O(1),\quad M_y \sim O(1),\quad (\sigma_x, \sigma_y \sim O(h^{-2})) \tag{1.1}$$

Т2. Если условия разрешимости задачи Пуассона не выполнены, но условия (1.1) справедливы, то теория Кирхгофа позволяет правильно вычислять

[1] Здесь и ниже ссылки на формулы берутся из [2].

перерезывающие условия и крутящие моменты во внутренних точках пластины, отстоящих от границы на расстояниях, превышающих удвоенную толщину.

Т*3*. Если условия (1.1) не выполнены, то решение по теории Кирхгофа сколь угодно сильно отличается от решения по теории типа Рейсснера во всей области пластины.

Из рассуждений самого Кирхгофа фактически вытекает только первое из этих утверждений. Перерезывающие силы Кирхгоф исключает из рассмотрения на основании их асимптотической малости. По поводу крутящих моментов Кирхгоф, строго говоря, думал, что они вычисляются правильно во всей области. Это объясняется тем, что Кирхгоф вводил явное допущение о медленной изменяемости по продольным координатам всех рассматриваемых функций. Фактически это допущение эквивалентно предположению о разрешимости задачи Пуассона. Поэтому, конечно, у Кирхгофа не было той теории пластин, которая выше была названа теорией Кирхгофа. Отметим дополнительно, что условия (1.1) исключают возможность появления в указанных величинах быстроменяющихся в асимптотическом смысле функций. Утверждения Т*1*—Т*3* отвечают на вопрос, в какой мере справедлива теория пластин Кирхгофа. По моему мнению, ограничения этой теории таковы, что не позволяют рекомендовать ее для прикладных расчетов, в которых определяющую роль играют надежность получаемых результатов и однозначность и ясность в их интерпретации. Отсюда и вызвавший много нареканий вывод в [2] о том, что «теория Кирхгофа не могла бы претендовать на роль ведущей прикладной теории».

А теперь посмотрим, как устанавливает пределы применимости теории пластин общепринятая (классическая) трактовка. Приведем ее в формулировке В. В. Новожилова [3, с. 62], как наиболее близкой к формулировке Кельвина и Тэта [4, п. 648, с. 192] и формулировкам в современных учебниках.

Т*К*. Заменив крутящие моменты статически эквивалентными усилиями, мы тем самым допускаем некоторое перераспределение напряжений по толщине оболочки вдоль ее края, не изменяя при этом ни главного вектора, ни главного момента напряжений. Согласно принципу Сен — Венана влияние этого обстоятельства не может быть существенным и должно сказываться только в непосредственной близости от края (на расстоянии порядка толщины).

Как видим, утверждения Т*1*—Т*3*, с одной стороны, и утверждения Т*К*, с другой стороны, расходятся самым существенным образом. Прежде всего, в Т*1*—Т*3* говорится об интегральных характеристиках, смысл которых указан в [2]. В утверждении Т*К* говорится, что интегральные характеристики находятся правильно, а ошибка возникает только в распределении напряжений по толщине. О важности асимптотического порядка искомых величин в Т*К* или в каком-либо другом месте в известной мне литературе вообще не упоминается. Если утверждение Т*К* было бы правильным то, по крайней мере для меня, никаких сомнений в претензиях классической теории на роль прикладной теории не возникало бы. В самом деле, с неточным знанием характера распределений напряжений по толщине тонкой пластины легко примирится любой инженер, но ошибка в определении статических факторов и вообще интегральных характеристик чревата самыми неприятными и даже трагическими последствиями, независимо от того, вблизи или вдали от границы эта ошибка допущена. Заметим, что, например, теория оболочек, представленная в [5], гарантирует правильное вычисление интегральных характеристик во всех случаях, независимо от характера внешних нагрузок и других обстоятельств. Вернемся, впрочем, к обсуждаемому вопросу. По существу, расхождение между Т*1*—Т*3* и Т*К* является главной темой дискуссии. Остальные обстоятельства дискуссии носят более или менее субъективный характер и не столь важны в научном отношении.

Целью статьи В. М. Даревского [1] является «смягчить критику в [2] статических граничных условий Кирхгофа — Кельвина — Тэта». Насколько я понимаю, В. М. Даревский берется оправдать преобразование Кельвина — Тэта и тем самым расширить сферу действия ККТ-условий. Ибо в [2] нет ни слова критики в адрес условия Кирхгофа, а устанавливается лишь ограниченность этого условия асимптотическими требованиями, отсутствующими в рассуждениях Кельвина — Тэта и традиционных вариационных формулировках за исключением формулировки самого Кирхгофа. Кто же прав? В [2] я рассуждаю достаточно банально. Если Т1—Т3 правильны, то, следовательно, в задачах, в которых нормальный прогиб будет иметь порядок $0(h^{-2})$ при внешних нагрузках порядка $0(1)$, решение по теории Кирхгофа окажется неверным во всей области пластины, а не только вблизи края. Если же правильно утверждение ТК, то и в этих задачах все интегральные характеристики будут найдены правильно. В [2, п. 7] представлена задача такого рода, решение которой не дает, как мне кажется, возможностей для каких-либо полетов фантазии. Хочу только предостеречь читателя: в формулах (7.4) и (7.5) экспонента $\exp(-\lambda x)$ не должна восприниматься как затухающее решение типа погранслоя, это проникающее решение. Легко предложить модификацию этой задачи (достаточно взять пластину ограниченных размеров), в которой проникающее решение не затухало бы при удалении от края. Затухающие решения типа погранслоя описываются экспонентой $\exp(-\mu x)$, где $\mu \to \infty$ при $h \to 0$, входящей в погранслойный потенциал. Построенное в п. 7 решение полностью соответствует Т1—Т3, но решительно противоречит ТК. Мне непонятно, почему В. М. Даревский игнорирует этот пример, ибо примеров такого рода можно привести сколько угодно. Вместо этого В. М. Даревский фактически настаивает на справедливости преобразования Кельвина — Тэта.

2. О преобразовании Кельвина — Тэта. Прежде всего, необходимо указать, что преобразование Кельвина — Тэта, вопреки устоявшемуся мнению, не относится к классу статически эквивалентных преобразований. В самом деле, рассмотрим прямолинейную (для простоты) часть контура пластины на интервале $[s, s+l]$, где l — произвольно выбираемый отрезок $0 \le l \le L$, L – полная длина плоской части, s — отсчитывается от начала прямолинейной части, $s + l \le L$. Считаем, что на этой части границы действует перерезывающая сила $N_{(\nu)} = q$ и крутящий момент $M_{\nu\tau} = m$. На рассматриваемом интервале эта система нагрузок создает главный вектор сил Q и главный вектор моментов M, вычисляемые по формулам

$$Q = \int_s^{s+l} q(\tau)\, d\tau, \quad M = \int_s^{s+l} [(\tau - s)\, q(\tau) - m(\tau)]\, d\tau \tag{2.1}$$

В рассуждениях Кельвина и Тэта сила $N_{(\nu)}$ и момент $M_{\nu\tau}$ заменяются приведенной перерезывающей силой $q + m'(s)$ и считается, что момент m этим как бы аннулирован. Для приведенной поперечной силы также можно вычислить главный вектор сил Q_* и главный вектор моментов M_*:

$$Q_* = \int_s^{s+l} q(\tau)\, d\tau + m(s+l) - m(s) \tag{2.2}$$

$$M_* = \int_s^{s+l} [(\tau - s)\, q(\tau) - m(\tau)]\, d\tau + lm(s+l)$$

По определению, две системы нагрузок называются статически эквивалентными на интервале $[s, s+l]$, если у них совпадают главные векторы сил и моментов. В данном случае две рассматриваемые системы нагрузок статически эквивалентны, если верны равенства $Q = Q_*$ и $M = M_*$. Из сравнения (2.1) и (2.2) видно, что это не так, т. е. преобразование Кельвина — Тэта не относится к классу статически эквивалентных. В таком случае переход от системы нагрузок $\{q, m\}$ к системе $\{q + m', 0\}$ вообще не оправдан. Отсюда вытекает, что принцип Сен-Венана ни к преобразованию Кельвина — Тэта, ни к его оправданиям никакого отношения не имеет. Для уяснения некоторых особенностей преобразования Кельвина — Тэта можно рассмотреть простой пример, который в своих главных чертах вполне адекватно отражает рассуждения Кельвина — Тэта и вытекающие из них следствия.

Рассмотрим тонкую пластину в виде полосы $-a \le x \le a$, $-\infty \le y \le \infty$. Будем считать, что от координаты y ничего не зависит. Пусть на пластину действует нормальное давление p и поверхностный момент L. Последнее означает, что на лицевые стороны полосы действуют не только нормальное давление, но и касательные напряжения. Следует обратить внимание, что в этом случае уравнения (1.3) и (1.4) должны быть немного дополнены [5]. Выпишем уравнения равновесия полосы с учетом сказанного и условия $M_{xy} = 0$:

$$dN_x/dx + p = 0, \quad dM_x/dx - N_x + L = 0 \tag{2.3}$$

Проведем теперь рассуждения, в точности повторяющие рассуждения Кельвина — Тэта. В результате получим, что действие момента L «эквивалентно» действию поперечной нагрузки интенсивностью dL/dx. Теперь согласно Кельвину — Тэту можно во втором уравнении из (2.3) отбросить L, а в первом уравнении вместо p должны рассматривать приведенную поверхностную нагрузку $p_* = p + dL/dx$. В результате от (2.3) приходим к системе

$$dN_x/dx + p_* = 0, \quad dM_x/dx - N_x = 0 \tag{2.4}$$

где символ величин M_x и N_x, согласно Кельвину и Тэту, тот же самый, что и в системе (2.3). Однако если не использовать правдоподобных рассуждений, а действовать просто, то система (2.3) эквивалентна следующей

$$dN_x^*/dx + p_* = 0, \quad dM_x^*/dx - N_x^* = 0 \tag{2.5}$$

$$N_x^* \equiv N_x - L, \quad p_* = p + dL/dx \tag{2.6}$$

Сравнивая (2.5) и (2.4), обнаруживаем, что в (2.4) должна входить не перерезывающая сила N_x, а величина N_x^*, являющаяся комбинацией N_x и L, причем N_x^* нельзя трактовать как перерезывающую силу. В рассуждениях Кельвина — Тэта этот факт совершенно игнорируется и N_x в (2.4) рассматривается как перерезывающая сила. Посмотрим на вытекающие из этого следствия. Примем, что пластина шарнирно оперта по сторонам $x = \pm a : M_x = 0$. Кроме того, примем, что приведенная нагрузка $p_* = 0$, т. е. $p = -dL/dx$. Тогда после интегрирования (2.5) получаем

$$M_x = 0, \quad N_x^* = 0 \Rightarrow N_x = L \ne 0$$

Перерезывающая сила N_x оказалась отличной от нуля, что вполне естественно, ибо на пластину действует поперечная нагрузка. Если же верить в правильность рассуждений Кельвина и Тэта, то из (2.4) получаем, что $N_x = 0$, т. е. перерезывающая сила отсутствует. Подобные «парадоксы» не страшны для опытного инженера, ибо он ни в коем случае и не смотря ни на какие выводы теории не забыл бы рассчитать пластину на срез, если на нее действует поперечная нагрузка. Но представим себе, что все эти вычисления делает не опытный инженер, а компьютер, и не в столь простой ситуации, а в сложном вычислительном комплексе, где рассматриваемая задача входила бы незначительным промежуточным этапом. Нетрудно вообразить себе все последствия подобного подхода. Динамика развития современной науки и расчетной практики такова, что ориентироваться приходится не на опытных инженеров-расчетчиков, а на специалистов по прикладной математике, прекрасно владеющих вычислительными методами, но отнюдь не искушенных в тонкостях теории оболочек. Вот почему необходимо предъявлять весьма суровые требования к прикладной теории. О том, что использовать неправильные рассуждения в учебных курсах недопустимо, я уже и не говорю.

3. О задаче Лемба. Трудно понять, почему В. М. Даревский решил, что к задаче Лемба я пришел на основании преобразования Кельвина — Тэта от задачи о чистом кручении пластины моментами. На самом деле я имею в виду именно задачу Лемба и вижу ее следующим образом. К потолку на двух нитях, присоединенных к концам одной диагонали, горизонтально подвешена невесомая пластина. К концам другой диагонали этой пластины с помощью нитей подвешены два одинаковых груза весом $2Q$ каждый. Нужно определить деформированное состояние, а также усилия и моменты в пластине. Это и есть задача Лемба и преобразование Кельвина — Тэта здесь ни при чем. Характер перемещений в этой задаче легко увидеть мысленным взором, и он полностью соответствует возможностям теории Кирхгофа. Поэтому я нисколько не сомневался в том, что теория Кирхгофа даст мне верный ответ в этой задаче в смысле утверждений Т*1*—Т*3*. Детально эта задача в [2] не рассматривалась, а просто указывалось, что баланс поперечных сил в этой задаче нарушается. Приведем полное решение классической задачи Лемба. Для этого необходимо в условия на разрывах (4.3) включить сосредоточенные силы. Подчеркнем, что здесь речь идет о реально приложенных силах, а не об их фантомах, связанных с преобразованием Кельвина — Тэта и обсуждавшихся в [2]. Итак, с учетом сосредоточенных сил P_k, приложенных в k-ой угловой точке, условия на разрывах записываются следующим образом

$$[\nu M\tau - \tau m]_{\tau=\tau_k+0} - [\nu M\tau - \tau m]_{\tau=\tau_k-0} = nP_k|_{\tau=\tau_k} \tag{3.1}$$

Пусть пластина занимает область $-a \le x \le a$, $-b \le y \le b$. Нумерацию угловых точек будем вести так, что углу $x = a$, $y = b$ присвоим номер 1. Пусть к этому углу присоединена нить, идущая к потолку. Тогда $P_1 = 2Qn$, $Q > 0$. В этой задаче внешних моментов нет, т. е. $m = 0$. Условие (3.1) принимает вид

$$2M_{xy} = 2Q \tag{3.2}$$

Проникающий потенциал Φ имеет вид $\Phi = Kxy$, где K – произвольная постоянная, определяемая по (3.2). Нетрудно убедиться, что в остальных угловых точках условия (3.1) выполняются автоматически. По (1.15) из [2] крутящий момент равен $M_{xy} = (1 - \nu) DK$, а (3.2) дает для K формулу $K = 6Q/(Gh^3)$. Согласно (2.2) [2] в этой задаче имеем $N = D\Delta\nabla\Phi = 0$. Отсюда и следует нарушение баланса поперечных сил, указанное в [2]. Удивляться этому не приходится, ибо согласно Т*1*—Т*3* перерезывающие силы определяются по теории Кирхгофа только на небольшом удалении от границы. Точно также не приходится удивляться и тому, что крутящие моменты, полученные на основе теории Кирхгофа, не удовлетворяют краевым условиям, ибо они находятся правильно только на расстояниях, превышающих удвоенную толщину.

Иллюстрацией сказанного в п. 1 является задача, предложенная в [6], о кручении прямоугольной пластины, две противоположные стороны которой нагружены крутящими моментами постоянной интенсивности m, а две другие стороны свободны от напряжений. Это достаточно трудная задача даже для трехмерной теории упругости, ибо в угловых точках нарушается закон парности касательных напряжений. Тем более интересно посмотреть как справится с этой задачей теория пластин.

По теории Кирхгофа эта задача решается точно в элементарном виде. Пусть пластина занимает область $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$, а краевые условия имеют вид

$$M_x = 0,\quad M_{xy} = m,\quad N_x = 0\ \ (x = 0, a);\quad M_x = M_{xy} = 0,\quad N_x = 0\ \ (y = 0, b) \tag{3.3}$$

Краевые условия Кирхгофа (4.1) [2], отвечающие этим условиям, будут однородны. Поэтому проникающий потенциал Ф будет иметь вид Kxy, где K — постоянная. Она находится из условий на разрывах (3.1), где $P_k = 0$. В результате получаем решение

$$\Phi = \frac{3m}{Gh^3} xy, \quad M_{xy} = M_{yx} = \frac{m}{2}, \quad M_x = M_y = 0, \quad N_x = N_y = 0 \tag{3.4}$$

Согласно Т*1*—Т*3* здесь Ф, M_x и M_y найдены верно во всей области пластины, а крутящие моменты и поперечные силы найдены верно только на удалении от границы. Краевые условия (3.3), разумеется, не выполняются. Покажем, что решение (3.4) является правильным в смысле утверждений Т*1*—Т*3*.

Пусть Ф и F означают точное решение задачи (3.3) по теории типа Рейсснера. Отметим, что вопрос о существовании этого точного решения в литературе не разрешен ни в теории пластин, ни в трехмерной теории упругости. Что касается последней, то мне приходилось решать частные задачи в трехмерной теории, когда в угловых точках нарушался закон парности касательных напряжений. Там все оказывалось в порядке, решение существовало, хотя устроено было довольно сложно. Поэтому интуитивно есть уверенность, что и в теории пластин в этом смысле ничего страшного нет, хотя согласно (3.3) в угловых точках $M_{xy} \neq M_{yx}$. Итак, через Ф и F обозначим точное решение задачи (3.3). Рассмотрим потенциалы

$$\Phi_* = \frac{3m}{Gh^3} xy, \quad F_* = -\frac{6\varepsilon^2 m}{Gh^3}\left[\frac{e(x) + e(a-x)}{1 + e(a)} + \frac{e(y) + e(b-y)}{1 + e(b)}\right] \tag{3.5}$$

где использованы обозначения (6.1) из [2].

Потенциалам (3.5) отвечают усилия и моменты, вычисленные по формулам ($M_x = M_y = 0$):

$$M_{xy} = M_{yx} = \frac{m}{2}\left[1 + \frac{e(x) + e(a-x)}{1 + e(a)} - \frac{e(y) + e(b-y)}{1 + e(b)}\right] \tag{3.6}$$

$$N_x = \frac{m}{2\varepsilon}\,\frac{e(y) - e(b-y)}{1 + e(b)}, \quad N_y = -\frac{m}{2\varepsilon}\,\frac{e(x) - e(a-x)}{1 + e(a)} \tag{3.7}$$

можно показать, что для однослойных пластин коэффициент поперечного сдвига лежит в интервале $\pi^2/12 \leq \Gamma < 1$. Примем здесь значение $\Gamma = \pi^2/12$, найденное Р. Миндлиным в 1951 году. Тогда $e(x) \equiv \exp(-\pi x/h)$. При $x = 2h$ имеем $\exp(-2\pi) = 1{,}87 \cdot 10^{-3}$. Эту величину вполне допустимо считать нулем в сравнении с единицей. Так и будем полагать в дальнейшем. Конечно, удержание $e(a)$ и $e(b)$ в (3.6), (3.7) не имеет никакого практического смысла: они удержаны просто для красоты. Таким образом, (3.6), (3.7) удовлетворяют условиям (3.3) всюду, за исключением зон, примыкающих к угловым точкам. Кроме того, видно, что (3.5)—(3.7) переходят в решение Кирхгофа (3.4) при удалении от границы на расстояния, превышающие $2h$. Вопрос, следовательно, заключается в том, насколько потенциалы Φ_* и F_* отличаются от точного решения задачи (3.3), т. е. от потенциалов Ф и F. Введем в рассмотрение потенциалы Ф и F:

$$\Phi^\vee = \Phi - \Phi_*, \quad F^\vee = F - F_* \tag{3.8}$$

Для потенциалов с галочками получаем следующую краевую задачу:

$$M_x^\vee = 0, \quad M_{xy}^\vee = \frac{m}{2}\,\frac{e(y)+e(b-y)}{1 + e(b)}; \quad N_x^\vee = -\frac{m}{2\varepsilon}\,\frac{e(y)-e(b-y)}{1 + e(b)} \quad (x = 0, a) \tag{3.9}$$

$$M_y^\nu = 0, \quad M_{yx}^\nu = -\frac{m}{2}\frac{e(x) + e(a - x)}{1 + e(a)}; \quad N_y^\nu = \frac{m}{2\varepsilon}\frac{e(x) - e(a - x)}{1 + e(a)} \quad (y = 0, b) \tag{3.10}$$

На первый взгляд кажется, что задача (3.9), (3.10) похожа на модифицированную задачу Лемба, рассмотренную в п.6 [2]. Однако на самом деле между этими задачами существует большое различие. А именно, в задаче (3.9), (3.10) суммарная поперечная сила, действующая на каждый из углов, равна нулю.

Обозначим через A угловую точку пластины с координатами $x = a$, $y = b$. Через B обозначим точку с координатами $x = a$, $y = b - 2n$, а через C — точку $x = a - 2h$, $y = b$. Мысленно отсечем треугольник ВАС от пластины. По катетам этого треугольника действуют нагрузки (3.9), (3.10). По ним из условий равновесия треугольника ВАС сразу находим вектор поперечных сил Q и главный вектор моментов M_*, действующие на гипотенузу ВС:

$$Q = 0, \quad M_* = m\varepsilon\,(i + j), \quad \varepsilon = h/\pi \tag{3.11}$$

Проделаем аналогичную процедуру с остальными углами пластины. В результате получим восьмиугольную пластину, имеющую четыре длинных стороны и четыре коротких длиной $2\sqrt{2}\,h$ каждая. По длинным сторонам этой пластины никаких нагрузок согласно (3.9), (3.10), не действует. По коротким сторонам действуют нагрузки с равнодействующими $N_{(\nu)} = 0$ и $M_{(\nu)} = -M_*$. Иными словами, получили пластину, на которую действуют малые крутящие моменты, величина которых пропорциональна h. Интуитивно ясно (видимо, нетрудно это доказать строго), что такие моменты могут породить в пластине прогибы порядка $O(h^{-2})$ и моменты порядка $O(h)$. Следовательно, согласно (3.8), точное решение рассматриваемой задачи по теории типа Рейсснера может отличаться от потенциалов (3.5) только в слагаемых меньшего асимптотического порядка. Так обстоит дело, если рассматривать области вне введенных выше треугольников. Внутри этих треугольников крутящие моменты и поперечные силы потенциалами (3.5) описываются неверно. Однако здесь не ставилась цель найти точное решение этой задачи. Речь шла о том, чтобы показать, что решение по теории Кирхгофа (3.4) является правильным в смысле утверждений Т*1*–Т*3*, но не соответствует утверждению Т*К*.

По поводу [2] мне приходилось вести дискуссии в самых различных направлениях. Характерно, что мои оппоненты, как правило, обращаются к общим рассуждениям, опровергнуть которые далеко не всегда удается простыми средствами. Именно поэтому основными аргументами в [2] я считаю контрпримеры. Мне совершенно не понятно, на каких основаниях критики [2] игнорируют эти контрпримеры и при этом продолжают настаивать на своих выводах общего характера.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Даревский В. М.* О статических граничных условиях в классической теории оболочек и пластин// Изв. АН. МТТ. 1995. № 4. С. 129—132.
2. *Жилин П. А.* О теориях пластин Пуассона и Кирхгофа с позиций современной теории пластин// Изв. АН. МТТ. 1992. № 3. С. 48—64.
3. *Новожилов В. В.* Теория тонких оболочек. Л.: Судпромгиз, 1962. 286 с.
4. *Thomson W., Tait P. G.* Treatise on Natural Philosophy. Part II. Cambridge: Univ. Press, 1890. 527 p.
5. *Жилин П. А.* Основные уравнения неклассической теории оболочек//Тр. Ленингр. политехн. ин-та. 1982. № 386. С. 29—46.
6. *Васильев В. В.* О теории тонких пластин//Изв. АН. МТТ. 1992. № 3. С. 26—47.

С.-Петербург

Поступила в редакцию
10.II.1995