

## К АНАЛИЗУ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ РЕБРИСТЫХ ОБОЛОЧЕК

Рассматриваются краевые задачи для ребристых оболочек, которые сводятся к решению дифференциальных уравнений в частных производных, коэффициенты которых содержат дельта-функции. Решения таких уравнений предлагается искать в области непрерывности коэффициентов, после чего полученные решения «склеиваются» на линиях разрыва. В работе формулируются условия склейки. Кроме того, предложен способ, который позволяет свести краевую задачу к интегральному уравнению Вольтерра

Краевые задачи для ребристых оболочек стали популярными в связи с тем, что оболочечные конструкции с ребрами жесткости нашли широкое применение в машиностроении, в частности в гидротурбостроении, при создании спиральных камер, крышек, подпятников, корпусов и других деталей гидротурбин.

В последние годы к краевым задачам для ребристых оболочек обращались многие исследователи, однако полученные ими результаты ни в коей мере нельзя считать удовлетворительными. По сути дела краевые задачи для ребристых оболочек в общем случае даже не поставлены, не говоря уже о том, что отсутствуют аналитические решения. Недостатки широко распространенной схемы конструктивной анизотропии общеизвестны, а ее единственное достоинство (простота) сразу пропадает, если обратиться к несимметричным задачам.

В предлагаемой работе выводятся общие уравнения равновесия для ребристых оболочек, формулируются соотношения упругости. Кроме того, в работе предложены два способа решения краевых задач для ребристых оболочек. Первый из них основан на склейке решений, полученных для двух соседних областей, в которых коэффициенты уравнений равновесия непрерывны. Вторым методом основан на замене  $\delta$ -функции некоторой допределальной функцией и сведении задачи к интегральному уравнению типа Вольтерра, решение которого справедливо во всей области.

### Обозначения и определения

В этой работе будут использоваться обозначения, введенные в [1]. Прежде всего необходимо дать определение области, в которой мы рассматриваем краевую задачу для ребристых оболочек, иными словами дать определение ребристой оболочки.

Пусть нам задана произвольная поверхность Ляпунова  $L$ , отнесенная к линиям главной кривизны

$$\bar{R} = \bar{R}(a_1, a_2) \quad a_1, a_2 \in D, \quad (1)$$

где  $D$  определяется:

$$a_l \leq \alpha_l \leq b_l, \quad l=1,2;$$

$\alpha_1, \alpha_2$  — гауссовы координаты на поверхности. Пусть  $\bar{R}_{\alpha_l} = \frac{\partial \bar{R}}{\partial \alpha_l}$  — базисные векторы на поверхности. Введем вектор, нормальный к поверхности,  $\bar{n} = \bar{R}_{\alpha_1} \times \bar{R}_{\alpha_2}$  и две векторные функции:

$$\left. \begin{aligned} \bar{H}_1(\alpha_1, \alpha_2) &= h_1(\alpha_1, \alpha_2) \bar{n}; \\ \bar{H}_2(\alpha_1, \alpha_2) &= -h_2(\alpha_1, \alpha_2) \bar{n}, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где  $0 \leq h_i(\alpha_1, \alpha_2) \leq A_i = \text{const}$ .

Поверхности (2) ограничивают трехмерную область, которую мы считаем заполненной упругой сплошной средой. Тогда, если максимальное расстояние между поверхностями  $\bar{H}_1$  и  $\bar{H}_2$ , отсчитываемое по нормали к  $\bar{R}$ , много меньше минимального линейного размера области  $D$ , говорят, что задана тонкая упругая оболочка.

Если функции  $h_i(\alpha_1, \alpha_2)$  таковы, что

$$h_1(\alpha_1, \alpha_2) \equiv \frac{1}{2} h = \text{const}; \quad h_2(\alpha_1, \alpha_2) \equiv \frac{1}{2} h = \text{const}, \quad (3)$$

то говорят, что задана оболочка постоянной толщины.

Пусть на поверхности (1) задано конечное число линий

$$\alpha_1 = \alpha_{1m} \quad (m=1, 2, \dots, N_1); \quad \alpha_2 = \alpha_{2n} \quad (n=1, 2, \dots, N_2),$$

где  $\alpha_{im}$  — константы. Выделим в  $D$  конечное число областей  $D_m^* \in D$  и  $D_n^* \in D$ , определяемых соотношениями

$$\left. \begin{aligned} D_m^*: \quad \alpha_{1m} - \varepsilon \leq \alpha_1 \leq \alpha_{1m} + \varepsilon \quad m=1, 2, \dots, N_1; \\ D_n^*: \quad \alpha_{2n} - \varepsilon \leq \alpha_2 \leq \alpha_{2n} + \varepsilon \quad n=1, 2, \dots, N_2, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

где  $\varepsilon$  малая величина. Теперь можно дать определение ребристых оболочек, которые будут рассмотрены в данной работе.

Если функции  $h_i(\alpha_1, \alpha_2)$  удовлетворяют условиям (3) в области  $D - D_m^* - D_n^*$ , а в области  $D_m^* + D_n^*$  удовлетворяют условиям

$$0 \leq h_i(\alpha_1, \alpha_2) \leq h_p, \quad (5)$$

то упругое тело, ограниченное поверхностями (2), будем называть ребристой оболочкой с квазипостоянной толщиной. При таком определении предполагается, что  $\bar{H}_1$  и  $\bar{H}_2$  должны обращаться в нуль на границе  $D$ . Этого можно избежать, если ввести в рассмотрение боковую поверхность

$$\bar{H}_3 = z \bar{n} [\alpha_1, \psi(\alpha_1)],$$

где

$$-h_2[\alpha_1, \psi(\alpha_1)] \leq z \leq h_1[\alpha_1, \psi(\alpha_1)];$$

$\alpha_2 = \psi(\alpha_1)$  — граница области  $D$ . Если в (5) положить  $h_p = \frac{h}{2}$ , то получим гладкую оболочку.

Вполне понятно, что классические уравнения равновесия оболочек в усилиях и моментах, полученные, например, в монографии В. В. Новожилова [1], верны как для оболочек постоянной толщины, так и для оболочек переменной толщины, каковыми являются ребристые оболочки.

Итак, уравнения равновесия имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\partial A_2 T_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_1 S}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} S - \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} T_2 + \\ & + \frac{1}{R_1} \left[ \frac{\partial A_2 M_1}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} M_2 + 2 \frac{\partial A_1 H}{\partial \alpha_1} + 2 \frac{R_1}{R_2} \cdot \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} H \right] = -A_1 A_2 q_1; \\ & \frac{\partial A_2 S}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_1 T_2}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} S - \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} T_1 + \\ & + \frac{1}{R_2} \left[ \frac{\partial A_1 M_2}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} M_1 + 2 \frac{\partial A_2 H}{\partial \alpha_1} + 2 \frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} H \right] = -A_1 A_2 q_2; \\ & \frac{T_1}{R_1} + \frac{T_2}{R_2} - \frac{1}{A_1 A_2} \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \cdot \frac{1}{A_1} \left[ \frac{\partial A_2 M_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_1 H}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} H - \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} M_2 \right] + \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \cdot \frac{1}{A_2} \left[ \frac{\partial A_2 H}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_1 M_2}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} H - \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} M_1 \right] \right\} = q_n. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

#### Соотношения между усилиями, моментами и компонентами деформаций для ребристых оболочек

Теория оболочек предполагает сведение пространственной задачи теории упругости к двумерной задаче на поверхности заменой напряжений их интегральными характеристиками. Ход дальнейших выкладок очевиден, поэтому они будут сопровождаться лишь краткими комментариями.

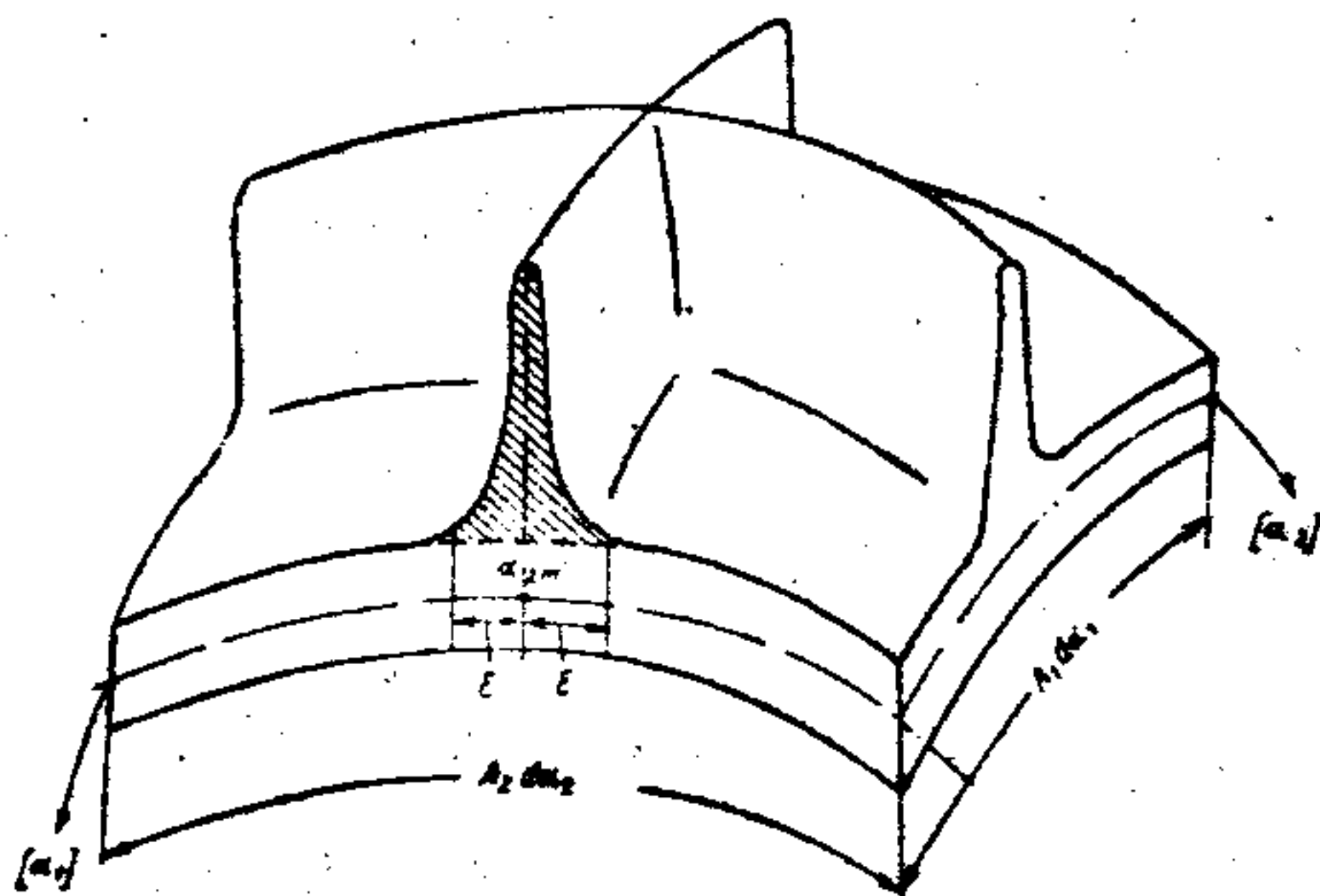


Рис. 1

На рис. 1 изображен бесконечно малый элемент ребристой оболочки. В качестве базисной поверхности для ребристой оболочки выбирается поверхность (1), которая является срединной поверхностью оболочки в области  $D - D_1^* - D_2^*$ .

Интегральными характеристиками в данном случае будут величины:

$$\left. \begin{aligned} S_{ij} &= \int_{F_i} \sigma_{ij}^z dF_z; \\ M_{ij} &= \int_{F_i} \sigma_{ij}^z z dF_z; \\ i &= 1, 2; \quad j = 1, 2, 3, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

где  $F_1$  — площадь сечения  $\alpha_1 = \text{const}$ ;  
 $F_2$  — площадь сечения  $\alpha_2 = \text{const}$ ;  
 $S_{ij}$  — усилия,  
 $M_{ij}$  — моменты.

Область интегрирования в выражении (7) можно разбить на две:

$$F_i = F_{i0} + \sum_{m=1}^{N_i} F_{ip}^m, \quad (8)$$

где

$F_{i0} \left( |z| \leq \frac{h}{2} \right)$  — площадь поперечного сечения гладкой области (на рис. 1 эта область не заштрихована);  
 $F_{ip}^m \left( |z| \geq \frac{h}{2} \right)$  — площадь поперечного сечения  $m$ -ного ребра, расположенного в направлении  $\alpha_i$ ;  
 $N_i$  — число ребер в направлении  $\alpha_i$ .

С учетом вышесказанного соотношения (7) примут вид:

$$\left. \begin{aligned} S_{ij} &= \int_{F_{i0}} \sigma_{ij}^z dF_z + \sum_{m=1}^{N_i} \int_{F_{ip}^m} \sigma_{ij}^z dF_z; \\ M_{ij} &= \int_{F_{i0}} z \sigma_{ij}^z dF_z + \sum_{m=1}^{N_i} \int_{F_{ip}^m} z \sigma_{ij}^z dF_z. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Первые интегралы в (9) хорошо известны из классической теории оболочек постоянной толщины. Итак, теперь рассмотрим вторые интегралы в (9):

$$\left. \begin{aligned} S_{ij}^p &= \int_{F_{ip}^m} \sigma_{ij}^z dF_z; \\ M_{ij}^p &= \int_{F_{ip}^m} z \sigma_{ij}^z dF_z \quad |z| \geq \frac{h}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

При  $|z| \geq \frac{h}{2}$  можно принять, что

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{11}^z &= E \varepsilon_1^z; \\ \sigma_{22}^z &= E \varepsilon_2^z; \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1^z &= \varepsilon_1 + z \kappa_1; \\ \varepsilon_2^z &= \varepsilon_2 + z \kappa_2. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Подставляя (12), (11) в (10), получим:

$$\left. \begin{aligned} S_{11}^p &= EF_{1p}^m \varepsilon_1 + ES_{1p}^m x_1; \\ S_{22}^p &= EF_{2p}^m \varepsilon_2 + ES_{2p}^m x_2; \\ M_{11}^p &= ES_{1p}^m \varepsilon_1 + EJ_{1p}^m x_1; \\ M_{22}^p &= ES_{2p}^m \varepsilon_2 + EJ_{2p}^m x_2, \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

где

$$\left. \begin{aligned} F_{ip}^m &= \int_{F_{ip}^m} dF_z; \\ S_{ip}^m &= \int_{F_{ip}^m} z dF_z; \\ J_{ip}^m &= \int_{F_{ip}^m} z^2 dF_z. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Формулы (13) дают значения усилий и моментов, действующих в сечении ребра. В теории оболочек гораздо удобнее задавать не векторные поля усилий и моментов, а поля их линейной плотности. С помощью весьма простых рассуждений можно найти линейную плотность векторов (13).

С этой целью вместо векторов (13) введем их линейные плотности  $T_{1p}$ ,  $T_{2p}$ ,  $M_{1p}$  и  $M_{2p}$ , которые определим следующими условиями:

$$(T_{1p}, T_{2p}, M_{1p}, M_{2p}) = \begin{cases} 0 & \alpha_1, \alpha_2 \neq \alpha_{1m}, \alpha_{2n} \\ \infty & \alpha_1, \alpha_2 = \alpha_{1m}, \alpha_{2n} \end{cases} \quad (15)$$

$$\int_{l_i} (T_{ip}, M_{ip}) dS_i = (S_{ii}^p, M_{ii}^p), \quad (16)$$

где  $l_i$  — длина соответствующей координатной линии.

Условиям (15) можно удовлетворить, если искать линейные плотности в виде:

$$\begin{aligned} T_{1p} &= \psi_1(\alpha_1, \alpha_2) \delta(\alpha_2 - \alpha_{2n}); \\ T_{2p} &= \psi_2(\alpha_1, \alpha_2) \delta(\alpha_1 - \alpha_{1m}); \\ M_{1p} &= \psi_3(\alpha_1, \alpha_2) \delta(\alpha_2 - \alpha_{2n}); \\ M_{2p} &= \psi_4(\alpha_1, \alpha_2) \delta(\alpha_1 - \alpha_{1m}), \end{aligned} \quad (17)$$

где  $\delta(\varphi)$  — функция Дирака, а  $\psi_i(\alpha_1, \alpha_2)$  выбираются так, чтобы удовлетворить условиям (16).

Подставляя (17) в (16) и учитывая свойства  $\delta$ -функций, получим:

$$\left. \begin{aligned} \psi_1 &= \frac{S_{11}^p}{A_2} = \frac{EF_{1p}^m \varepsilon_1 + ES_{1p}^m x_1}{A_2}; \\ \psi_2 &= \frac{S_{22}^p}{A_1} = \frac{EF_{2p}^m \varepsilon_2 + ES_{2p}^m x_2}{A_1}; \\ \psi_3 &= \frac{M_{11}^p}{A_2} = \frac{ES_{1p}^m \varepsilon_1 + EJ_{1p}^m x_1}{A_2}; \\ \psi_4 &= \frac{M_{22}^p}{A_1} = \frac{ES_{2p}^m \varepsilon_2 + EJ_{2p}^m x_2}{A_1}. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Подставляя (18) в (17), учитывая, что имеются  $N_i$  ребер в  $i$ -том направлении, и вспоминая (9), получаем для линейной плотности векторов усилий и моментов следующие выражения:

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= B(\varepsilon_1 + \nu \varepsilon_2) + \frac{1}{A_2} \sum_{m=1}^{N_1} (EF_{1p}^m \varepsilon_1 + ES_{1p}^m x_1) \delta(a_2 - a_{2m}); \\ T_2 &= B(\varepsilon_2 + \nu \varepsilon_1) + \frac{1}{A_1} \sum_{m=1}^{N_2} (EF_{2p}^m \varepsilon_2 + ES_{2p}^m x_2) \delta(a_1 - a_{1m}); \\ M_1 &= D(x_1 + \nu x_2) + \frac{1}{A_2} \sum_{m=1}^{N_1} (ES_{1p}^m \varepsilon_1 + EJ_{1p}^m x_1) \delta(a_2 - a_{2m}); \\ M_2 &= D(x_2 + \nu x_1) + \frac{1}{A_1} \sum_{m=1}^{N_2} (ES_{2p}^m \varepsilon_2 + EJ_{2p}^m x_2) \delta(a_1 - a_{1m}); \\ S &= \frac{1-\nu}{2} B\omega; \\ H &= (1-\nu) D\tau. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Это и есть искомые соотношения между усилиями, моментами и компонентами деформаций для ребристых оболочек.

Подставляя (19) в (6) и выражая компоненты деформации через перемещения, получим уравнения равновесия ребристых оболочек в перемещениях. Коэффициенты в этих уравнениях содержат особенности типа  $\delta$ -функций, что вносит существенные осложнения в решение этих уравнений.

**Замена  $\delta$ -функций допределельными функциями и вывод соотношений, выражающих компоненты деформации через усилия и моменты**

Допустим, что геометрические характеристики ребер, расположенных в одном направлении, одинаковы. Тогда выражения (19) примут вид (выписываем лишь первые четыре, поскольку два последние совпадают с классической теорией гладких оболочек):

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= B(\varepsilon_1 + \nu \varepsilon_2) + \frac{E\bar{F}_1 \varepsilon_1 + ES_1 x_1}{A_2} \sum_{m=1}^{N_1} \delta(a_2 - a_{2m}); \\ T_2 &= B(\varepsilon_2 + \nu \varepsilon_1) + \frac{EF_2 \varepsilon_2 + ES_2 x_2}{A_1} \sum_{m=1}^{N_2} \delta(a_1 - a_{1m}); \\ M_1 &= D(x_1 + \nu x_2) + \frac{ES_1 \varepsilon_1 + EJ_1 x_1}{A_2} \sum_{m=1}^{N_1} \delta(a_2 - a_{2m}); \\ M_2 &= D(x_2 + \nu x_1) + \frac{ES_2 \varepsilon_2 + EJ_2 x_2}{A_1} \sum_{m=1}^{N_2} \delta(a_1 - a_{1m}). \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Разрывные функции Дирака в (20) заменим некоторыми допределёнными функциями [2], зависящими от параметра  $\varepsilon > 0$ , такими, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(\alpha_2, \varepsilon) = \sum_{m=1}^{N_1} \delta(\alpha_2 - \alpha_{2m});$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \psi(\alpha_1, \varepsilon) = \sum_{m=1}^{N_1} \delta(\alpha_1 - \alpha_{1m}),$$

причем  $f(\alpha_2, \varepsilon)$  и  $\psi(\alpha_1, \varepsilon)$  непрерывные функции  $\alpha_2$  и  $\alpha_1$  соответственно.

Вид этих функций зависит от конкретного содержания задачи. Пример построения и использования допределённых функций будет приведен ниже.

Теперь соотношения (20) примут вид:

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= B_1 \varepsilon_1 + \nu B \varepsilon_2 + C_1 x_1; \\ T_2 &= \nu B \varepsilon_1 + B_2 \varepsilon_2 + C_2 x_2; \\ M_1 &= D_1 x_1 + \nu D x_2 + C_1 \varepsilon_1; \\ M_2 &= \nu D x_1 + D_2 x_2 + C_2 \varepsilon_2; \\ S &= \frac{1-\nu}{2} B \omega, \quad H = (1-\nu) D \tau, \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

где

$$B_1 = B + \frac{EF_1}{A_2} f(\varepsilon_1 x_2);$$

$$C_1 = \frac{ES_1}{A_2} f(\varepsilon_1 x_2);$$

$$B_2 = B + \frac{EF_2}{A_1} \psi(\varepsilon_1 x_1);$$

$$C_2 = \frac{ES_2}{A_1} \psi(\varepsilon_1 x_1);$$

$$D_1 = D + \frac{EJ_1}{A_2} f(\varepsilon_1 x_2);$$

$$D_2 = D + \frac{EJ_2}{A_1} \psi(\varepsilon_1 x_1);$$

$$B = \frac{Eh}{1-\nu^2}; \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}.$$

Решая уравнения (21) относительно  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$ ,  $x_1$  и  $x_2$ , получим

$$\varepsilon_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad \varepsilon_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad x_1 = \frac{\Delta_3}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_4}{\Delta}, \quad (22)$$

где

$$\Delta = (B_1 B_2 - \nu^2 B^2)(D_1 D_2 - \nu^2 D^2) - 2\nu^2 C_1 C_2 B D - (B_1 D_1 A_2^2 + B_2 D_2 A_1^2) + A_1^2 A_2^2;$$

$$\Delta_1 = a_{11} T_1 + a_{12} T_2 + a_{13} M_1 + a_{14} M_2;$$

$$\Delta_2 = a_{21} T_1 + a_{22} T_2 + a_{23} M_1 + a_{24} M_2;$$

$$\Delta_3 = a_{31} T_1 + a_{32} T_2 + a_{33} M_1 + a_{34} M_2;$$

$$\Delta_4 = a_{41} T_1 + a_{42} T_2 + a_{43} M_1 + a_{44} M_2.$$

В этих формулах  $a_{ij} = a_{ji}$ .

$$\begin{aligned} a_{11} &= B_2(D_1 D_2 - \nu^2 D^2) - C_2 D_1; \\ a_{22} &= -\nu [B(D_1 D_2 - \nu^2 D^2) + C_1 C_2 D]; \\ a_{13} &= -A_1(B_2 D_2 - C_2^2) - \nu^2 C_2 B D; \\ a_{14} &= \nu(C_1 B_2 D + C_2 B D_1); \\ a_{23} &= B_1(D_1 D_2 - \nu^2 D^2) - C_1^2 D_2; \\ a_{24} &= \nu(C_2 B_1 D + A_1 B D_2); \\ a_{33} &= -D_2(B_1 B_2 - \nu^2 B^2) + C_2^2 B_1; \\ a_{34} &= \nu[D(B_1 B_2 - \nu^2 B^2) + C_1 C_2 B]; \\ a_{44} &= -D_1(B_1 B_2 - \nu^2 B^2) + C_1^2 B_2. \end{aligned}$$

Покажем, что допредельную функцию действительно можно построить. Для этого рассмотрим оболочку вращения с меридиональными ребрами, расположенными на одинаковом расстоянии друг от друга. Для оболочек вращения  $\alpha_2 = \varphi$ . В качестве допредельной функции для

функции  $\sum_{m=1}^{N_1} \delta(\varphi - \varphi_m)$  можно взять функцию

$$f(\varepsilon, \varphi) = \frac{N}{2\pi} \cdot \frac{\varepsilon}{\sin^2 \frac{N}{2} \varphi + \varepsilon^2}.$$

Эта функция, очевидно, удовлетворяет условию (21). Действительно,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(\varepsilon, \varphi) = \begin{cases} 0 & \varphi \neq \varphi_k = \frac{2\pi}{N}(k-1); \\ \infty & \varphi = \varphi_k = \frac{2\pi}{N}(k-1); \end{cases}$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \frac{N}{2\pi} \cdot \frac{\varepsilon d\varphi}{\sin^2 \frac{N}{2} \varphi + \varepsilon^2} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{N}{\sqrt{1 + \varepsilon^2}} = N,$$

что и требовалось доказать.

### Условия склейки для оболочек с меридиональными ребрами

Ограничимся рассмотрением оболочек вращения с меридиональными ребрами, но, как будет видно из дальнейшего, это не принципиально.

Основная трудность в решении краевых задач для ребристых оболочек состоит в том, что коэффициенты в уравнениях равновесия являются разрывными функциями. Естественнее всего в таких случаях «склеивать» решения на линиях разрыва. Поэтому решения указанных уравнений следует искать в области непрерывности коэффициентов, после чего полученные решения склеивают на линиях разрыва. Для этого необходимо сформулировать условия склейки решений на линиях разрыва. В данном случае они почти очевидны.

Пусть мы имеем оболочку вращения с меридиональными ребрами, расположенными по линиям  $\alpha_{2k}$  ( $k=1, 2, \dots, N$ ). Тогда в соотношениях (19) необходимо положить  $F_{2p}^m = S_{2p}^m = J_{2p}^m = 0$  и подставить полученные выражения в (6). Записав полученные уравнения в перемещениях, проинтегрируем каждое из них по  $\alpha_2$  в пределах от  $\alpha_{2k} - \varepsilon$  до  $\alpha_{2k} + \varepsilon$  и сделаем предельный переход при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Тогда на каждой линии разрыва ( $k=1, 2, \dots, N$ ) получим три условия склейки, которые связывают между собой скачки старших производных по  $\alpha_2$  от перемещений на линиях разрыва.

Поскольку уравнения равновесия имеют восьмой порядок, то на каждой линии разрыва необходимо сформулировать по восемь условий склейки. Три из них получаются из уравнений, а недостающие пять очевидны. Во-первых, сами перемещения непрерывны на линиях разрыва, поскольку это является условием неразрывности оболочек; во-вторых, непрерывны первые две производные от  $w$  по  $\alpha_2$ . Само собой разумеется, что все производные по  $\alpha_1$  непрерывны во всей области.

Вышесказанное можно проиллюстрировать на примере первого уравнения. Остальные условия склейки будут приведены без вывода.

Первое уравнение из системы уравнений (6) имеет вид:

$$\frac{\partial A_2 T_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_1 S}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} T_2 + \frac{1}{R_1} \left[ \frac{\partial A_2 M_1}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} M_2 + 2 \frac{\partial A_1 H}{\partial \alpha_2} \right] = -A_1 A_2 q_1.$$

Интегрируя это уравнение по  $\alpha_2$  в пределах  $(\alpha_{2k} - \varepsilon, \alpha_{2k} + \varepsilon)$  и делая предельный переход, получим для каждого члена уравнения следующие выражения:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\alpha_{2m} - \varepsilon}^{\alpha_{2m} + \varepsilon} \frac{\partial A_2 T_1}{\partial \alpha_1} d\alpha_2 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\alpha_{2m} - \varepsilon}^{\alpha_{2m} + \varepsilon} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} A_2 \left[ B(\varepsilon_1 + \nu \varepsilon_2) + \frac{1}{A_2} \sum_{k=1}^N (EF \varepsilon_1 + ES \varepsilon_1) \delta(\alpha_2 - \alpha_{2k}) \right] d\alpha_2 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\alpha_{2m} - \varepsilon}^{\alpha_{2m} + \varepsilon} \frac{\partial A_2 B(\varepsilon_1 + \nu \varepsilon_2)}{\partial \alpha_1} d\alpha_2 + \frac{\partial (EF \varepsilon_{1m} + ES \varepsilon_{1m})}{\partial \alpha_1}.$$

Последнее слагаемое получено на основании свойств  $\delta$ -функции, причем  $\varepsilon_{1m}$  и  $\varepsilon_{1m}$  означают значения компонент деформации на линии  $\alpha_{2m}$ .

Первое слагаемое, очевидно, равно нулю:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\alpha_{2m} - \varepsilon}^{\alpha_{2m} + \varepsilon} \frac{\partial A_2 B(\varepsilon_1 + \nu \varepsilon_2)}{\partial \alpha_1} d\alpha_2 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} A_2 B \int_{\alpha_{2m} - \varepsilon}^{\alpha_{2m} + \varepsilon} (\varepsilon_1 + \nu \varepsilon_2) d\alpha_2 = 0,$$

поскольку

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\alpha_{2m} - \varepsilon}^{\alpha_{2m} + \varepsilon} \varepsilon_1 d\alpha_2 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\alpha_{2m} - \varepsilon}^{\alpha_{2m} + \varepsilon} \left( \frac{1}{A_1} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} + \frac{w}{R_1} \right) d\alpha_2 = \\ &= \frac{1}{A_1} \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\alpha_{2m} - \varepsilon}^{\alpha_{2m} + \varepsilon} u_1 d\alpha_2 + \frac{1}{R_1} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\alpha_{2m} - \varepsilon}^{\alpha_{2m} + \varepsilon} w d\alpha_2 = \frac{1}{A_1} \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha_1} u_{1m} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 2\varepsilon + \\ &+ \frac{1}{R_1} w_m \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 2\varepsilon = 0, \end{aligned}$$

так как перемещения непрерывны на линиях разрыва. Итак,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a_{2m}-\varepsilon}^{a_{2m}+\varepsilon} \frac{\partial A_2 T_1}{\partial a_1} da_2 = \left. \frac{\partial (EF\varepsilon_1 + ES\varepsilon_1)}{\partial a_1} \right|_{a_2=a_{2m}}.$$

Повторяя аналогичную процедуру над всеми членами в уравнении, получим:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{D_1^m} \frac{\partial A_1 S}{\partial a_2} da_2 = \frac{1-\nu}{2} \cdot \frac{A_1 B}{A_2} \left( \frac{\partial u_{1m}^+}{\partial a_2} - \frac{\partial u_{1m}^-}{\partial a_2} \right),$$

где

$$\frac{\partial u_{1m}^+}{\partial x_2} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial u_{1m}}{\partial a_2} \Big|_{a_2=a_{2m}+\varepsilon}; \quad \frac{\partial u_{1m}^-}{\partial x_2} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial u_{1m}}{\partial a_2} \Big|_{a_2=a_{2m}-\varepsilon};$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{D_2^m} \frac{\partial A_2 T_2}{\partial a_1} T_2 da_2 = 0;$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{D_3^m} \frac{\partial A_2 M_1}{\partial a_1} da_2 = \left. \frac{\partial (ES\varepsilon_1 + EJ\varepsilon_1)}{\partial a_1} \right|_{a_2=a_{2m}};$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{D_4^m} \frac{\partial A_1 H}{\partial a_2} da_2 = \frac{(1-\nu) D A_1}{A_2 R_1} \left( \frac{\partial u_{1m}^+}{\partial a_2} - \frac{\partial u_{1m}^-}{\partial a_2} \right);$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{D_5^m} \frac{\partial A_2 M_2}{\partial a_1} M_2 da_2 = 0; \quad D_1^m: [a_{2m}-\varepsilon, a_{2m}+\varepsilon].$$

Суммируя все полученное, получим условие склейки

$$\begin{aligned} & \left. \frac{\partial (EF\varepsilon_1 + ES\varepsilon_1)}{\partial a_1} \right|_{a_2=a_{2m}} + \frac{1}{R_1} \left. \frac{\partial (ES\varepsilon_1 + EJ\varepsilon_1)}{\partial a_1} \right|_{a_2=a_{2m}} = \\ & = - \frac{(1-\nu) A_1 B}{2 A_2} \left( 1 + \frac{4D}{B R_1^2} \right) \left( \frac{\partial u_{1m}^+}{\partial a_2} - \frac{\partial u_{1m}^-}{\partial a_2} \right). \end{aligned} \quad (23)$$

Физический смысл выражения (23) совершенно очевиден, если обратиться к рассмотрению оболочек нулевой гауссовой кривизны. Тогда (23) примет вид:

$$\frac{\partial}{\partial a_1} \cdot \frac{EF}{A_1} \cdot \frac{\partial u_{1m}}{\partial a_1} - \frac{\partial}{\partial a_1} \cdot \frac{ES}{A_1^2} \cdot \frac{\partial^2 w_m}{\partial a_1^2} = - \frac{(1-\nu) A_1 B}{2 A_2} \left( \frac{\partial u_{1m}^+}{\partial a_2} - \frac{\partial u_{1m}^-}{\partial a_2} \right).$$

Но это уравнение попросту является растяжением балки под действием силы, приложенной внецентренно. Роль растягивающей силы здесь играет скачок в усилии  $S$  на ребре, который равен правой части этого уравнения.

Из второго уравнения следует условие:

$$\frac{\partial u_{2m}^+}{\partial a_2} = \frac{\partial u_{2m}^-}{\partial a_2}. \quad (24)$$

Из третьего уравнения следует условие:

$$\begin{aligned} & \frac{EF\epsilon_{1m} + ESx_{1m}}{A_2 R_1} - \frac{1}{A_1 A_2} \left[ \frac{\partial}{\partial a_1} \cdot \frac{1}{A_1} \cdot \frac{\partial (ES\epsilon_{1m} + EJx_{1m})}{\partial a_1} - \right. \\ & - \frac{A_1 D}{A_2^3} \left( \frac{\partial^3 w_m^+}{\partial a_2^3} - \frac{\partial^3 w_m^-}{\partial a_2^3} \right) + \frac{A_1 D}{A_2^2 R_2} \left( \frac{\partial^2 u_{2m}^+}{\partial a_2^2} - \frac{\partial^2 u_{2m}^-}{\partial a_2^2} \right) + \\ & + \frac{1}{A_2 R_1} \left( \frac{1}{A_2} \cdot \frac{\partial A_2}{\partial a_1} \right) \left( \frac{\partial u_{1m}^+}{\partial a_2} - \frac{\partial u_{1m}^-}{\partial a_2} \right) + \frac{(2-\nu) D}{A_2} \cdot \frac{\partial}{\partial a_1} \times \\ & \left. \times \frac{1}{R_1} \left( \frac{\partial u_{1m}^+}{\partial a_2} - \frac{\partial u_{1m}^-}{\partial a_2} \right) \right] = 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Условия (23), (24) и (25) вместе с условиями

$$\left. \begin{aligned} u_{1m}^+ &= u_{1m}^-; & \frac{\partial w_m^+}{\partial a_2} &= \frac{\partial w_m^-}{\partial a_2}; \\ u_{2m}^+ &= u_{2m}^-; \\ w_m^+ &= w_m^-; & \frac{\partial^2 w_m^+}{\partial a_2^2} &= \frac{\partial^2 w_m^-}{\partial a_2^2} \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

составляют искомые восемь условий склейки.

Если иметь в виду склейку решений на линиях разрыва, то, очевидно, проблемы ребристых оболочек свелись к проблеме решения краевых задач для незамкнутых оболочек. Условия, аналогичные (23), (24), (25) и (26), можно получить и для оболочек со шпангоутами и для оболочек, подкрепленных в обоих направлениях.

### Цилиндрическая оболочка, подкрепленная шпангоутами, под действием внутреннего давления

Вышесказанное можно проиллюстрировать на примере цилиндрической оболочки, подкрепленной шпангоутами, находящейся под действием внутреннего давления.

Эта задача в различных вариантах была рассмотрена в работах [3], [4], [5], [6] [и др.].

Для цилиндра имеем

$$A_1 = A_2 = a, \quad a_1 = \xi - \frac{l}{a} \leq \xi \leq \frac{l}{a},$$

где  $2l$  — длина цилиндра,  $a$  — радиус цилиндра (рис. 2).

Для цилиндра уравнения (6) принимают вид:

$$a \frac{dT_1}{d\xi} = 0; \quad (27)$$

$$a \frac{dS}{d\xi} + 2 \frac{dH}{d\xi} = 0; \quad (28)$$

$$\frac{T_2}{a} - \frac{1}{a^2} \cdot \frac{d^2 M_1}{d\xi^2} = p_0. \quad (29)$$

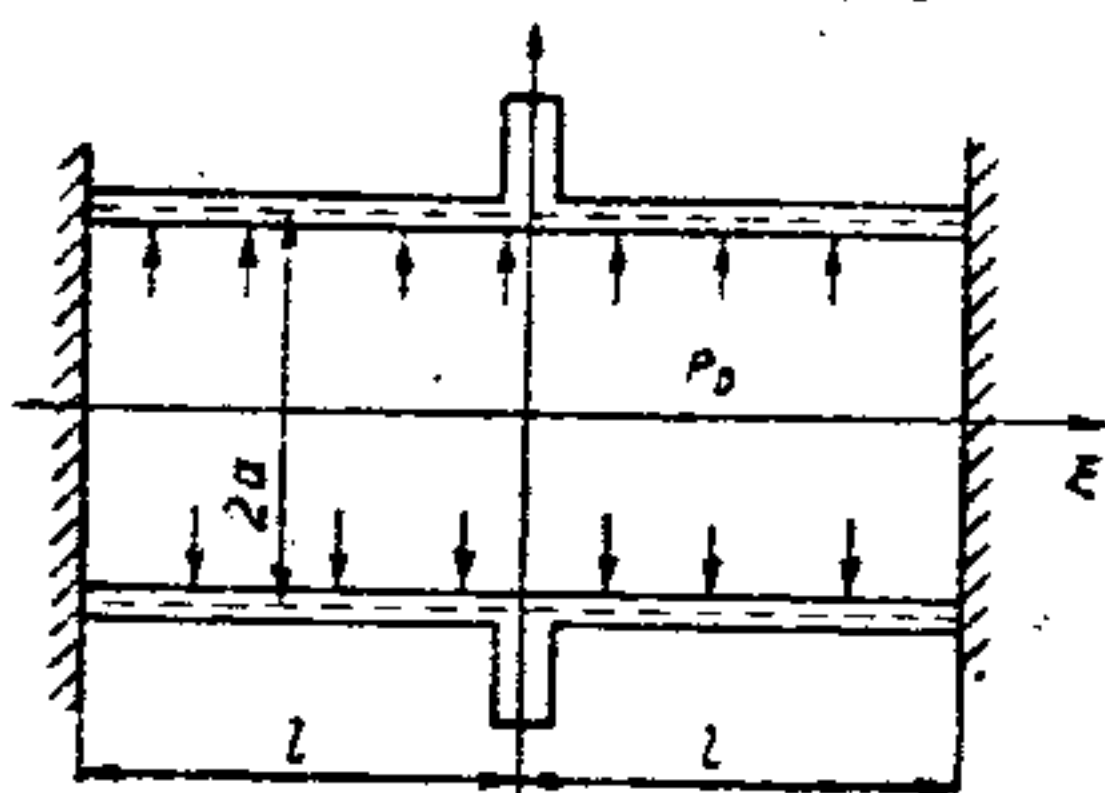


Рис. 2

Задача распадается на две: а) изгиб и растяжение (27) и (29), б) кручение (28). Полагая, что кручение отсутствует, будем рассматривать лишь изгиб и растяжение. Кручение будет отсутствовать, если в качестве краевых условий выбрать, например, защемление.

Соотношения упругости примут вид:

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= B(\varepsilon_1 + \nu \varepsilon_2); \\ T_2 &= B(\varepsilon_2 + \nu \varepsilon_1) + \frac{EF\varepsilon_2 + ES\kappa_2}{a} \delta(\xi); \\ M_1 &= D(\kappa_1 + \nu \kappa_2), \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{a} \cdot \frac{du}{d\xi}; \\ \varepsilon_2 &= \frac{w}{a}; \\ \kappa_1 &= -\frac{1}{a^2} \cdot \frac{d^2 w}{d\xi^2}; \\ \kappa_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Из уравнения (27) имеем  $T_1 = T_{10} = \text{const}$ , откуда

$$T_{10} = B(\varepsilon_1 + \nu \varepsilon_2) = \frac{B}{a} \left( \frac{du}{d\xi} + \nu w \right),$$

т. е.

$$\frac{du}{d\xi} = \frac{aT_{10}}{B} - \nu w. \quad (32)$$

Подставляя (32), (31) и (30) в (29), получим

$$h_*^2 \frac{d^4 w}{d\xi^4} + [(1 - \nu^2) + \lambda \delta(\xi)] w = \gamma, \quad (33)$$

где

$$\gamma = \frac{a^2 p_0 - \alpha \nu T_{10}}{B}; \quad \lambda = \frac{EF}{aB}; \quad h_*^2 = \frac{D}{a^2 B}.$$

Уравнение (33) является разрешающим для цилиндрической оболочки, подкрепленной шпангоутом.

Построим решение (33) путем склейки решений, полученных для областей  $\xi < 0$  и  $\xi > 0$ , на линии  $\xi = 0$ .

В областях  $\xi < 0$  и  $\xi > 0$  уравнение (33) принимает вид:

$$\frac{d^4 w}{d\xi^4} + \frac{1 - \nu^2}{h_*^2} w = \frac{\gamma}{h_*^2}. \quad (34)$$

Обозначим через  $w^-$  решение (34) в области  $\xi < 0$ , а через  $w^+$  решение (34) в области  $\xi > 0$ . Тогда условия склейки принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} w^-(0) &= w^+(0); \\ \frac{dw^-(0)}{d\xi} &= \frac{dw^+(0)}{d\xi}; \\ \frac{d^2 w^-(0)}{d\xi^2} &= \frac{d^2 w^+(0)}{d\xi^2}; \\ h_*^2 \left[ \frac{d^3 w^+(0)}{d\xi^3} - \frac{d^3 w^-(0)}{d\xi^3} \right] + \lambda w(0) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

На краях  $\xi = \pm \frac{l}{a}$  имеем.

$$w_{(-)}^{\pm} \left( \pm \frac{l}{a} \right) = 0 \quad \frac{dw_{(-)}^{\pm} \left( \pm \frac{l}{a} \right)}{d\xi} = 0. \quad (36)$$

Краевые условия (35), (36) и уравнение (34) полностью определяют краевую задачу.

Решение (34) имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} w^+ &= \gamma \frac{1}{1-\nu^2} + e^{\beta\xi} (C_1 \sin \beta\xi + C_2 \cos \beta\xi) + \bar{e}^{\beta\xi} (C_3 \sin \beta\xi + C_4 \cos \beta\xi); \\ w^- &= \frac{\gamma}{1-\nu^2} + e^{\beta\xi} (A_1 \sin \beta\xi + A_2 \cos \beta\xi) + \bar{e}^{\beta\xi} (A_3 \sin \beta\xi + A_4 \cos \beta\xi), \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

где

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{1-\nu^2}{h_*^2}}$$

Используя условия (35) и (36), получим для констант интегрирования следующие выражения:

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= \gamma \psi(\beta a), & A_1 &= -C_3; \\ C_2 &= -\gamma \varphi(\beta a), & A_2 &= C_4; \\ C_3 &= -\left( G_1 + \frac{2\lambda}{8\beta^3 + \lambda} C_2 + \frac{\lambda\gamma}{8\beta^3 + \lambda} \right), & A_3 &= -C_1; \\ C_4 &= \frac{8\beta^3 - \lambda}{8\beta^3 + \lambda} C_2 - \frac{\lambda\gamma}{8\beta^3 + \lambda}, & A_4 &= C_2, \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

где  $\psi, \varphi$  — функции С. П. Тимошенко [3]:

$$\psi(\beta a) = \bar{e}^{\beta a} (\cos \beta a - \sin \beta a), \quad a = \frac{l}{a};$$

$$\varphi(\beta a) = \bar{e}^{\beta a} (\cos \beta a + \sin \beta a).$$

При  $\lambda \rightarrow 0$  получаем решение гладкой оболочки [3]. При  $\lambda \rightarrow \infty$  получаем решение для оболочки, подкрепленной нерастяжимым шпангоутом [3].

При  $\lambda \neq 0$  и ограниченном полученное решение совпадает с решением в работе [6].

Теперь получим решение (33) с помощью замены  $\delta$ -функции некоторой  $\delta$ -образной функцией.

Известно [2], что  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon}{\xi^2 + \varepsilon^2} = \delta(\xi)$ . Тогда уравнение (33) принимает вид:

$$\frac{d^4 w}{d\xi^4} + \left( \beta^4 + \frac{\lambda}{h_*^2} \cdot \frac{\varepsilon}{\xi^2 + \varepsilon^2} \right) w = \frac{\gamma}{h_*^2}. \quad (39)$$

Решение (39) будем искать методом Фубини [7]. Для этого (39) запишем в виде

$$\frac{d^4 w}{d\xi^4} + \beta^4 w = \frac{\gamma}{h_*^2} - \frac{\lambda}{h_*^2} \cdot \frac{\varepsilon}{\xi^2 + \varepsilon^2} w. \quad (40)$$

Решение (40) ищем методом вариации постоянных. Пусть

$$w = C_m w_m = \sum_{m=1}^4 C_m w_m$$

есть решение (34).

Повторяющийся индекс будет означать суммирование от одного до четырех:

$$\frac{dw}{d\xi} = C_m w'_m + C'_m w_m; \quad C'_m w_m = 0; \quad (41)$$

$$\frac{d^2 w}{d\xi^2} = C_m w''_m + C'_m w'_m; \quad C'_m w'_m = 0; \quad (42)$$

$$\frac{d^3 w}{d\xi^3} = C_m w'''_m + C'_m w''_m; \quad C'_m w''_m = 0; \quad (43)$$

$$\frac{d^4 w}{d\xi^4} = C_m w^{IV}_m + C'_m w'''_m.$$

Подставляя вышенаписанное в (40), получим

$$C_m w^{IV}_m + C'_m w'''_m + \beta^4 C_m w_m = \gamma - \psi(\xi, \varepsilon) C_m w_m$$

или, учитывая, что  $w = C_m w_m$  есть решение (34), это можно записать в виде

$$C'_m w'''_m = -\psi(\xi, \varepsilon) C_m w_m. \quad (44)$$

Уравнения (40–44) составляют систему алгебраических уравнений относительно производных  $C'_m(\xi)$ . Введем обозначения:

$$\left. \begin{aligned} w_m &= V_{m1}; \\ w'_m &= V_{m2}; \\ w''_m &= V_{m3}; \\ w'''_m &= V_{m4}. \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

Тогда систему уравнений (40–44) можно записать в компактном виде:

$$C'_m V_{mk} = b_k; \quad m, k = 1, 2, 3, 4 \quad (\text{по } m \text{ — суммирование}), \quad (46)$$

где

$$b_1 = b_2 = b_3 = 0; \quad b_4 = -\psi(\xi, \varepsilon) C_m w_m = -\frac{\lambda}{h_*^2} \cdot \frac{\varepsilon}{\xi^2 + \varepsilon^2} C_m w_m.$$

Умножим (46) на алгебраическое дополнение  $G_{kn}$  к элементу  $V_{nk}$  в определителе  $\Delta = |V_{nk}|$  и просуммируем по  $k$  от 1 до 4;

$$C'_m V_{mk} G_{kn} = b_k G_{kn},$$

но, как известно,  $V_{mk} G_{kn} = \Delta \delta_{mn}$ , где  $\delta_{mn}$  — символ Кронекера.

Поскольку  $\Delta$  есть вронскиан функции  $w$ , то он отличен от нуля. Тогда можно записать решение (46) в виде

$$C'_n = \frac{b_k G_{kn}}{\Delta} = -\frac{\psi(\xi, \varepsilon) C_m(\xi, \varepsilon) w_m(\xi) G_{4n}(\xi)}{\Delta(\xi)}. \quad (47)$$

Из (47) получим:

$$C_n(\xi, \varepsilon) = k_n - \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{\psi(t, \varepsilon) C_m(t, \varepsilon) w_m(t) G_{in}(t)}{\Delta(t)} dt. \quad (48)$$

Умножим (48) на  $w_n(\xi)$  и просуммируем по  $n$ :

$$C_n(\xi, \varepsilon) w_n(\xi) = k_n w_n(\xi) - \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{\psi(t, \varepsilon) C_m(t, \varepsilon) w_m(t) G_{in}(t) w_n(\xi)}{\Delta(t)} dt$$

или

$$w(\xi, \varepsilon) = k_n w_n(\xi) - \int_{\xi_0}^{\xi} L(\varepsilon, t, \xi) w(\xi, t) dt, \quad (49)$$

где  $k_n$  — произвольные постоянные;

$$L(\varepsilon, t, \xi) = \frac{\psi(t, \varepsilon) G_{in}(t) w_n(\xi)}{\Delta(t)}. \quad (50)$$

Уравнение (49) представляет собой интегральное уравнение типа Вольтерра, которое легко решается методом последовательных приближений [8]. Решение (49) дает решение краевой задачи для уравнения (40). Тогда решение (33) получим с помощью предельного перехода:

$$w(\xi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} w(\xi, \varepsilon), \quad (51)$$

где  $w(\xi, \varepsilon)$  есть решение (49).

Конечно, в случае одного ребра нет смысла использовать вышеописанный метод, но если ребер много, т. е. необходимо сопрягать решения для многих областей, то указанный путь может оказаться целесообразнее, поскольку решение получается для всей области сразу.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Новожилов В. В. Теория тонких оболочек, Л. Судпромгиз, 1962.
2. Гельфанд И. М. и Шиллов Г. Е. Обобщенные функции и действия над ними. М., Физматгиз, 1959.
3. Тимошенко С. П. и Войновский-Кригер. Пластины и оболочки. М., Физматгиз, 1963.
4. Шнелль В. Определение усилий в подкрепленных цилиндрических оболочках. Ч. 1 «Механика» (сб. переводов иностр. статей). ИЛ, № 4 (50), 1958.
5. Шнелль В. Определение усилий в подкрепленных цилиндрических оболочках. Ч. 2 «Механика» (сб. переводов иностр. статей). ИЛ, № 4 (50), 1958.
6. Каплан Ю. И. Расчет осесимметричного напряженного состояния цилиндрических оболочек при наличии дискретно расположенных упругих шпангоутов. «Известия высших учебных заведений», серия «Авиационная техника», 1963, № 4.
7. Трикоми Ф. Дифференциальные уравнения. М., ИЛ, 1962.
8. Ловитт. Линейные интегральные уравнения. М., ГТТИ, 1957.