ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ ДЕФОРМАЦИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ, ПОДКРЕПЛЕННОЙ ШПАНГОУТАМИ

П. А. ЖИЛИН

(Ленинград)

Рассматривается цилиндрическая оболочка, подкрепленная шпангоутами, расположенными на произвольном расстоянии один от другого и имеющими различные геометрические и упругие характеристики. Решение строится на основе метода Стеклова—Фубини [1]. Уравнения равновесия ребристой оболочки получены в [2]. Обозначения, используемые в данной статье, совпадают с обозначениями В. В. Новожилова [3].

Уравнения равновесия имеют вид

$$\frac{dT_1}{d\xi} = -aq_1, \qquad T_2 - \frac{1}{a}\frac{d^2M_1}{d\xi^2} = aq_3, \qquad (\xi_0 \leqslant \xi \leqslant \xi_{n+1}) \tag{1}$$

Соотношения упругости

$$T_1 = B(\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2), \qquad T_2 = B\left[\varepsilon_2 + \nu\varepsilon_1 + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \delta(\xi - \xi_k)\varepsilon_2\right], \qquad M_1 = D\varkappa_1 \tag{2}$$

Связь между компонентами деформации и перемещениями

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{a}\frac{du}{d\xi}, \quad \varepsilon_2 = \frac{w}{a}, \quad \varkappa_1 = -\frac{1}{a^2}\frac{d^2w}{d\xi^2}, \quad \varkappa_2 = 0 \quad \left(\xi = \frac{l}{a}, \quad \lambda_k = \frac{E_kF_k}{aB}\right) \tag{3}$$

Здесь a — радиус оболочки, $\delta(\xi - \xi_k)$ — дельта-функция Дирака, ξ_k — координата расположения k-го шпангоута, l — расстояние вдоль меридиана, λ_k — относительная жесткость k-го шпангоута на растяжение, n — число шпангоутов.

Из уравнения (1) имеем

$$T_1 = \frac{B}{a}\left[\frac{du}{d\xi} + (1+\nu)w\right] = C_2 - \int_{\xi_0}^{\xi} aq_1 d\xi \tag{4}$$

Подставляя (3), (2) в (1) и исключая при помощи (4) компоненту перемещения u, получим разрешающее уравнение относительно w

$$h_*^2 \frac{d^4w}{d\xi^4} + \left[1 - \nu^2 + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \delta(\xi - \xi_k)\right] w = \gamma \tag{5}$$

$$\gamma = \frac{a^2}{B}\left[q_3 - \nu\left(\frac{C_1}{a} - \int_{\xi_0}^{\xi} q_1 d\xi_1\right)\right], \qquad h_*^2 = \frac{D}{a^2B} = \frac{h^2}{12a^2}$$

Считаем, что решение для гладкой оболочки ($\lambda_k = 0$) под заданной нагрузкой q_1, q_3 известно. Обозначим его через w_0. Представим общее решение задачи в виде

$$w = w_0 + w_1 \tag{6}$$

Тогда для w_1 получим уравнение

$$h_*^2 \frac{d^4w_1}{d\xi^4} + (1-\nu^2)w_1 = -\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \delta(\xi - \xi_k)(w_0 + w_1) \tag{7}$$

Решение уравнения (7) ищем в виде

$$w_1(\xi) = \varphi_k(\xi)v_k(\xi) \qquad (k = 0, 1, 2, 3) \tag{8}$$

Здесь и ниже дважды повторяющийся индекс означает суммирование от 0 до 3; $\varphi_k(\xi)$ — четыре неизвестные функции, $v_k(\xi)$ — четыре линейно-независимых решения уравнения

$$\frac{d^4v_k}{d\xi^4} + \frac{1-\nu^2}{h_*^2} v_k = 0 \tag{9}$$

Как известно [4], всегда можно выбрать решения уравнения (9) так, чтобы они обладали следующими свойствами:

$$\frac{dv_k}{d\xi} = v_{k-1} \quad (k = 1, 2, 3), \qquad \frac{dv_0}{d\xi} = -\frac{1-\nu^2}{h_*^2} v_3, \qquad v_k^i(\xi_0) = \delta_k^i$$

Здесь и ниже, если противное не оговорено, верхний индекс обозначает производную

$$v_k{}^i \equiv \frac{d^i v_k}{d\xi^i} \quad \left(\begin{array}{c}\text{по } i \text{ не суммировать}\\ i,\ k=0,1,2,3\end{array}\right), \quad v_k{}^\circ \equiv v_k, \qquad \delta_k{}^i = \begin{cases} 1 & (i=k)\\ 0 & (i\neq k)\end{cases}$$

Из (8) имеем

$$w_1{}^i(\xi) = \varphi_k(\xi)\, v_k{}^i(\xi) \qquad (i = 0, 1, 2, 3) \tag{10}$$

при условии, что $\varphi_k(\xi)$ удовлетворяют требованию

$$\varphi_k{}^1(\xi)\, v_k{}^i(\xi) = 0 \qquad (i = 0, 1, 2) \tag{11}$$

Четвертая производная от $w_1(\xi)$ имеет вид

$$w_1{}^4(\xi) = \varphi_k v_k{}^4 + \varphi_k{}^1 v_k{}^3$$

Подставляя это выражение в (7), получим

$$\varphi_k{}^1(\xi)\, v_k{}^3(\xi) = -\frac{1}{h_*{}^2}\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \delta(\xi - \xi_k)\,[w_i(\xi) + w_1(\xi)] \tag{12}$$

Из системы четырех уравнений (11), (12) легко определить неизвестные функции $\varphi_p{}^1(\xi)(p = 0, 1, 2, 3)$

$$\varphi_p{}^1 = -\frac{1}{h_*{}^2}\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \delta(\xi - \xi_k)\ [w_0(\xi) + w_1(\xi)]\ \frac{G_3{}^p(\xi)}{V(\xi)]} \tag{13}$$

Здесь $V(\xi) \equiv |v_k{}^i|$ — вронскиан функций $v_k(\xi)$, а $G_3{}^p(\xi)$ — алгебраическое дополнение к элементу $v_p{}^3(\xi)$; верхний индекс у $G_3{}^p(\xi)$ не обозначает производной.

Интегрируя (13), имеем

$$\varphi_p(\xi) = K_p - \frac{1}{h_*{}^2}\int_{\xi_0}^{\xi}\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \delta(t - \xi_k)\,[w_0(t) + w_1(t)]\,\frac{G_3{}^p(t)}{V(t)}\,dt \tag{14}$$

где K_p $(p = 0, 1, 2, 3)$ — произвольные постоянные.

Умножая (14) на $v_p(\xi)$ и суммируя от 0 до 3, получим

$$w_1(\xi) = \varphi_p(\xi)\, v_p(\xi) = K_p v_p(\xi) -$$

$$-\frac{1}{h_*{}^2}\int_{\xi_0}^{\xi}\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \delta(t - \xi_k)\,[w_0(t) + w_1(t)]\,\frac{G_3{}^p(t)\, v_p(\xi)}{V(t)}\,dt \tag{15}$$

Итак, искомая функция $w_1(\xi)$ удовлетворяет интегральному уравнению (15), ядро которого содержит функцию Дирака. Это позволяет сразу же записать решение (15) в явном виде

$$w_1(\xi) = K_p v_p(\xi) - \frac{1}{h_*{}^2}\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \sigma(\xi - \xi_k)\,[w_0(\xi_k) + w_1(\xi_k)]\,\frac{G_3{}^p(\xi_k)\, v_p(\xi)}{V(\xi_k)} \tag{16}$$

$$\sigma(x) = \begin{cases} 1 & (x > 0)\\ 0 & (x < 0)\end{cases}$$

Из (16) имеем

$$w_1(\xi) = K_p v_p(\xi) \qquad (0 \leqslant \xi \leqslant \xi_1 - \varepsilon) \quad (\varepsilon > 0 \text{ — малая величина}) \tag{17}$$

$$w_1(\xi) = K_p v_p(\xi) - \frac{\lambda_1}{h_*{}^2}\,[w_0(\xi_1) + w_1(\xi_1)]\,\frac{G_3{}^p(\xi_1)\, v_p(\xi)}{V(\xi_1)}$$

$$(\xi_1 + \varepsilon \leqslant \xi \leqslant \xi_2 - \varepsilon) \tag{18}$$

В (18) вошло неизвестное число $w_1(\xi_1)$, но оно сразу же определяется, если записать формулу (18) в точке $\xi = \xi_1$ и учесть известный из теории определителей (см., например, [6], гл. 1) факт, что

$$\frac{G_3{}^p(\xi)\, v_p{}^i(\xi)}{V(\xi)} = \delta_3{}^i \qquad (i = 0, 1, 2, 3) \tag{19}$$

Учитывая это, из (17) сразу же получаем

$$w_1(\xi_1) = K_p v_p(\xi_1) \tag{20}$$

Продолжая этот процесс, для области

$$\xi_n - \varepsilon \leqslant \xi \leqslant \xi_{n+1}$$

получим

$$w_1(\xi) = K_p v_p(\xi) - \frac{1}{h_*^2} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k [w_0(\xi_k) + w_1(\xi_k)] \frac{G_3^p(\xi_k) v_p(\xi)}{V(\xi_k)} \tag{21}$$

Записав (21) в точке $\xi = \xi_n$ и учтя (19), получим

$$w_1(\xi_n) = K_p v_p(\xi_n) - \frac{1}{h_*^2} \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k [w_0(\xi_k) + w_1(\xi_k)] \frac{G_3^p(\xi_k) v_p(\xi_n)}{V(\xi_k)} \tag{22}$$

где все числа $w_1(\xi_k)$ $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$ уже известны.

Выражения (17)—(19) являются частными случаями выражения (16), которое дает нам решение во всей области.

Остается проверить, что решение в форме (16) удовлетворяет требованию непрерывности вместе с первыми двумя производными, а его третья производная терпит разрыв (см. [2]) на линиях $\xi = \xi_k$, т. е. на шпангоутах терпит разрыв перерезывающая сила.

Для этой цели найдем нужные производные; при этом будем исходить из выражения (15)

$$w_1^1(\xi) = K_p v_p^1(\xi) - \frac{1}{h_*^2} \int_{\xi_0}^{\xi} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \delta(t - \xi_k) [w_0(t) + w_1(t)] \frac{G_3^p(t) v_p^1(\xi)}{V(t)} dt -$$

$$- \frac{1}{h_*^2} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \delta(\xi - \xi_k) [w_0(\xi) + w_1(\xi)] \frac{G_3^p(\xi) v_p(\xi)}{V(\xi)} = \tag{23}$$

$$= K_p v_p^1(\xi) - \frac{1}{h_*^2} \int_{\xi_0}^{\xi} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \delta(t - \xi_k) [w_0(t) + w_1(t)] \frac{G_3^p(t) v_p^1(\xi)}{V(t)} dt$$

Последняя сумма в (23) исчезла в силу (19).

Из (23) видно, что $w_1^1(\xi)$ нигде не обращается в бесконечность, т. е. сама функция $w_1(\xi)$ непрерывна во всей области.

Аналогично с использованием (19) получим выражение для второй производной

$$w_1^2(\xi) = K_p v_p^2(\xi) - \frac{1}{h_*^2} \int_{\xi_0}^{\xi} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \delta(t - \xi_k) [w_0(t) + w_1(t)] \frac{G_3^p(t) v_p^2(\xi)}{V(t)} dt \tag{24}$$

из которого следует, что первая производная непрерывна.

Третья производная имеет вид

$$w_1^3(\xi) = K_p v_p^3(\xi) - \frac{1}{h_*^2} \int_{\xi_0}^{\xi} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \delta(t - \xi_k) [w_0(t) + w_1(t)] \frac{G_3^p(t) v_p^3(\xi)}{V(t)} dt \tag{25}$$

т. е. вторая производная непрерывна

$$w_1^4(\xi) = K_p v_p^4(\xi) - \frac{1}{h_*^2} \int_{\xi_0}^{\xi} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \delta(t - \xi_k) [w_0(t) + w_1(t)] \frac{G_3^p(t) v_p^4(\xi)}{V(t)} dt -$$

$$- \frac{1}{h_*^2} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \delta(\xi - \xi_k) [w_0(\xi) + w_1(\xi)] \frac{G_3^p(\xi) v_p^3(\xi)}{V(\xi)}$$

Но из (19) имеем

$$\frac{G_3^p(\xi) v_p^3(\xi)}{V(\xi)} = 1$$

Следовательно,

$$w_1^4 = K_p v_p^4(\xi) - \frac{1}{h_*^2}\int_{\xi_0}^{\xi}\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\delta(t-\xi_k)[w_0(t)+w_1(t)]\frac{G_3^p(t)\,v_p^4(\xi)}{V(t)}dt -$$

$$-\frac{1}{h_*^2}\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\delta(\xi-\xi_k)[w_0(\xi)+w_1(\xi)] \qquad (26)$$

Из (26) следует, что $w_1^3(\xi)$ терпит разрыв на линиях $\xi=\xi_k$ $(k=1,\ldots,n)$, т. е. на шпангоутах.

Найдем, чему равен скачок в третьих производных на линиях $\xi=\xi_k$.

Для этого проинтегрируем (26) в пределах от $\xi_m-\varepsilon$ до $\xi_m+\varepsilon$, где $\varepsilon>0$ — малая величина, и найдем предел при $\varepsilon\to 0$.

В результате получим

$$w_1^3(\xi_m+0) - w_1^3(\xi_m-0) = -\frac{\lambda_m}{h_*^2}[w_0(\xi_m)+w_1(\xi_m)] \qquad (27)$$

(по m не суммировать!)

Это же выражение для скачка в третьих производных на m-м шпангоуте можно получить из (25), если воспользоваться формулами типа (16).

Итак, полученное решение (15) или (16) удовлетворяет всем необходимым требованиям и дает решение поставленной задачи сразу во всей области, избавляя от необходимости строить матрицы переноса [7].

Это решение легко использовать и для несимметричной деформации, если воспользоваться теми же допущениями, которые использованы в [7], поскольку в этом случае разрешающее уравнение будет отличаться от (5) только коэффициентом при функции w, что, разумеется, несущественно.

Более того, вышеописанный метод распространяется и на общий случай несимметричной деформации цилиндрической оболочки, подкрепленной шпангоутами, и даже на случай несимметричной деформации произвольной оболочки вращения, подкрепленной шпангоутами, поскольку метод Стеклова—Фубини применим и для систем с переменными коэффициентами.

Поступило 30 III 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Трикоми Ф. Дифференциальные уравнения. Изд. иностр. лит., 1962.
2. Жилин П. А. К анализу краевых задач для ребристых оболочек. Прочность гидротурбин. Сб. тр. Центр. котлотурб. ин-та им. И. И. Ползунова, 1966, № 72.
3. Новожилов В. В. Теория тонких оболочек. Судпромгиз, 1962.
4. Крылов А. Н. О расчете балок, лежащих на упругом основании. Изд-во АН СССР, 1930.
5. Гельфанд И. М. и Шилов Г. А. Обобщенные функции и действия над ними. Физматгиз, 1959.
6. Мак-Коннел А. Дж. Введение в тензорный анализ с приложениями геометрии, механики и физики. Физматгиз, 1963.
7. Шнелль В. Определение усилий в подкрепленных круговых цилиндрических оболочках, ч. I и II. Механика. Сб. перев. и обз. ин. период. лит., 1953, № 4 (50).

ОБ ОДНОЙ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ИЗОТРОПНОЙ КУСОЧНО-ОДНОРОДНОЙ СРЕДЫ

Н. М. КРЮКОВА *(Москва)*

Изучению напряженного состояния в изотропных однородных и кусочно-однородных средах посвящена обширная литература, которую можно найти в соответствующих монографиях.

В настоящей статье рассматривается поле напряжений в кусочно-однородной среде.

§ 1. Предположим, что упругая, изотропная и неоднородная среда заполняет плоскость комплексного переменного $z=x+iy$, состоящую из областей S и S_1, S_2, S_3; при этом S — бесконечная трехсвязная область, ограниченная окружностями L_1, L_2, L_3, а S_1, S_2, S_3 — конечные односвязные области, внутренние к L_1, L_2, L_3. Далее предположим, что материал, заполняющий каждую из сред S и S_1, S_2, S_3, однороден, но его упругие свойства изменяются при переходе из одной среды в другую.