УДК 531.01

ЭЛЕМЕНТАРНЫЙ ВЫВОД ФОРМУЛЫ ЭЙЛЕРА

© А.В. Костарев
Санкт - Петербургский государственный политехнический университет. Санкт-Петербург, Россия

Аннотация. *Предложено два простых вывода формулы Эйлера $\dot{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{a}$, основанных на свойстве ортогональности вектора в теле $\boldsymbol{a}$ и его производной $\dot{\boldsymbol{a}}$.*

Ключевые слова: *кинематика твердого тела, вектор в теле, угловая скорость, формула Эйлера.*

В курсах теоретической механики центральная формула кинематики твердого тела (формула Эйлера) $\dot{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{a}$, выводится несколькими трудоемкими способами: из теоремы Эйлера о конечном повороте [1 – 7], координатным способом [8], через кватернион [9], через матрицу тензора поворота твердого тела [10], или просто обобщается на свободное движение из частного случая вращения тела вокруг неподвижной оси [11 - 14]. Поиск лаконичного, но строгого вывода формулы Эйлера для свободного твердого тела остается актуальным.

1. Матричный способ

Вектором в теле назовем любой вектор **a**, соединяющий две точки твердого тела. Все векторы в теле постоянны по модулю и изменяют только свое направление, поворачиваясь вместе с телом.

Очевидно, что столбец проекций вектора **a** на оси неподвижной системы

$$a = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad (1.1)$$

можно связать со столбцом проекций его производной

$$\dot{a} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \qquad (1.2)$$

бесчисленным множеством матриц 3x3 Ω.

$$\dot{a} = \Omega a \qquad \Omega = \begin{pmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} & \omega_{13} \\ \omega_{21} & \omega_{22} & \omega_{23} \\ \omega_{31} & \omega_{32} & \omega_{33} \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

Покажем, что среди этого множества матриц Ω (1.3) существует единственная, общая для всех векторов в теле, матрица.

Поскольку производная по времени от вектора постоянного модуля перпендикулярна самому вектору, то

$$\boldsymbol{a} \cdot \dot{\boldsymbol{a}} = a^T \dot{a} = a^T \Omega\, a = 0 \qquad (1.4)$$

Итак

$$(x \quad y \quad z) \begin{pmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} & \omega_{13} \\ \omega_{21} & \omega_{22} & \omega_{23} \\ \omega_{31} & \omega_{32} & \omega_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} =$$

$$= x^2\omega_{11} + y^2\omega_{22} + z^2\omega_{33} + xy(\omega_{12} + \omega_{21}) + yz(\omega_{23} + \omega_{32}) + zx(\omega_{31} + \omega_{13}) = 0 \quad (1.5)$$

Чтобы матрица Ω не зависела от вектора в теле, все коэффициенты при проекциях вектора с необходимостью должны быть равны нулю.

$$\omega_{11} = \omega_{22} = \omega_{33} = 0$$

$$\omega_{21} = -\omega_{12} = \omega_z \qquad \omega_{32} = -\omega_{23} = \omega_x \qquad \omega_{13} = -\omega_{31} = \omega_y \qquad (1.6)$$

Здесь введены обозначения трех ненулевых элемента матрицы по образцу присоединенной матрицы вектора.

Таким образом, для твердого тела действительно существует единственная матрица Ω , удовлетворяющая соотношение (1.3) для всех векторов в теле. Найденная матрица характеризует вращение тела, и ее следует назвать ***матрицей угловой скорости***

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix} \qquad (1.7)$$

Элементы ω_{mn} матрицы (1.7) имеют простой геометрический смысл. Элементы являются проекциями скорости конца орта с первым индексом при его вращении вокруг орта со вторым индексом по правилу правого винта. Так

$$\omega_{12} = -\omega_z \qquad (1.8)$$

есть скорость конца орта **i** вдоль оси z при его вращении вокруг оси y. Понятно, почему элементы с повторяющимися индексами равны нулю.

Таким образом, для любого вектора в теле справедлива ***матричная формула Эйлера***

$$\dot{a} = \Omega a \qquad (1.9)$$

Из трех элементов кососимметричной матрицы Ω можно составить столбец сопутствующего ***вектора угловой скорости тела***

$$\omega = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \qquad (1.10)$$

Теперь формуле (1.9) можно сопоставить **векторную формулу Эйлера**

$$\dot{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{a} \qquad (1.11)$$

2. Координатный способ

Продифференцируем по времени разложение произвольного вектора в теле **a** по осям, связанным с телом

$$\boldsymbol{a} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} \qquad (2.1)$$

При движении тела проекции вектора неизменны, а орты изменяют только свое направление.

$$\dot{\boldsymbol{a}} = x(\boldsymbol{i})^\bullet + y(\boldsymbol{j})^\bullet + z(\boldsymbol{k})^\bullet \qquad (2.2)$$

Поскольку орты являются векторами в теле, то их производные лежат в плоскостях, перпендикулярных самим ортам.

$$(\boldsymbol{i})^\bullet = \omega_{21}\boldsymbol{j} + \omega_{31}\boldsymbol{k} \qquad (\boldsymbol{j})^\bullet = \omega_{32}\boldsymbol{k} + \omega_{12}\boldsymbol{i} \qquad (\boldsymbol{k})^\bullet = \omega_{13}\boldsymbol{i} + \omega_{23}\boldsymbol{j} \qquad (2.3)$$

Здесь первый индекс проекций ω_{mn} есть номер оси проектирования, второй - номер проектируемого орта.

Подставив производные (2.3) в формулу (2.2), получим

$$\boldsymbol{a}^\bullet = (\omega_{12}y + \omega_{13}z)\boldsymbol{i} + (\omega_{23}z + \omega_{21}x)\boldsymbol{j} + (\omega_{31}x + \omega_{32}y)\boldsymbol{k} \qquad (2.4)$$

Из условия ортогональности $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{a}^\bullet$ находим

$$xy(\omega_{12} + \omega_{21}) + yz(\omega_{23} + \omega_{32}) + zx(\omega_{31} + \omega_{13}) = 0 \qquad (2.5)$$

Поскольку вектор $\boldsymbol{a}$ произволен, то все скобки в этом выражении с необходимостью равны нулю. В обозначениях (1.6) имеем:

$$\boldsymbol{a}^\bullet = \left(-\omega_z y + \omega_y z\right)\boldsymbol{i} + (-\omega_x z + \omega_z x)\boldsymbol{j} + \left(-\omega_y x + \omega_x y\right)\boldsymbol{k} \qquad (2.6)$$

Видим, что столбцы вектора в теле

$$a = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad (2.7)$$

и его производной

$$\dot{a} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \qquad (2.8)$$

связаны ***матричной формулой Эйлера***

$$\dot{a} = \Omega a \qquad \Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

которой соответствует ***векторная формула Эйлера***

$$\dot{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{a} \qquad (2.10)$$

Литература

1. Лурье А.И. Аналитическая механика. − М.: Физматлит, 1961. − 824с.
2. Лойцянский Л.Г., Лурье А.И. Курс теоретической механики, т.1. −М.: Наука, 1982. −352с.
3. Маркеев А.П. Теоретическая механика. − М.: Наука, 1990. − 414с.
4. Никитин Н.Н. Курс теоретической механики. − М.: Высшая школа, 2003, − 719с.
5. Thornton M. Classical dynamics. − Saunders college publishing. 1995. − 638 p.
6. Курс теоретической механики. // Под ред. Колесникова К.С. − М.: МГТУ, 2000. − 735с.
7. Ginsberg J.H., Genin J. Dynamics. − John Willey & sons, Inc. 1997 − 553 p.
8. Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р. Курс теоретической механики. − СПб: Лань, 1998. − 729с
9. Журавлев В.Ф. Основы теоретической механики. − М.: Наука. Физматлит, 1977.− 320с.
10. Костарев А.В. Угловая скорость тела. Формула Эйлера. URL: http://www.spbstu.ru/phmech/ThM/pdf/6MM.doc − (дата обращения: 30.06.2010).
11. Гернет М.М. Курс теоретической механики. − М.: Высшая школа.1987. − 344 с.
12. Meriiam J.L., Kraige L.G. Engineering mechanics. V.2 − John Willey & sons, Inc. 1993. − 717 p.
13. Sandor B.I., Richter K.J. Engineering mechanics. Statics and Dynamics. − Prentice-hall. 1987. − 928 p.
14. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. − М.: Наука, 1967. − 478с.