УДК 531.01

СТАТИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА БЕЗ АКСИОМ СТАТИКИ

А.В.Костарев
Санкт - Петербургский государственный политехнический университет.
Санкт – Петербург, Россия

Аннотация *Предлагается изложение статики твердого тела на основе принципов Ньютона, понятия определимых связей и теоремы об эквивалентности систем сил.*

Ключевые слова: *твердое тело****,*** *статика, определимые связи, эквивалентность сил.*

Традиционные курсы Теоретической механики [1-7], в которых изложение начинается со статики, опираются на так называемые «аксиомы статики». Покажем, что принципы Ньютона и понятие определимых связей позволяют получить и условия равновесия и правила эквивалентного преобразования систем сил, приложенных к твердому телу без аксиом статики. Ниже конспективно приведены основные моменты изложения.

Курс статики твердого тела занимает 4 лекции и строится следующим образом. После первой лекции «Алгебра сил», в которой излагаются понятия силы, проекции, составляющих, теория моментов, следуют

Принципы (аксиомы) механики.

1. ***Принцип инерции Галилея.***
2. ***Основной принцип (второй закон Ньютона)***
3. ***Принцип внутренней аддитивности*** *(третий закон Ньютона).*
   Следствие- Внутренние силы парны, значит их главный вектор и главный момент равны нулю. $\mathbf{V}^{\mathbf{i}} = \mathbf{0}$, $\mathbf{M}^{\mathbf{i}}_{\mathbf{O}} = \mathbf{0}$
4. ***Принцип внешней аддитивности*** *(правило сложения сил)*
   Следствие: Необходимое и достаточное условие равновесия сил, приложенных к точке: $\sum\mathbf{F}_k=\mathbf{0}$

Из принципов Ньютона вытекают **необходимые условия равновесия внешних сил.** Рассмотрим дискретную систему **n** материальных точек. Система находится в покое, если все ее точки находятся в покое. При этом силы, действующие на каждую точку, находятся в равновесии.

Обозначим через $\mathbf{F}_\mathbf{k}^\mathbf{e}$ равнодействующую внешних сил, приложенных к точке с номером **к**, а через $\mathbf{F}_\mathbf{k}^\mathbf{i}$- равнодействующую внутренних сил этой точки. Из аксиом вытекает, что условия

$$\mathbf{F}_k^e+\mathbf{F}_k^i=\mathbf{0} \qquad (k=1,2,\ldots,n), \qquad (1)$$

обеспечивают покой системы и являются ***необходимыми и достаточными условиями*** равновесия сил, приложенных к произвольной дискретной механической системе.

Суммируя (1) по k, и учитывая, что главный вектор внутренних сил равен нулю, получаем

$$\mathbf{V}^e=\mathbf{0}$$

Векторно умножив слева (1) на радиус-вектор точки $\mathbf{r}_\mathbf{k}$, после суммирования получим второе условие

$$\mathbf{M}_o^e=\mathbf{0}$$

Условия для внешних сил системы

$$\mathbf{V}^e=\mathbf{0} \quad \mathbf{M}_o^e=\mathbf{0} \qquad (2)$$

с ***необходимостью*** выполнены, если произвольная механическая система покоится. Систему внешних сил, удовлетворяющую условиям (2), назовем ***уравновешенной системой.*** Факт неподвижности системы превращает выражения (2) в уравнения для определения неизвестных сил. Таковыми в статике чаще всего являются реакции связей.

Далее вводится понятие **определимых связей.** Рассмотрим тело Т, находящееся в покое под действием удаленных тел, и неподвижных тел, находящихся с телом в контакте, и называемых ***связями***. Силы, с которыми связи действуют на тело, называются ***реакциями связи.*** Они неизвестны, поскольку согласно второму принципу нельзя одновременно задать и перемещение (его отсутствие) и силу в точке контакта.

Пусть на тело наложены **достаточные** связи, обеспечивающие его покой при произвольной нагрузке. Поскольку тело остается в покое, то с необходимостью выполняются условия равновесия внешних сил:

$$\mathbf{V}^{e} = \mathbf{V}^{eR} + \mathbf{V}^{ea} = \mathbf{0}; \qquad \mathbf{M}_{o}^{e} = \mathbf{M}_{o}^{eR} + \mathbf{M}_{o}^{ea} = \mathbf{0}$$

Откуда

$$\mathbf{V}^{eR} = -\mathbf{V}^{ea}; \quad \mathbf{M}_{o}^{eR} = -\mathbf{M}_{o}^{ea} \qquad (3)$$

Где индексом R обозначены искомые реакции связей, а индексом а – нагрузка.

В проекциях на оси x,y,z два векторных условия (3) дают шесть алгебраических уравнений для реакций связей, которые можно представить в матричном виде

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{y} \qquad \mathbf{(4)}$$

Здесь A- матрица системы, зависящая только от устройства связей, x- столбец искомых реакций связей, у – столбец нагрузки. Как известно, алгебраическая система имеет единственное решение только если матрица A квадратная (6х6), т.е. уравнения имеют шесть неизвестных и определитель матрицы отличен от нуля.

$$|A| \neq 0 \qquad (5)$$

Связи с такой матрицей A называются ***статически определимыми*** (или коротко ***определимыми)***. Заметим, что это же условие (5) обеспечивает тривиальность решения однородной системы

$$\boldsymbol{Ax} = \mathbf{0} \qquad (6)$$

при отсутствии нагрузки. Это значит, что реакции определимых связей исчезают при снятии нагрузки.

Условие (5) означает, что в матрице A не должно быть линейно зависимых строк или столбцов. Строки независимы по ортогональности осей координат и независимости проекций и моментов. Зависимые столбцы могут появиться только, если две силы реакции окажутся на одной прямой или два момента реакции параллельны. Отсюда ***правило построения определимых связей***

Ставя новую связь, нужно позаботиться о том, чтобы ее реакция
не могла оказаться на одной прямой с реакциями предыдущих связей.

В классической статике рассматриваются только определимые связи.

Далее доказывается

Теорема: ***Условия***

$$\mathbf{V}\{\mathrm{F}\} = 0; \mathbf{M_o}\{\mathrm{F}\} = 0 \qquad (7)$$

являются достаточными для сохранения покоя твердого тела.

Рассмотрим ненагруженное свободное покоящееся твердое тело. Приложим к телу нагрузку **{F}**, удовлетворяющую условиям $\mathbf{V}\{\mathrm{F}\} = 0; \mathbf{M_o}\{\mathrm{F}\} = 0$

Докажем, что тело останется в покое. Предположим противное, т.е. что после приложения нагрузки **{F}**, тело все-таки начнет двигаться. Чтобы остановить движение, наложим на тело определимые связи. Тогда покой будет обеспечен связями. Значит объединенная система сил нагрузки **{F}** и реакций связей **{R}** будет уравновешенной и с необходимостью:

$$\mathbf{V\{F\}} + \mathbf{V}^{R} = \mathbf{0},$$

$$\mathbf{M}_o\{\mathbf{F}\} + \mathbf{M}_o^R = \mathbf{0}.$$

Но ввиду (7) главный вектор и момент реакций окажутся равными нулю

$$\mathbf{V}^R = \mathbf{0} \qquad \mathbf{M}_o^R = \mathbf{0}$$

Поскольку связи статически определимы, то отсюда вытекает, что все реакции равны нулю. Таким образом, связи не нужны, и тело остается в покое после приложения системы **{F}**. Значит условия (7) являются достаточными для равновесия системы сил **{F}**.

После этого доказывается **Теорема о статической эквивалентности систем сил.**

Нагрузки {**F**} и {**Q**} зафиксированного тела назовем ***статически эквивалентными***, если они вызывают одинаковые реакции связей.

$$\{\mathbf{F}\}\sim\{\mathbf{Q}\} \quad \text{если} \quad \{\mathbf{R}\}_F=\{\mathbf{R}\}_Q$$

Замена {**F**} на {**Q**} называется статически эквивалентным преобразованием {**F**}.

Реакции статически определимых связей однозначно определяются из уравнений равновесия. Поскольку в правых частях этих уравнения стоят проекции главного вектора и главного момента нагрузки, то справедлива ***теорема об эквивалентности нагрузок :***

Необходимым и достаточным условием статической эквивалентности нагрузок {F} и {Q} является равенство их главных векторов и главных моментов.

$$\{\mathbf{F}\}\sim\{\mathbf{Q}\} \longleftrightarrow \mathbf{V}\{\mathbf{F}\}=\mathbf{V}\{\mathbf{Q}\};\ \mathbf{M}_o\{\mathbf{F}\}=\mathbf{M}_o\{\mathbf{Q}\}$$

Из теоремы об эквивалентности естественным образом вытекают условия эквивалентного преобразования сил и пар в твердом теле, условия существования равнодействующей, теоремы Вариньона и Пуансо.

Литература

1. Лойцянский Л.Г., Лурье А.И. Курс теоретической механики, т.1. −М.: Наука, 1982. −352с.
2. Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р. Курс теоретической механики. − СПб: Лань, 1998. − 729с.
3. Никитин Н.Н. Курс теоретической механики. − М.: Высшая школа, 2003, − 719с.
4. Курс теоретической механики. // Под ред. Колесникова К.С. − М.: МГТУ, 2000. − 735с.
5. Яблонский А.А. Курс теоретической механики. Ч.II.–М.: Высшая школа, 1971.–488 с.
6. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. − М.: Наука, 1967. − 478с.
7. Гернет М.М. Курс теоретической механики. − М.: Высшая школа.1987. − 344 с.