Механико-математический факультет МГУ.

Олимпиады «Ломоносов» по механике для школьников 7–11 классов. Задачи и решения.

В брошюре приведены все задачи с решениями олимпиад по механике для школьников 7–11 классов, которые проводились на механико-математическом факультете МГУ имени М. В. Ломоносова.

Для учащихся старших классов, абитуриентов, преподавателей физики и математики.

Задачи составлены коллективом авторов–сотрудников механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Тексты задач и их решения подготовили сотрудники факультета.

Составители: М. В. Юмашев, Е.И. Могилевский

Научный редактор:

А. С. Зеленский

© Механико-математический факультет МГУ им. М. В. Ломоносова, 2010 г.

Содержание

1 Олимпиады по механике

У многих выпускников ведущих университетов в дипломе в графе специальность написано «механик». Коротко и ясно для тех, кто понимает. Но для большинства непосвященных слово «механик» — непонятное, потому что очень многозначное. На производстве есть должности главного механика и инженера-механика. Машины ремонтирую тоже механики. Школьникам знакома механика, как раздел физики, посвященный движению тел под действием гравитационных сил, упругих сил и сил трения.

Но та механика, которая является одной из двух специальностей на механико-математическом факультете МГУ и многих других вузов — совсем другое. Наша механика — это математическое моделирование широкого класса явлений окружающего мира средствами классической механики Ньютона.

Многие задачи механики, которые можно поставить, используя модели, возникшие еще во времена Ньютона, по сей день остаются актуальными, содержат интереснейшие нерешенные вопросы. Например, человек еще не научился воспроизводить в лабораторных условиях полет птицы, хотя практически все физические явления, сопровождающие этот процесс давно известны.

Механика и математическое моделирование лежит в основе таких научных направлений, как авиа- и судостроение, освоение космоса, энергетика, добыча полезных ископаемых, робототехника, разработка новых оборонительных вооружений.

Для того, чтобы не путать эту область знаний с техническими специальностями будем применять термин **фундаментальная механика**. Целью фундаментальной механики является детальное изучение возможностей существующих математических моделей, физическая интерпретация результатов решения математически поставленных задач, определение границ применимости используемых моделей.

Цель проведения олимпиады по механике: дать возможность школьникам понять суть этой науки, получить представление еще об одном направлении приложения своих интеллектуальных сил.

Задачи олимпиад по механике построены так, что элементы творческого мышления необходимо проявить на стадии математической формулировки задачи, понять необходимость и достаточность тех или иных приближений. После того, как задача математически сформулирована, ее решение потребует владения всем арсеналом математических знаний, доступных школьникам соответствующих классов.

Например, в 2009 году для учащихся 11-го класса предлагалась такая задача:

Шарик массой $m = 10$ г падает с большой высоты без начальной скорости. Численное значение силы сопротивления среды в ньютонах определяется формулой $|F| = 10^{-3}v^2$, где v — значение модуля скорости точки в метрах в секунду. Вычислите приближенно, за какое время точка пройдет первый сантиметр и первый километр пути? Принимаемые предположения обоснуйте.

Для "математика"решить данную задачу — это значит решить обыкновенное дифференциальное уравнение, что возможно, но требует довольно богатого математического аппарата (II курс мехмата). Для "механика"предлагается следующее решение.

Предположим, что на первом сантиметре пути сила сопротивления не существенна. Действительно, если бы ее совсем не было, то шарик приобрел бы скорость $V = \sqrt{2gh} \approx 0,45$ м/с (через h обозначен 1 сантиметр). При такой скорости сила сопротивления составляет $F = 2 \cdot 10^{-4}$ Н, что в 500 раз меньше силы тяжести. Таким образом, пользуясь формулой для скорости тела при свободном падении, получаем приближенно время, за которое шарик пролетит первый сантиметр $t = \sqrt{2h/g} \approx 0,045$ с.

С увеличением скорости растет сила сопротивления движению. Существует скорость V_1, с которой шарик может двигаться равномерно. Найдем ее:

$$mg = F \Rightarrow V_1 = 10 \text{ м/с}.$$

Такой скорости свободно падающее тело достигнет за одну секунду. То есть, за одну секунду тело разгоняется почти до скорости V_1 , и затем движется практически равномерно. Двигаясь со скоростью V_1, шарик пройдет один километр за 100 секунд. Видно, что время разгона много меньше этой величины. Таким образом, 100 секунд можно считать ответом.

Ответ: 0,045 с; 100 с.

Такого сорта задачи позволяют выявить особое механическое чутье — умение не только применить математику, но и формулировать наиболее простым образом математические постановки задач, возникающих в различных областях деятельности человека.

Часто задачи по математическому моделированию скорее похожи на описания жизненных ситуаций, чем на учебную задачу. Многие задачи механических олимпиад могут показаться сложными, но нет другого пути развития творческих способностей, как решать трудные задачи и получать от этого удовольствие.

Председатель методической комиссии олимпиады «Ломоносов» по механике, доцент М.В. Юмашев.

2 Олимпиада 2006 года

2.1 8 класс

Условия

1. Восьмиклассник Гаврила не любил чистить зубы и поплатился за это воспалением зубных нервов. Воспаленные нервы не позволяли мальчику пить воду, температура которой меньше 16°C, иначе зубы начинали болеть. Какое максимальное количество тающего льда может положить Гаврила в стакан с 200 г воды, температура которой равна 20°C так, чтобы, когда лед растает, напиток не вызвал зубной боли? Удельная теплоемкость воды 4200 Дж/(кг $\cdot$ град), удельная теплоемкость льда 2100 Дж/(кг $\cdot$ град), удельная теплота плавления льда 334 кДж/кг.

2. В тот момент, когда Гаврила положил лед в стакан (см. предыдущую задачу), уровень жидкости достиг края стакана. У мальчика возникли подозрения, что по мере таяния льда, содержимое стакана начнет переливаться через край. На сколько оправданы опасения мальчика. Обнаружил ли он лужицу на столе, когда лед растаял? Ответ обосновать.

3. В свободное от уроков время Гаврила любил заниматься легкой атлетикой. Его успехи в беге были не столь высоки, как у другого мальчика, который тренировался на том же самом стадионе. Гаврила заметил, что когда они стартуют одновременно и из одной точки и бегут в одну сторону, то его соперник, вырвавшись вперед, догоняет его в месте старта в тот момент, когда Гаврила успевает пробежать ровно два круга. На сколько процентов Гаврила в результате изнурительных тренировок должен увеличить скорость бега, чтобы его соперник смог его догнать в тот момент, когда он (Гаврила) успеет пробежать ровно четыре круга? Скорость бега на дистанции считать постоянной.

4. В морозный полдень Гаврила по дороге из школы домой купил маме в подарок к Женскому дню флакончик туалетной воды. Известно, что в первую минуту флакон отдает в окружающую среду $\frac{6}{25}$ того количества теплоты, которое в два раза превышает необходимое для того, чтобы заморозить содержимое флакона. В каждую следующую минуту в окружающую среду уходит количество теплоты на 50% меньше, чем в предыдущую. Замерзнет ли содержимое флакона, если Гавриле бежать до дома 10 минут?

5. Во время школьных каникул Гаврила экспериментировал с двумя жидкостями. Плотность первой жидкости была в два раза больше, чем второй. Мальчик взял одинаковые массы жидкостей в надежде получить новую жидкость со средней арифметической плотностью. Но измерения плотности показали иной результат. Какой? В каком отношении надо взять массы этих жидкостей, чтобы плотность смеси равнялась среднему арифметическому между плотностями данных жидкостей? Известно, что суммарный объем этих жидкостей после смешивания не меняется.

Решения

1. Введем обозначения: X — масса тающего льда, который Гаврила положил в стакан с водой; $M = 200$ г — масса воды в стакане; $t = 20°$C — температура воды в стакане; $T = 16°$C — предельная температура; $c = 4200$ Дж/(кг·град) — удельная теплоемкость воды; $e = 2100$ Дж/(кг·град) — удельная теплоемкость льда; $l = 334$ кДж/кг — удельная теплота плавления льда. Понятно, что, исходя из условия задачи, температура воды не должна быть меньше, чем 16°C, а максимальное количество льда определяется, как раз, условием, что температура достигнет предельной величины 16°C. Составим уравнение баланса тепла:

$$cM(t - T) = cX(T - 0) + Xl$$

(вода отдает тепло льду, за счет которого сначала лед тает и затем вода, полученная из льда нагревается до конечной температуры). Отсюда получим $X = \dfrac{cM(t - T)}{cT + l} \approx 8,4$ г

Ответ: не более $8,4$ г

2. Ответ на поставленный вопрос получим из двух важных физических законов. Во-первых, закон сохранения массы: масса льда равна массе воды, которая получится из этого льда, когда он растает. На языке математики это можно записать следующим образом:

$$\rho_1 V_1 = \rho V_2,$$

где ρ_1 — плотность льда, V_1 — объем льда, ρ — плотность воды, V_2 — объем полученной воды. Во-вторых, закон Архимеда, в виде условия плавания льда в воде, до того как лед начал таять:

$$\rho V' = \rho_1 V_1,$$

где V' — объем погруженной в воду части льда. Уровень воды в стакане с плавающим льдом определяется формулой $h_1 = \dfrac{V_0 + V'}{S}$, где V_0 — начальный объем воды в стакане безо льда, S — площадь поперечного сечения стакана. Уровень воды в стакане, после того как лед растаял, определяется формулой $h_2 = \dfrac{V_0 + V_2}{S}$.

Из сравнения приведенных выражений для объемов следует $V_2 = V'$, а значит, $h_1 = h_2$, т.е. уровень воды в стакане не изменится, когда лед растает.

Ответ: не обнаружит.

3. В тот момент времени, когда соперник догоняет Гаврилу, он пробегает расстояние на один круг больше, чем Гаврила. Сначала по условию задачи выполняются следующие условия

$$\begin{gathered}(v_1 - v_2)t = s_0,\\ v_2 t = 2s_0,\end{gathered} \tag{1}$$

где s_0 — длина круга, v_1 — скорость соперника, v_2 — скорость Гаврилы, t — время движения спортсменов от старта до момента встречи. Затем, после интенсивных тренировок:

$$\begin{gathered}(v_1 - v_2^{'})t^{'} = s_0,\\ v_2^{'} t^{'} = 4s_0,\end{gathered} \tag{2}$$

где $v_2^{'}$ — новая скорость Гаврилы, $t^{'}$ — новое время движения спортсменов от старта до момента встречи. Четыре приведенных уравнения содержат шесть неизвестных величин. Из такой системы уравнений нельзя найти все неизвестные величины, например, скорости движения спортсменов. Но отношение скоростей $\dfrac{v_2^{'}}{v_2}$ найти можно. Для этого, из первой системы уравнений получим

$$v_1 t = 3s_0.$$

Аналогично, из второй получим

$$v_1 t^{'} = 5s_0.$$

Поделим уравнение первое из этих уравнений на второеТогда получим

$$\frac{t}{t^{'}} = \frac{3}{5}.$$

Теперь поделим второе уравнение (1) на второе уравнение (2). Тогда с учетом отношения времен получим

$$v_2^{'} = 1,2v_2$$

Это означает, что скорость надо увеличить на 20%.

Ответ: на 20%

4. Обозначим буквой Q — количество теплоты, необходимое для того, чтобы содержимое флакона замерзло. Тогда в первую минуту в окружающую среду уйдет количество тепла $q_1 = \dfrac{6}{25}2Q = \dfrac{12}{25}Q$. Во вторую — $q_2 = \dfrac{6}{25}Q$, в третью — $q_3 = \dfrac{6}{25}\dfrac{Q}{2}$ и т.д., например, в десятую минуту — $q_{10} = \dfrac{1}{1600}Q$.

Теперь остается сложить все потери тепла $q_1 + q_2 + ... + q_{10} = \dfrac{1471}{1600}Q$ и убедиться, что полученный результат оказывается меньше, чем Q. Это значит, что содержимое флакона не замерзнет.

Ответ: успеет.

5. Исходя из определения плотности, для одинаковых масс первой и второй жидкости можно записать следующие соотношения:

$$m = \rho_1 V_1, \quad m = \rho_2 V_2,$$

где $\rho_1,\ \rho_2$ — плотности, а $V_1,\ V_2$ — объемы первой и второй жидкостей соответственно. После смешивания плотность смеси будет определяться следующей формулой:

$$\rho = \frac{2m}{V_1 + V_2}.$$

Выразим объемы из выражений для массы и подставим в определение плотности ρ, тогда после простых преобразований получим

$$\rho = \frac{2\rho_1\rho_2}{\rho_1 + \rho_2}.$$

Данная формула выражает плотность смеси через плотности каждой жидкости и называется средним гармоническим значением плотности.

Возьмем теперь разные массы жидкостей m_1 и m_2 соответственно. Теперь будем иметь для каждой жидкости $m_1 = \rho_1 V_1$ и $m_2 = \rho_2 V_2$ и для смеси $\rho = \dfrac{m_1 + m_2}{V_1 + V_2}$. Аналогично предыдущему действию выразим объемы и подставим их в последнюю формулу с учетом условия о том, что в результате должна получиться жидкость со средней арифметической плотностью. Тогда получим:

$$\frac{m_1 + m_2}{\dfrac{m_1}{\rho_1} + \dfrac{m_1}{\rho_1}} = \frac{\rho_1 + \rho_2}{2}.$$

Введем для простоты новые переменные $x = m_2/m_1$ и $y = \rho_2/\rho_1$. В таких переменных изучаемое уравнение после некоторых преобразований будет выглядеть значительно проще:

$$\frac{1 + x}{y + x} = \frac{1 + y}{2}.$$

После приведения этого уравнения к общему знаменателю и сокращения подобных членов с учетом того, что исходные жидкости по условию имеют разные плотности $(y \neq 1)$, окончательно получим искомый результат, простое условие $x = y$. Это значит, что в ответе на второй вопрос задачи отношение масс жидкостей должно равняться отношению их плотностей.

Ответ: $\rho = \dfrac{2\rho_1\rho_2}{\rho_1 + \rho_2}$; $m_2/m_1 = \rho_2/\rho_1$.

2.2 9 класс

Условия

1. В морозный полдень Гаврила по дороге из школы домой купил в аптеке пузырек дистиллированной воды для проведения химических опытов. Известно, что в первую минуту пузырек отдает в окружающую среду $\dfrac{6}{25}$ того количества теплоты, которое в два раза превышает необходимое для того, чтобы заморозить дистиллированную воду. В каждую следующую минуту в окружающую среду уходит количество теплоты на 50% меньше, чем в предыдущую. Успеет ли мальчик добежать до дома, пока содержимое флакона не замерзнет?

2. В протекторе колеса радиуса R автомобиля, движущегося со скоростью V, застрял камень. На какую максимальную высоту может подняться камень, внезапно вылетев из протектора?

3. Экипаж трансгалактического глиссера упустил сферический контейнер, полностью заполненный жидкостью, в которую погружено небольшое твердое тело. Как будет располагаться тело в объеме жидкости? Считать, что какие либо другие космические тела, способные оказывать на контейнер световое, гравитационное, электромагнитное и другие воздействия, отсутствуют.

4. Два лягушонка сидят рядом посреди пруда на большом листе кувшинки, оторвавшемся от растения. В каком случае лист кувшинки приобретает большую скорость — когда лягушата прыгнут одновременно или когда они будут прыгать последовательно? Считать, что лягушата прыгают в одном направлении и, оттолкнувшись, приобретают одинаковую скорость относительно листа. Сопротивлением воды пренебречь.

5. На соревнованиях мотодельтапланеристов все участники стартуют из одной точки, но двигаться должны в разных направлениях. Всем необходимо пролететь расстояние L и вернуться в исходную точку. Участник имеет право сам выбрать направление полета. Ветер дует с запада на восток. Имеет ли смысл участнику задуматься о том, какое направление полета выбрать, или правы организаторы соревнований, считая, что все находятся в равных условиях — те, кому ветер дует навстречу и мешает, будут в выигрышном положении при возвращении, когда ветер будет «дуть в спину» и помогать?

Решения

1. Обозначим буквой Q — количество теплоты, необходимое для того, чтобы содержимое флакона замерзло. Тогда в первую минуту в окружающую среду уйдет количество тепла $q_1 = \frac{6}{25}2Q = \frac{12}{25}Q$. Во вторую — $q_2 = \frac{6}{25}Q$, в третью — $q_3 = \frac{6}{25}\frac{Q}{2}$ и т.д., например, в n-ю минуту — $q_n = \frac{6}{25}\frac{Q}{2^{n-2}}$. Таким образом, количество тепла, отданное в окружающую среду за n минут, определяется как сумма n членов геометрической прогрессии с первым членом $\frac{12}{25}Q$ и знаменателем $\frac{1}{2}$. Так как знаменатель прогрессии меньше единицы, то для этой прогрессии можно вычислить сумму бесконечного числа ее членов $\frac{24}{25}Q$, которая оказывается меньше необходимого для замерзания теплоты. Отсюда следует, что мальчик может не торопиться, сколько бы он не шел домой, содержимое пузырька не замерзнет. Следует заметить, что в вопросе задачи содержится определенный намек на такой ответ, так как в условии не указано время, затраченное мальчиком на дорогу домой.

Ответ: Успеет.

2. Рассмотрим систему координат, движущуюся поступательно со скоростью V. Начало ее всегда совпадает с точкой касания колеса и дороги; ось Y направлена вверх (к оси колеса), ось X горизонтальна. Положение камня в момент отрыва от колеса будем задавать углом α между радиусом колеса, проведенным в точку расположения камня и вертикально расположенным радиусом, направленным в точку касания колеса с землей. Тогда вертикальная составляющая скорости камня $V_y = V\sin\alpha$. Это позволяет определить высоту подъема h , вылетевшего из протектора камня: в силу закона сохранения энергии $\frac{mV_y^2}{2} = mgh$ имеем $h = \frac{V_y^2}{2g}$. Учитывая, что начальная высота (в момент вылета) равна $h_0 = R - R\cos\alpha = R(1-\cos\alpha)$, получим, что максимальное значение координаты y $H = \frac{V_y^2}{2g} + R(1-\cos\alpha)$. Воспользуемся основным тригонометрическим тождеством $\frac{V^2(1-\cos^2\alpha)}{2g} + R(1-\cos\alpha) = H$ и получим квадратное уравнение относительно $x = \cos\alpha$:

$$f(x) = \frac{V^2}{2g}x^2 + Rx + \left(H - \frac{V^2}{2g} - R\right) = 0. \qquad (3)$$

Приходим к алгебраической задаче с параметром: при каком наибольшем значении параметра H квадратное уравнение (3) имеет хотя бы одно решение на промежутке $[-1;1]$. Графиком квадратного трехчлена, стоящего в левой части (3) является парабола, ветви которой направлены вверх. Такое уравнение имеет корень на промежутке $[-1;1]$ в двух случаях. Первый вариант математически описывается условием:

$$f(-1)\cdot f(1)\leq 0,$$

что означает что ровно один корень принадлежит промежутку $[-1;1]$.

Тогда получим:

$$\left[\frac{V^2}{2g}-R+\left(H-\frac{V^2}{2g}-R\right)\right]\times$$
$$\times\left[\frac{V^2}{2g}+R+\left(H-\frac{V^2}{2g}-R\right)\right]=\left(\frac{V^2}{2g}+H-\frac{V^2}{2g}-R\right)^2-R^2=$$
$$=H^2-2HR\leq 0$$

Относительно переменной H последнее выражение является квадратичной функцией и максимальным допустимым значением, при котором значения функции f на концах отрезка имеют разные знаки, является $H=2R$. Для достижения такой высоты камню можно вообще не вылетать из протектора.

Второй вариант состоит в том, что оба корня принадлежат промежутку $[-1;1]$. Этот случай математически описывается следующей системой условий

$$\begin{cases} D\geq 0,\\ x_{\text{в}}\geq -1,\\ f(-1)\geq 0.\end{cases}$$

Здесь учтено, что у квадратичной функции в уравнении (3) координата вершины меньше нуля. Из условия на дискриминант получим оценку для высоты подъема $H\leq\dfrac{V^2}{2g}+R+\dfrac{gR^2}{2V^2}$. Заметим, что максимальная высота подъема $H_{max}=\dfrac{V^2}{2g}+R+\dfrac{gR^2}{2V^2}$ в этом случае оказывается больше, чем $2R$. Это легко увидеть, используя неравенство о среднем $\dfrac{V^2}{2g}+\dfrac{gR^2}{2V^2}\geq 2\sqrt{\dfrac{V^2}{2g}\cdot\dfrac{gR^2}{2V^2}}=R$. Условие на координату вершины $x_{\text{в}}$ приводит нас к условию на скорость $V^2\geq gR$. Последнее условие в системе неравенств для второго случая равносильно условию $H\geq 2R$, которое автоматически выполняется, как было замечено выше. Таким образом, мы получаем следующий результат:

$$H_{max}=\begin{cases} 2R,\ V^2\leq Rg\\ \dfrac{V^2}{2g}+R+\dfrac{gR^2}{2V^2},\ V^2>Rg\end{cases}.$$

Ответ: $2R$, если $V^2 \leq Rg$, $\dfrac{V^2}{2g} + R + \dfrac{gR^2}{2V^2}$, если $V^2 > Rg$.

3. Пусть тело имеет объем V и плотность ρ. Плотность жидкости — ρ_0. Мысленно удалим тело и заполним занимаемый им объем V той же жидкостью. Если центр тяжести объема V не совпадает с центром сферы, то этот объем в силу гравитационного взаимодействия притягивается к центру сферы. Так как фактически объем неподвижен, эта гравитационная сила должна уравновешиваться давлением остальной жидкости. Эта сила аналогична обычной архимедовой силе. Ее величина зависит от формы и размера объема V, его положения в толще жидкости, но не зависит от плотности вещества. Вернем на место тело. Сила, в соответствии с законом всемирного тяготения, пропорциональна плотности вещества в объеме V. Следовательно, если $\rho > \rho_0$, то тело будет «тонуть» к центру сферы. Если $\rho = \rho_0$, то тело не будет двигаться. Если $\rho < \rho_0$, то тело «всплывет» к поверхности сферы. Следует заметить, что в этом случае у тела существует положение неустойчивого равновесия в центре сферы.

Ответ: В центре сферы, если $\rho > \rho_0$, в исходном положении, если $\rho = \rho_0$, у поверхности сферы, если $\rho = \rho_0$.

4. Будем считать, что у лягушат одинаковый вес. Если они прыгают одновременно, то по закону сохранения импульса можно записать:

$$0 = 2M(V - U) - mU,$$

где U — скорость листа кувшинки, V — скорость лягушат относительно листа, M — масса лягушонка, m — масса листа, а $(V - U)$ — скорость лягушат относительно воды. Отсюда скорость листа определяется формулой

$$U = \frac{2M}{2M + m} V$$

Если лягушата прыгают по очереди, то после прыжка первого из закона сохранения импульса получим следующее уравнение:

$$0 = M(V - U_1) - (M + m)U_1,$$

откуда для скорости листа U_1 получим выражение:

$$U_1 = \frac{M}{2M + m} V.$$

Прыжок второго лягушонка описывается законом сохранения импульса следующим образом:

$$-(M+m)U_1 = -mU_2 + M(V - U_2).$$

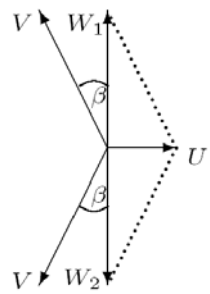
Отсюда получим скорость листа U_2 после прыжка второго лягушонка:

$$U_2 = \left(\frac{M}{M+m} + \frac{M}{2M+m}\right)V$$

Сравнение выражений для конечной скорости в первом и во втором случае показывает, что в первом случае скорость тележки будет меньше.

Ответ: Скорость больше, если прыгают последовательно.

5. В том случае, если планерист летит сначала по ветру, а затем против ветра, то время в полете определится формулой: $t_1 = \dfrac{L}{V+U} + \dfrac{L}{V-U} = \dfrac{2LV}{V^2-U^2}$, где V — скорость дельтаплана относительно воздуха, U — скорость ветра. Если планерист летит в каком-то другом направлении, например, так, чтобы двигаться на север (как показано на рисунке), то скорость дельтаплана относительно земли W_1 и W_2 в обоих направлениях будет одинакова



$$W_1 = \sqrt{V^2 - U^2} = W_2.$$

В этом случае время в полете: $t_2 = \dfrac{2L}{\sqrt{V^2-U^2}}$. Покажем, что $t_1 > t_2$. Верна следующая цепочка неравенств:

$$\frac{2VL}{V^2-U^2} > \frac{2L}{\sqrt{V^2-U^2}} \Leftrightarrow V > \sqrt{V^2-U^2} \Leftrightarrow V^2 > V^2 - U^2 \Leftrightarrow 0 > -U^2$$

Таким образом, получаем, что время в полете зависит от направления движения.

Ответ: имеет смысл задуматься.

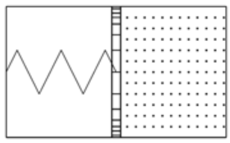
2.3 10 класс

Условия

1. Десятиклассник гулял с собакой. Размахнувшись изо всех сил, он бросил мячик под углом к горизонту. Собака побежала за мячом со скоростью в два раза меньшей, чем начальная скорость бросания мяча. При каком угле бросания собака поймает мячик?

2. В вертикальный цилиндрический сосуд с одним молем одноатомного идеального газа поступает за единицу времени количества тепла Q. Сосуд закрывают сверху тяжелым поршнем веса P. С какой скоростью поднимается вверх этот поршень, если его сечение равно S, а атмосферное давление p_0?

3. Обычно воздушный шар наполняли газом плотности ρ_1. Но однажды наполнили газом вдвое большей плотности ρ_2. При каком отношении ρ_1 к плотности воздуха ρ подъемная сила воздушного шара изменится вдвое при замене газа плотности ρ_1 на газ плотности ρ_2? Весом оболочки шара пренебречь. Температуру и давление газов считать постоянными.



4. Определить теплоемкость одного моля одноатомного идеального газа при его работе в цилиндрическом сосуде с поршнем (см. рисунок). Объем газа V, температура T, сечение поршня S. Поршень разделяет сосуд на две части, в одной из которых находится газ, а в другой он отсутствует. Теплообменом между газом и сосудом, поршнем и пружиной пренебречь. Известно, что длина пружины в ненапряженном состоянии равна длине сосуда, жесткость пружины k.

5. Два туриста хотели приготовить себе чай. Для этого они набрали 1 л чистой ключевой воды, имеющей температуру $0°C$, и 1 л воды из сточной трубы химического комбината, имеющей температуру $100°C$. Первый из туристов объяснил, что в силу второго начала термодинамики, которое говорит о невозможности передачи тепла от холодного тела к горячему, они смогут нагреть 1 л холодной воды только до температуры $50°C$. Второй турист немного подумал и предложил свой способ. А Вы могли бы приготовить 1 л чистой воды, имеющей температуру более $50°C$?

Решения

1. Для того чтобы собака и мячик оказались в одной точке, собака должна бежать со скоростью v, равной горизонтальной составляющей скорости мяча u. Отсюда следует, что $v = u\cos\alpha \Rightarrow \dfrac{u}{2} = u\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{1}{2}$.

Ответ: $\alpha = 60°$.

2. В соответствии с первым началом термодинамики можно записать

$$Q\Delta t = A + \Delta U$$

где Δt — промежуток времени, A — совершенная газом работа, ΔU — изменение внутренней энергии. Так как процесс изобарный, то для работы и внутренней энергии можно записать следующие соотношения:

$$A = \left(p_0 + \frac{P}{S}\right)\Delta V, \quad \Delta U = \frac{3}{2}\nu R\Delta T = \frac{3}{2}\left(p_0 + \frac{P}{S}\right)\Delta V, \quad \Delta V = S\Delta h$$

где ν — количество вещества, ΔV — изменение объема газа, Δh — смещение поршня. Подставив это выражение для работы в первое начало термодинамики, получим $Q\Delta t = \dfrac{5}{2}\left(p_0 + \dfrac{P}{S}\right)\Delta V$. Откуда для скорости движения поршня получим

$$v = \frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{Q}{2,5(p_0 S + P)}.$$

Ответ: $\dfrac{Q}{2,5(p_0 S + P)}$.

3. Подъемная сила воздушного шара равна разности выталкивающей архимедовой силы и веса газа в оболочке. Если заменить газ на более тяжелый, то подъемная сила уменьшится. Отсюда и из условий задачи вытекает следующая процедура ее решения:

$$\frac{\rho V - \rho_1 V}{\rho V - \rho_2 V} = 2 \Leftrightarrow \frac{\rho - \rho_1}{\rho - \rho_2} = 2 \Leftrightarrow \rho - \rho_1 = 2(\rho - 2\rho_1 \Leftrightarrow \rho = 3\rho_1 \Leftrightarrow \frac{\rho_1}{\rho} = \frac{1}{3}$$

Ответ: $\dfrac{1}{3}$

4. По определению теплоемкости можно записать:

$$\Delta Q = C\Delta T,$$

где ΔT — изменение температуры, ΔQ — количество теплоты, переданное газу. Из первого начала термодинамики в данном случае можно получить

$$\Delta Q = \frac{3}{2}R\Delta T + \frac{k}{2}\left(x_2^2 - x_1^2\right),$$

где последний член равен работе сжатия пружины, $x_1,\ x_2$ - координаты поршня до и после передачи газу количества теплоты ΔQ . Из условия равновесия поршня следует условие $kx = PS = RT/x$, из которого получим

$$\frac{k}{2}\left(x_2^2 - x_1^2\right) = \frac{1}{2}R\Delta T.$$

Тогда уравнение первого начала термодинамики примет вид

$$\Delta Q = \frac{3}{2}R\Delta T + \frac{1}{2}R\Delta T.$$

Откуда по определению теплоемкости следует $C = 2R$.

Ответ: $2R$.

5. Предложим конкретный вариант. Разделим 1 л холодной воды на две части по 0,5 л. Одну часть нагреем, приведя ее в контакт с 1 л сточных вод. По уравнению баланса тепла получим, что установится равновесная температура $66,(6)°C$. Нагретую чистую воду отольем в отдельную посуду. Другую часть холодной воды приведем в контакт с 1л сточных вод, у которой теперь уже температура $66,(6)°C$. В этом случае установится температура $44,(4)°C$. Нагретые до этой температуры 0,5л чистой воды смешаем с ранее приготовленной порцией. В результате получится смесь двух равных частей чистой воды с температурами $66,(6)°C$ и $44,(4)°C$. Ясно, что в результате чистая вода будет иметь температуру, равную среднему арифметическому этих температур $55,(5)°C$.

Ответ: приготовить требуемую воду возможно.

3 Олимпиада 2007 года

3.1 8 класс

Условия

1. Ледяной кубик плавает в стакане с водой. Поверх воды наливают рыбий жир, плотность которого на 17% меньше плотности воды. При этом половина объема кубика находится в воде, а половина — в жире. Найти плотность кубика.

2. Если кубик льда, который в начальный момент находился при условиях, описанных в предыдущей задаче, с течением времени растает, то как изменятся уровни воды и жира в стакане?

3. Зная радиус Земли $R = 6400$ км и атмосферное давление $P = 0,1$ МПа, найти массу земной атмосферы. Подсказка: площадь поверхности Земли (S) вычисляется по формуле $S = 4\pi R^2$.

4. Для измерения длины медленно движущегося товарного поезда восьмиклассник проехал на велосипеде из хвоста поезда в начало и обратно. При этом измерил пройденный им путь и расстояние, на которое за это время переместился поезд. Спидометр велосипеда показал, что мальчик проехал 1800 м. За это время поезд проехал 1200 м. Найдите длину поезда.

5. Из изолированного сосуда с водой массы M с начальной температурой $T_0 : T_{\text{плавления}} < T_0 < T_{\text{кипения}}$ откачивают насосом воздух. При понижении давления до определенной величины температура кипения понижается до T_0 и начинается кипение, которое продолжается на фоне дальнейшего понижения давления. При этом часть воды выкипает, а остальная замерзает. Найти максимальное количество льда в сосуде, если Y — удельная теплота плавления льда, L — удельная теплота испарения воды, C — удельная теплоемкость воды.

Решения

1. Введем обозначения: ρ, ρ_0, ρ_1 — плотность воды, масла и льда соответственно. Из условия задачи следует, что:

$$\rho_0 = \rho\left(1 - \frac{17}{100}\right) = \frac{83}{100}\rho.$$

Составим уравнение равновесия кубика льда:

$$\rho_1 g 2h = \rho_0 g h + \rho g h.$$

Здесь введены обозначения: $2h$ — высота кубика льда, g — ускорение свободного падения. Подставляя ρ_0 из первого уравнения во второе, получим $\rho_1 = 0,915\rho = 915$ кг/м^3.

Ответ: 925 кг/м^3.

2. Понятно, что чем большую часть тела погрузить в жидкость, тем выше будет уровень жидкости. Исходя из решения предыдущей задачи уровень воды не изменится, если лед погружен в воду на $92,5\%$ в соответствии со значением плотности (см. предыдущую задачу). Так как в условиях задачи известно, что в воду погружена только половина объема льда, то понятно, что после таяния льда уровень воды повысится. Повышение уровня воды можно оценить следующим образом. Из закона сохранения массы следует:

$$\rho_1 V = \rho V_2$$

где V — объем льда, V_2 — объем полученной из льда воды, для плотностей сохранены обозначения предыдущей задачи. При этом, исходя из условия задачи, объем воды после таяния льда уменьшится на объем льда, погруженный в воду, т.е. $V/2$. В результате итоговое изменение объема воды ΔV определяется разностью двух величин

$$\Delta V = V_2 - \frac{V}{2} = V\left(\frac{\rho_1}{\rho} - \frac{1}{2}\right) > 0.$$

Для оценки изменения уровня масла после таяния льда также надо сравнить два процесса. Во-первых, уровень масла понизится на объем половины объема куска льда $V/2$ (считаем площадь сосуда единичной). Во-вторых, уровень повысится на ΔV за счет повышения уровня воды от таяния второй половины объема льда. Изменение уровня масла определяется знаком разности $\Delta V - V/2$, которая, как видно из наших результатов, оказывается отрицательной. Это значит, что уровень масла понизится.

3. Сила давления атмосферы на землю F, исходя из условий равновесия, равна весу атмосферы $F = mg$. По определению давления эта сила определяется соотношением $F = PS$. Отсюда масса атмосферы равна

$$m = \frac{PS}{g} = \frac{4\pi R^2 P}{g} \approx 5 \cdot 10^{18} \text{ кг}.$$

Ответ:$5 \cdot 10^{18}$ кг

4. Обозначим v и u — скорости велосипедиста и поезда соответственно. Тогда условия задачи на языке математики можно записать следующим образом:

$$(v-u)t_1 = h; \quad (v+u)t_2 = h; \quad u(t_1+t_2) = l; \quad v(t_1+t_2) = L$$

Здесь t_1 и t_2 — время движения велосипедиста по ходу поезда и навстречу соответственно. Откуда следует, что скорость велосипедиста в полтора раза больше скорости поезда, а длина поезда $h = 500$ м.

Ответ: $h = 500$ м.

5. Для поддержания процесса кипения необходимо затрачивать энергию. В замкнутой системе поддержание кипения одной части жидкости может происходить только за счет охлаждения другой части жидкости вплоть до замерзания. В этом случае уравнение баланса тепла выглядит следующим образом:

$$m(Y + C(T_0 - T_{\text{плавления}})) = (M-m)L.$$

Здесь учтено, что масса льда m будет наибольшей, если он будет иметь температуру равную $T_{\text{плавления}}$. Из уравнения теплового баланса получим

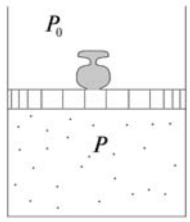
$$m = \frac{ML}{Y + L + C(T_0 - T_{\text{плавления}})}$$

Ответ: $m = ML/\left[Y + L + C(T_0 - T_{\text{плавления}})\right]$

3.2 9 класс

Условия

1. Под закрепленным легким поршнем находится газ, давление p которого не равно атмосферному p_0. Затем провели два эксперимента. Поршень внезапно освободили и он начал двигаться с ускорением. Во втором случае на поршень поставили дополнительный груз и вновь внезапно освободили поршень. В каком случае, когда $p > p_0$ или когда $p < p_0$, ускорение поршня не зависит от массы груза?



2. В одной жидкости деревянный брусок погружается на три четверти своего объема, а в другой — на половину своего объема. Какая часть объема бруска останется на поверхности смеси равных масс этих жидкостей, если они хорошо смешиваются? Известно, что суммарный объем этих жидкостей после смешивания не меняется.

3. Два девятиклассника на переменке вышли на улицу и стали играть в мяч. Игра заключалась в перекидывании мяча друг другу. По мере игры ребята обнаружили, что если один мальчик кидает мяч под углом α к горизонту против ветра, то к другому мальчику мяч подлетает под углом α к вертикали. Определить отношение силы ветра F , действующей на мяч, к его весу P. Считать, что сила сопротивления движению мяча постоянна и направлена горизонтально.

4. Из туристического речного трамвайчика, движущегося против течения, выпал чемодан туриста. Через промежуток времени t_0 после этого команда выслала быстроходный катер. Во сколько раз скорость катера больше скорости трамвайчика, если с момента выхода катера до его возвращения с потерянным чемоданом прошел промежуток времени $4t_0$?

5. По горизонтальной трубе с помощью насоса перекачивается жидкость. Во сколько раз нужно увеличить мощность насоса для того, чтобы за то же время количество перекачиваемой жидкости возросло в 2 раза? Сопротивлением трения в трубе пренебречь.

Решения

1. В том случае, если $p > p_0$ ускорение поршня направлено вверх. Поэтому груз будет оказывать давление на поршень, соответственно, наличие груза влияет на ускорение. В случае $p < p_0$ ускорение поршня направлено вниз и больше, чем ускорение свободного падения (т.к. поршень легкий), и груз будет свободно падать, не оказывая давления на поршень, а значит не будет влиять на ускорение поршня.

2. Условия плавания бруска в первой и второй жидкости из условия задачи будут выглядеть следующим образом:

$$V\rho_0 = \frac{3}{4}V\rho_1; \quad V\rho_0 = \frac{1}{2}V\rho_2$$

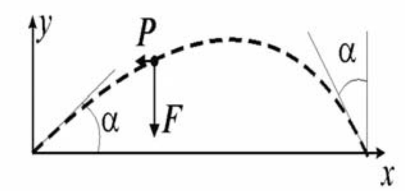
Здесь ρ_0, ρ_1, ρ_2 — плотности бруска, первой и второй жидкостей соответственно; V — объем бруска. При смешивании равных масс двух жидкостей плотность смеси ρ_3 — равна среднему гармоническому плотностей компонент смеси (см. решение задачи №5 8 класса за 2006 год)

$$\rho_3 = \frac{2\rho_1\rho_2}{\rho_1\rho_2}$$

Тогда из условия плавания бруска в смеси $V\rho_0 = V'\rho_3$, выражая плотности из трех условий плавания, для объема погруженной части бруска V' получим $V' = \frac{5}{8}V$. Значит, ответ на поставленный вопрос: $\frac{3}{8}$ или $37,5\%$.

Ответ: $37,5\%$.

3. В случае движения тела в поле силы тяжести и горизонтальной силы сопротивления движению закон движения тела, брошенного с начальной скоростью V_0 под углом α, выглядит следующим образом:



$$\begin{cases} V_x = V_0 \cos\alpha - \frac{F}{m}t, \\ V_y = V_0 \sin\alpha - \frac{P}{m}t, \\ x = V_0 \cos\alpha t - \frac{F}{m}\frac{t^2}{2}, \\ y = V_0 \sin\alpha t - \frac{P}{m}\frac{t^2}{2} \end{cases}$$

Для момента времени $t = t_1$, когда мяч подлетает к партнеру $y = 0$, закон движения сводится к системе уравнений

$$
\begin{cases}
t_1 = \dfrac{2V_0 \sin\alpha}{\dfrac{P}{m}}, \\[2ex]
\operatorname{tg}\left(\alpha - \dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{V_0 \sin\alpha - \dfrac{P}{m} t_1}{V_0 \cos\alpha - \dfrac{F}{m} t_1}.
\end{cases}
$$

Отсюда после некоторых преобразований получим:

$$
\frac{F}{P} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}.
$$

Ответ: $\dfrac{F}{P} = \dfrac{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}$.

4. Так как все объекты движутся относительно воды и нет ни каких условий связи с объектами, находящимися на берегу, то единственную систему координат, относительно которой можно рассматривать эту задачу, выберем связанной с водой. Таким образом, у нас нет необходимости учитывать скорость течения. В стоячей воде трамвайчик имеет скорость v, а катер $k \cdot v$. Требуется найти коэффициент k. Отметим, что за время $4t_0$ трамвайчик пройдет путь $s_1 = 4t_0 v$, а катер должен пройти путь $s_2 = 6t_0 v$. Отсюда получим $4t_0 k v = 6t_0 v \Rightarrow k = 1,5$.

Ответ: В 1,5 раза.

5. Мощность — это механическая работа в единицу времени. За время Δt, на выходе из трубы вытечет

$$
\Delta m = \rho S V \Delta t
$$

Отсюда следует, что для увеличения массы в два раза, необходимо увеличить скорость в два раза. В данном случае, работа A по перекачке порции воды Δm по трубе со скоростью V равна $A = \Delta m V^2/2$. При этом из определения Δm следует, что $A \sim V^3$. Значит, мощность надо увеличить в 8 раз.

Ответ: в 8 раз.

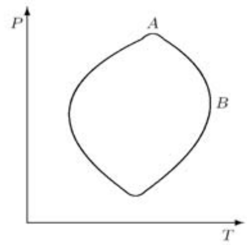
3.3 10 класс

Условия

1. По просьбе завуча школы на перемене Чукин и Геков перетаскивали тяжелый учительский стол из одного класса в другой, толкая его горизонтально по полу. Стол равномерно двигался по полу, поскрипывая всеми четырьмя ножками. Мальчики подумали, что ножки могут сломаться. Чукин предположил, что, скорее всего, сломаются передние ножки, Геков — задние. Кто из них ближе к истине? Считать, что качество крепления всех ножек одинаково.

2. На следующей перемене Чукин стал бросать упругий мячик в направлении стены школьного здания, посылая его горизонтально, а Геков пытался его поймать и внимательно следил за отскакивающим мячиком. В один момент Геков обнаружил, что мячик отлетает от стенки горизонтально. Мальчики очень удивились, так как брошенный Чукиным горизонтально мячик подлетал к стене под определенным углом, и ожидалось, что и отлетать он будет под углом к горизонту, но, проведя еще несколько аналогичных испытаний, убедились в справедливости того факта, что мячик отлетает горизонтально. Как такое может быть? Считать мяч материальной точкой, а стенку вертикальной.

3. После уроков Чукин и Геков пошли купаться в пруду и, имея с собой мерный стакан для сыпучих материалов (стакан с делениями) цилиндрической формы, умудрились, донырнув до дна, померить глубину пруда в месте купания. Как им это удалось сделать? Считать атмосферное давление, плотность воды и ускорение свободного падения известными.

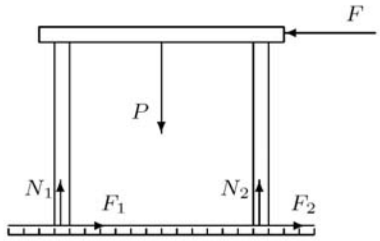


4. На рисунке показан замкнутый термодинамический процесс достаточно произвольной формы, происходящий с фиксированным объемом паров золота. Экспериментальная установка, на которой осуществляли данный термодинамический процесс, имеет устройство, с помощью которого можно взять пробу паров золота из рассматриваемого объема. На уроке физики ребятам было предложено ответить на вопрос, в какой пробе окажется больше золота? Чукин считал, что в состоянии A, а Геков, что в состоянии B. Кто из них был ближе к истине? В какой точке цикла в пробе будет больше всего золота?

5. Во время влажной уборки класса Чукин и Геков стали экспериментировать со шваброй. Чукин положил один конец швабры на ребро ладони, а Геков — другой конец. После этого ребята стали сдвигать ладони навстречу друг другу. По мере движения ладоней швабра все время находилась в равновесии, вплоть до момента времени, когда ладони мальчиков сошлись в одной точке. Повторяя этот эксперимент несколько раз, ребята получали тот же самый результат — их ладони встречались в одной и той же точке на швабре. Помогите мальчикам объяснить этот результат испытания. В каком отношении эта точка встречи ладоней делит древко швабры, если вес поперечного бруска в два раза меньше древка?

Решения

1. При прочих равных условиях сломается та ножка, на которую действует больший момент сил относительно точки крепления, то есть большая сила трения. Сила трения между ножками стола и полом пропорциональна силе нормального давления. Поэтому для ответа на поставленный в задаче вопрос необходимо оценить силу давления ножек на пол. Так как стол находится в положении равновесия — равномерного прямолинейного движения — сумма моментов сил относительно любой оси равна нулю. Запишем уравнения моментов относительно точек касания пола:



$$\begin{cases} P\dfrac{L}{2} - N_2L - Fh = 0, \\[2ex] P\dfrac{L}{2} - N_1L + Fh = 0, \end{cases}$$

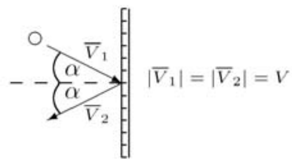
где P — вес стола, N_1, N_2 — нормальная реакция опоры на передние и задние ножки соответственно, F — сила, с которой мальчики давили на стол, L — расстояния между передними и задними ножками стола, h — высота стола. Отсюда следует:

$$\begin{cases} N_1 = \dfrac{P}{2} + F\dfrac{h}{L}, \\[2ex] N_2 = \dfrac{P}{2} - F\dfrac{h}{L}. \end{cases}$$

Значит прав был Чукин.

Ответ: Чукин.

2. Если бы стенка была гладкой, то материальная точка, подлетающая под углом α, упруго ударившись, отлетала бы под таким же углом к нормали поверхности стены (см. рисунок). В этом случае импульс силы удара направлен по нормали. Погасить составляющую импульса точки, направленную вертикально вниз, можно только за счет силы трения, причем импульс этой силы должен равняться $mV\sin\alpha$.



3. Над поверхностью воды при атмосферном давлении P_0 воздух в стакане занимал объем $V_0 = l_0S$, где $l_0,\ S$ — высота и площадь поперечного сечения стакана. На дне пруда глубиной h изменится давление $P = P_0 + \rho g h$ и объем $V = lS$ (стакан надо опускать отверстием вниз). По закону Бойля- Мариотта

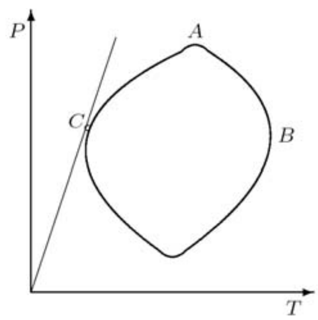
$$P_0 l_0 S = (P_0 + \rho g h) l S.$$

Откуда

$$h = \frac{P_0}{\rho g} \cdot \frac{l_0 - l}{l} = \frac{P_0}{\rho g} \cdot \left(\frac{l_0}{l} - 1\right).$$

Заметим, что в скобках стоит безразмерная величина. Это значит, что неважно в каких единицах измерять высоту стакана. Ее можно померить в делениях, нанесенных на боковой поверхности. Коэффициент перед скобкой имеет размерность длины и приближенно может быть посчитан, исходя из следующих данных: атмосферное давление $P_0 = 0.1$ МПа; плотность воды $\rho = 1000$ кг/м^3; ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2. Отсюда получим оценку глубины водоема $h \approx 10 \cdot \left(\frac{l_0}{l} - 1\right)$ м.

Ответ: Нырнуть, держа стакан дном верх, и измерить объем воздуха в стакане около дна.



4. В осях $P - T$ прямая линия, выходящая из начала координат, соответствует изохорному процессу. Угол наклона прямой пропорционален коэффициенту пропорциональности в законе Менделеева - Клапейрона $PV = \nu RT \Rightarrow P = \frac{\nu R}{V} T$. Чем больше коэффициент $\frac{\nu R}{V}$, тем больше угол наклона прямой к горизонтальной оси T. Значит, чем больше наклон, тем больше количества вещества содержится в единице объема $\frac{\nu}{V}$. Отсюда следует, что ближе к истине был Чукин. Максимальное содержание паров золота достигается в точке C.

5. Максимальная сила трения покоя пропорциональна силе нормального давления. Сила давления пропорциональна близости положения пальца к центру тяжести швабры. Поэтому, тот палец, который будет ближе к центру тяжести, будет стоять на месте, а более удаленный — будет двигаться. В итоге оба пальца подойдут к точке центра тяжести и соединятся в этой точке. Из условия задачи следует, что центр тяжести делит древко в отношении 1 : 3, считая от места крепления поперечного бруска.

4 Олимпиада 2008 года

4.1 8 класс

Условия

1. Какая часть объема деревянного кубика окажется под водой, если его положить сверху на такой же кубик изо льда и опустить в стакан с водой? Плотность воды 1000 кг/м^3, плотность льда 900 кг/м^3, плотность дерева 500 кг/м^3.

2. Изменится ли (и каким образом) уровень воды в условиях предыдущей задачи, после того как лед растает? Ответ обосновать.

3. Дирижабль прошел из пункта А в пункт Б расстояние 40 км против ветра (скорость ветра 30 км/ч), затем прошел этот же путь в обратном направлении, затратив в оба конца $2,5$ часа. Определить скорость дирижабля относительно воздуха.

4. Сколько стоит вскипятить полтора литра холодной воды, если начальная температура воды $20°C$; удельная теплоемкость воды $4200\dfrac{\text{Дж}}{\text{кг град}}$; коэффициент полезного действия электрического чайника $\eta = 75\%$; стоимость одного киловатт-часа затраченной электроэнергии $p = 1,5$ рубля?

5. Восьмикласснику родители подарили мопед, который, по заводским данным, мог проехать 20 км, затратив один литр бензина. Мальчик, изучив устройство мопеда, усовершенствовал работу карбюратора так, что он проезжал на мопеде 1 км, затрачивая на 20% меньше бензина, чем по заводским данным. Сколько километров проедет мальчик на мопеде с полным баком, объем которого 10 литров?

Решения

1. Введем обозначения: ρ, ρ_0, ρ_1 — плотность льда, воды и дерева соответственно. Составим уравнение равновесия кубиков льда и дерева в воде в предположении, что кубик льда окажется полностью под водой, а расположенный над ним деревянный кубик частично погружен в воду:

$$\rho_0 g(h + x) = \rho g h + \rho_1 g h$$

Здесь введены обозначения: h — высота кубика, x - высота погруженной части деревянного кубика. Отсюда следует, что

$$x = h \cdot \frac{\rho + \rho_1 - \rho_0}{\rho_0} = \frac{2h}{5}.$$

Ответ: 2/5.

2. Пока лед не растаял, уровень воды при погружении двух кубиков так, как сказано в предыдущей задаче, повысился на величину

$$\Delta h_1 = \left(h + \frac{2}{5}h\right)\frac{h^2}{S} = \frac{7}{5}\frac{h^3}{S},$$

где S — площадь сечения стакана. Как следует из закона сохранения массы, от таяния льда добавится объем $V' = \dfrac{\rho}{\rho_0}h^3$. После того, как лед растает, объем погруженной части деревянного кубика определится из условия плавания тел $V'' = \dfrac{\rho_1}{\rho_0}h^3$. Тогда уровень воды после таяния льда поднимется на величину

$$\Delta h_2 = \frac{V' + V''}{S} = \frac{h(\rho + \rho_1)}{\rho_0}\frac{h^2}{S} = \frac{7}{5}\frac{h^3}{S}.$$

Видно, что $\Delta h_1 = \Delta h_2$, т.е. уровень воды не изменится.

Ответ: не изменится.

3. Пусть V — скорость дирижабля относительно воздуха, а U — скорость ветра, расстояние от А до Б. Тогда на путь из п.А в п.Б он затратит время $t_1 = \dfrac{S}{V - U}$, а на обратный путь время $t_2 = \dfrac{S}{V + U}$. Из условия задачи следует уравнение

$$\frac{S}{V - U} + \frac{S}{V + U} = T = t_1 + t_2,$$

из которого получим

$$V = \frac{S}{T} + \sqrt{\frac{S^2}{T^2} + U^2} = 50\text{км/ч}.$$

Ответ: 50км/ч.

4. Теоретически количество теплоты Q , необходимое для нагрева $V = 1.5 \cdot 10^{-3}$ м^3 воды до температуры кипения $t = 100°C$, определяется по формуле $Q = cm(t - t_0)$. Здесь $t_0 = 20°C$ - начальная температура, c - удельная теплоемкость воды, $m = V\rho_0$ - масса воды, $\rho_0 = 10^3$ кг/м^3 - плотность воды. Но, так как чайник не идеальное устройство, то реальное количество теплоты Q_s , затраченное на нагрев, определится формулой $Q_s = \dfrac{Q}{\eta} = 0.16$ кВт. Для расчета затрат Z остается воспользоваться формулой $Z = Q_s p$.

Ответ 24 коп.

5. Задача решается в рамках естественного предположения о линейной зависимости объема затраченного бензина от пройденного расстояния

$$V = \alpha S,$$

где коэффициент пропорциональности (удельный расход топлива), размерность которого $[\alpha] =$ л/км.

Пусть по заводским настройкам удельный расход топлива равен α_1, а после усовершенствования — α_2. Из первого условия задачи следует $1 = \alpha_1 \cdot 20 \Rightarrow \alpha_1 = \dfrac{1}{20}$, а из второго условия находится $\alpha_2 = \alpha_1(1 - \dfrac{20}{100}) = \dfrac{4}{5}\alpha_1 = \dfrac{1}{25}$. Теперь, подставив известные величины в уравнение $V = \alpha S$, получим ответ задачи $10 = \dfrac{1}{25} \cdot S \Rightarrow S = 250$ км.

Ответ: 25 км

4.2 9 класс

Условия

1. Два зубчатых колеса, соединенные цепью, вращаются так, что первое делает в минуту на 400 оборотов больше второго. Второе колесо делает 5 оборотов за время на 1 секунду большее, чем делает 5 оборотов первое колесо. Сколько оборотов делает каждое колесо в минуту?

2. Во время поединка с ветряной мельницей Дон-Кихот сломал копье, наконечник которого застрял в конце лопасти длины l, вращающейся с постоянной угловой скоростью ω вокруг горизонтальной оси, расположенной на высоте h, $h > l$. Какой максимальной высоты достигнет наконечник, если он оторвется от лопасти?

3. Стоящий на высоком берегу озера человек подтягивает лодку, выбирая с постоянной скоростью привязанную к носу веревку. Установить, как будет изменяться скорость лодки по мере ее приближения к берегу: уменьшаться, увеличиваться, оставаться постоянной. Ответ обосновать.

4. Курочка Ряба снесла три яйца правильной сферической формы. Первое было совершенно гладкое, два других — шершавые. Дед нашел яйца и решил разбить их, отпустив вниз по наклонной плоскости. При этом одно из шершавых яиц он предварительно отварил «вкрутую». Определите, какое из яиц разовьет меньшую, а какое — большую скорость в конце спуска.

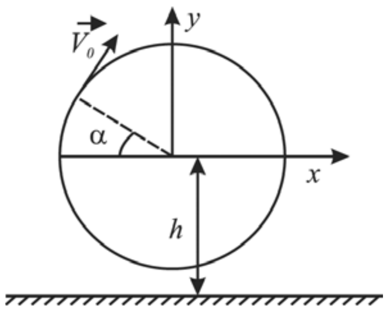
5. Автомобиль, двигаясь от пункта А до пункта Б, проехал первую треть пути со скоростью V_1, а оставшиеся две трети — со скоростью V_2. На обратном пути автомобиль поло-вину всего времени движения от Б до А проехал со скоростью V_1, а вторую половину — со скоростью V_2. Оказалось, что средняя скорость движения от А до Б в a раз больше средней скорости движения от Б к А. Найдите значения параметра a, при которых задача определения отношения скоростей V_1 и V_2 имеет решение.

Решения

1. Пусть $N_1,\ N_2$ — количество оборотов в минуту первого и второго колеса соответственно. Из первого условия задачи следует уравнение $N_1 - N_2 = 400$. Из второго условия задачи следует уравнение $\dfrac{5}{N_2} - \dfrac{5}{N_1} = \dfrac{1}{60}$. Заметим, что величина $\dfrac{1}{N}$ это время в минутах, за которое колесо делает один оборот. Из решения системы двух указанных уравнений получим: $N_1 = 600,\ N_2 = 200$.

Ответ: 600 об/мин, 200 об/мин.

2. Выберем начало координат в центре колеса мельницы; ось Y направлена вверх, ось X горизонтальна. Положение наконечника в момент отрыва от лопасти будем задавать острым углом α между лопастью с застрявшим наконечником и горизонтальным направлением. Тогда вертикальная составляющая скорости камня V_y равна $V_y = V\cos\alpha$.



Это позволяет из закона движения тела, брошенного под углом к горизонту $y = l\sin\alpha + V_0\cos\alpha t - \dfrac{gt^2}{2}$, $V_y = V_0\cos\alpha - gt$, определить максимальную координату H, вылетевшего из лопасти наконечника:

$$H = l\sin\alpha + \frac{V_0^2\cos^2\alpha}{2g} \tag{4}$$

Здесь $V_0 = \omega l$ — скорость наконечника в момент вылета. Из соотношения (4) следует квадратичная зависимость высоты подъема h от синуса угла α (обозначим $p = \sin\alpha$): $H = lp + \omega^2 l^2(1-p^2)/(2g)$. Применяя процедуру выделения полного квадрата, получим:

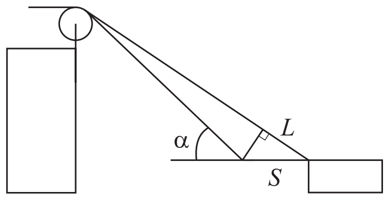
$$H = \frac{\omega^2 l^2}{2g} + \frac{g}{\omega^2} - \frac{\omega^2 l^2}{2g}\left(p - \frac{g}{\omega^2 l}\right)^2 \tag{5}$$

Ясно, что для достижения максимальной высоты подъема наконечника необходимо минимизировать третий член в соотношении (5). Учитывая условие $|p| \le 1$, получаем: если коэффициент $g/(\omega^2 l)$ будет больше 1, то минимум $\left(p - \dfrac{g}{\omega^2 l}\right)^2$ достигается при $p = 1$; если же $g/(\omega^2 l) < 1$, то минимум достигается при $p = \dfrac{g}{\omega^2 l}$. Таким образом,

$$H_{max} = h + l,\ \text{если}\ \omega \le \sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$H_{max} = h + \frac{\omega^2 l^2}{2g} + \frac{g}{\omega^2},\ \text{если } \omega > \sqrt{\frac{g}{l}}$$

Ответ: Если $\omega \leq \sqrt{\frac{g}{l}}$, то $H_{max} = h + l$; если $\omega > \sqrt{\frac{g}{l}}$, то $H_{max} = h + \frac{\omega^2 l^2}{2g} + \frac{g}{\omega^2}$.



3. За малый промежуток времени Δt лодка пройдет расстояние $S = U\Delta t$, а веревка укоротится на длину $L = V\Delta t$. Здесь U, V — скорости лодки и выбирания веревки соответственно. Учитывая, что за малое время Δt угол α наклона веревки к горизонту практически не изменится, получим следующую связь между S и L:

$$L = S\cos\alpha \Rightarrow V = U\cos\alpha$$

При приближении к берегу увеличивается угол α, то есть уменьшается косинус этого угла. Значит, для того, чтобы обеспечить постоянство скорости вытягивания веревки V, скорость лодки U должна увеличиваться.

Ответ: скорость лодки будет увеличиваться.

4. Самым быстрым будет гладкое яйцо, так как у него вся потенциальная энергия перейдет в кинетическую энергию поступательного движения. Медленнее всех будет двигаться шершавое невареное яйцо, так как помимо затрат энергии на вращение, которое будет точно таким же и у сваренного «вкрутую» яйца, у него будут происходить затраты на внутреннее трение жидкой субстанции.

5. Из условия задачи следует, что на пути из А в Б автомобиль движется в соответствии с законом $\frac{S}{3} = V_1 t_1$, $\frac{2S}{3} = V_2 t_2$ откуда следует, что средняя скорость на пути из А в Б равна

$$V'_{\text{ср}} = \frac{S}{t_1 + t_2} = \frac{S}{\frac{S}{3V_1} + \frac{2S}{3V_2}} = \frac{3V_1 V_2}{V_2 + 2V_1}.$$

На обратном пути закон движения определяется условиями $S_1 = V_1\frac{t}{2}$, $S_2 = V_2\frac{t}{2}$. Отсюда следует, что средняя скорость движения автомобиля на обратном пути из А в Б равна

$$V''_{\text{ср}} = \frac{S_1 + S_2}{t} = \frac{V_1\frac{t}{2} + V_2\frac{t}{2}}{t} = \frac{V_1 + V_2}{2}.$$

Введем обозначение $x = V_2/V_1$. Тогда условие задачи приводит нас к уравнению $\dfrac{3x}{x+2} = a\dfrac{1+x}{2}$, которое сводится к квадратному с параметром а:

$$ax^2 + 3(a-2)x + 2a = 0. \tag{6}$$

Теперь вопрос задачи можно переформулировать следующим образом: при каких положительных значениях параметра a данное квадратное уравнение имеет хотя бы один положительный корень.

Действительные корни уравнения (6) существуют, если дискриминант этого уравнения неотрицателен.

$$D = a^2 - 36a + 36 \geq 0 \Leftrightarrow a \in (-\infty; 18 - 12\sqrt{2}] \cup [18 + 12\sqrt{2}; \infty)$$

Из теоремы Виета следует, что произведение корней равно $2a/a = 2 > 0$, это значит, что корни могут быть только одного знака. Если корни положительны, их сумма тоже положительна $-\dfrac{3(a-2)}{a} > 0$. Отсюда следует, что $a \in (0; 2)$.

Несложно проверить, что $0 < 18 - 12\sqrt{2} < 2 < 18 + 12\sqrt{2}$. Поэтому в результате пересечения двух полученных условий имеем окончательный ответ: $a \in (0; 18 - 12\sqrt{2}]$.

Ответ: $a \in (0; 18 - 12\sqrt{2}]$.

4.3 10 класс

Условия

1. Материальная точка массой $m = 100$г движется по плоскости по закону

$$\begin{cases} x = 36 + 3t - 5t^2 \\ y = -4t \end{cases}$$

Найти модуль вектора изменения импульса точки за третью секунду от начала движения.

2. Тело, находящееся на расстоянии S от источника звука, начало движение в момент пуска звукового сигнала без начальной скорости с постоянным ускорением a по прямой, образующей с направлением на источник звука угол $\alpha = 60°$. Какое расстояние l пройдет это тело до встречи с сигналом, если скорость распространения сигнала равна V?

3. В некотором термодинамическом процессе давление и объем заданной порции газа изменяются со временем по закону

$$\begin{cases} \dfrac{P}{P_0} = 8t^2 - 26t + 23 \\ \dfrac{V}{V_0} = 2t - 1 \end{cases},$$

где t — время в секундах, P_0, V_0 — известные параметры процесса. Какой минимальной величины достигает температура этой порции газа в течение второй секунды данного процесса, если начальная температура равна T_0?

4. На какую максимальную глубину H погрузится деревянный шар с плотностью ρ в два раза меньшей плотности воды ρ_0, если его сбросили с высоты h без начальной скорости. Сопротивлением воздуха и воды пренебречь. Силу Архимеда считать постоянной.

5. Рассмотрим задачу о планировании летательного аппарата на максимальную дальность. Уравнение движения центра масс в вертикальной плоскости имеют вид:

$$\begin{cases} x = v\cos\theta, \\ y = v\sin\theta, \\ \dot{\theta} = kv - \dfrac{\cos\theta}{v}, \\ \dot{v} = -v^2 - \sin\theta, \end{cases}$$

где x — дальность полета, y — высота полета, v — скорость движения центра масс, θ — угол наклона траектории, k — положительный аэродинамический коэффициент подъемной силы, подлежащий выбору. Время полета T считается заданным. Рассмотрите стационарный режим планирования, полагая

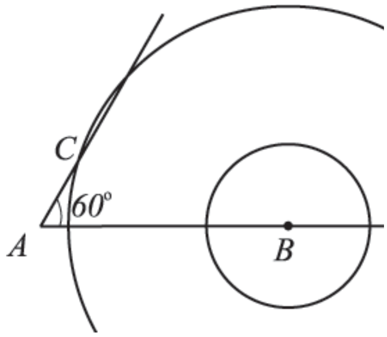
v и θ константами. Из двух последних уравнений получите алгебраические уравнения движения с постоянной скоростью и постоянным углом наклона траектории. Найдите соответствующие значения этих постоянных. Определите зависимость x от времени из первого уравнения системы и получите функцию «дальность полета на стационарном режиме» в зависимости от заданного времени T и управляющего параметра k. Найдите наибольшее значение этой функции в зависимости от параметра k и соответствующее значение этого параметра.

Решения

1. Из данных задачи следует, что материальная точка движется с постоянным ускорением вдоль оси Ox, модуль которого равен $a = 10$ м/с^2. Из второго закона Ньютона $\vec{F} = m\vec{a}$ следует, что модуль действующей на материальную точку постоянной силы равен $F = 1$ Н. Если записать второй закон Ньютона в виде закона изменения импульса $\Delta t\vec{F} = \Delta\vec{p}$, то становится ясно, что за любую по счету секунду $\Delta t = 1$ с модуль вектора изменения импульса равен одной и той же величине $\Delta p = 1$ Н $\cdot$ с.

Ответ: $\Delta p = 1$ Н $\cdot$ с.

2. Пусть точка A — начальное положение тела. Источник звука расположен в точке B. Звуковой сигнал встретится с телом в точке C. Исходя из условий задачи будем иметь:



$$AB = S, \quad AC = l = \frac{at^2}{2}, \quad BC = Vt,$$

где t — время до встречи. Применим к треугольнику $\triangle ABC$ теорему косинусов:

$$AC^2 + AB^2 - 2AB \cdot AC\cos\alpha = BC^2$$

Из этих двух соотношений с учетом того, что $\alpha = 60°$, получим квадратное уравнение

$$l^2 - l(S + \frac{2V^2}{a}) + S^2 = 0 \tag{7}$$

для определения искомого расстояния. В зависимости от параметров S, V, a и дискриминанта уравнения (7) $D = \left(\frac{S}{2} + \frac{2V^2}{a}\right)^2 - S^2$ тело может принять сигнал два раза ($D > 0$), один раз ($D = 0$) и не принять его вообще ($D < 0$). Анализ квадратного неравенства $D \geq 0$ дает ограничение на S: $S \leq 2V^2/a$, при которых встреча сигнала состоится. Если решение существует, оно находится из решения квадратного уравнения (7):

$$l_{1,2} = S/2 + V^2/a \pm \frac{\sqrt{4 \cdot S \cdot V^2/a + 4v^4/a^2 - 3S^2}}{2}$$

Ответ: Встреча не состоится, если $AB > 2V^2/a$, тело пройдет расстояние равное AB, если $AB = 2V^2/a$; произойдет две встречи на расстояниях $AB/2 + V^2/a \pm \sqrt{4 \cdot AB \cdot V^2/a + 4v^4/a^2 - 3AB^2}/2$, если $AB > 2V^2/a$

3. По закону Менделеева - Клайперона $\frac{P}{P_0}\frac{V}{V_0} = \frac{T}{T_0}$. Откуда $\frac{T}{T_0} = (2t - 1)(8t^2 - 26t + 23)$. Для выяснения точек экстремума температуры, как функции времени, вычислим производную и приравняем ее нулю: $2t^2 - 5t + 3 = 0$. Исследование квадратичной функции показывает, что на промежутке $t \in (1;2)$ в момент времени $t = 1.5$ температура достигает минимума $\frac{T}{T_0} = 44$.

Ответ: $44T_0$

4. Потенциальная энергия накопленная в системе шар - Земля будет затрачена полностью на работу силы Архимеда

$$\rho V g(h + H) = (\rho_0 V)gH.$$

Отсюда получим для H: $H = \frac{\rho}{\rho_0 - \rho}h$. Из данного в задаче соотношения плотностей следует $H = h$.

Ответ: $H = h$.

5. Из системы уравнений:

$$\begin{cases} kv - \dfrac{\cos\theta}{v} = 0, \\ -v^2 - \sin\theta = 0 \end{cases}$$

находим стационарные угол планирования и скорость полета:

$$\begin{cases} tg\theta = -\dfrac{1}{k}, \\ v^2 = \dfrac{1}{\sqrt{1+k^2}} \end{cases}$$

Так как рассматриваемое движение равномерное, $x(t) = v\cos\theta t$ Дальность полета при этом $x(T) = \frac{k}{\sqrt[4]{(k^2+1)^3}}T = f(k)$, функция $f(k)$ должна быть максимизирована по k. Производная $f'(k)$ имеет единственный нуль, в котором и достигается максимум функции дальности полета.

Ответ: $k = \sqrt{2}$

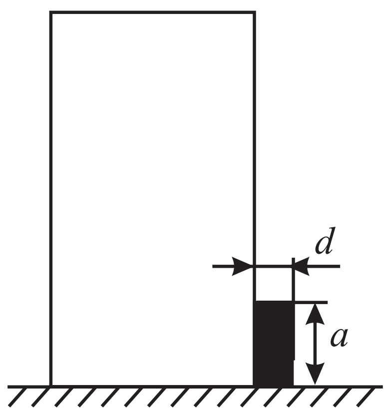
4.4 11 класс

Вариант №1.
Условия

1. Сухогруз вышел из порта А и двинулся строго на запад со скоростью 10 узлов (1 узел = 1 морская миля в час). Через 10 часов он сменил на-правление на северное и прибыл в порт Б еще через 10 часов. На следующий день он вышел из порта Б с той же скоростью V в юго-восточном направлении, одновременно с ним из порта А на юго-запад вышел катер со скоростью $U = 20$ узлов. Найти минимальное расстояние h между сухогрузом и катером. Ответ записать в милях, округлив до ближайшего целого.

2. Шар радиуса $R = 0.3$ м поднимается под действием силы Архимеда с большой глубины, испытывая сопротивление воды, пропорциональное скорости V движения шара $F = k\rho_0\pi R^2 V$, где ρ_0 — плотность воды, $k = 0.2$ м/с постоянная величина. Найти минимальную высоту над поверхностью воды, на которую не может подняться шар, выпрыгнув из воды, с какой бы большой глубины он не начал свое движение. В задаче можно считать, что сопротивление воздуха пренебрежимо мало, ускорение свободного падения равно $g = 10$ м/с^2 , а отношение плотности материала шара ρ к плотности воды известно $\dfrac{\rho}{\rho_0} = 0.5$.

3. Сосуд имеет форму прямоугольного параллелепипеда, заполнен газом при комнатной температуре $t_0 = 27°C$ и атмосферном давлении $P_0 = 10^5$ Па. Он жестко укреплен на полу. Внизу сосуда есть отверстие в форме квадрата со стороной $a = 10$ см , стороны которого вертикальны и горизонтальны. (см. рисунок). Брусок, лежащий на полу и совпадающий с отверстием по форме и размерам, плотно закрывает сосуд. Масса бруска $m = 10$ кг, толщина $d = 4$ см. На сколько градусов Δt необходимо изменить температуру газа, чтобы брусок начал двигаться наружу? Коэффициент трения между бруском и полом равен $\mu = 0.3$.



4. Ученый в некоторый момент t_0 начал измерять величину Y, характеризующую некоторое непрерывно происходящее во времени физическое явление. В результате экспериментов он пришел к выводу, что зависимость данной величины от времени описывается выражением

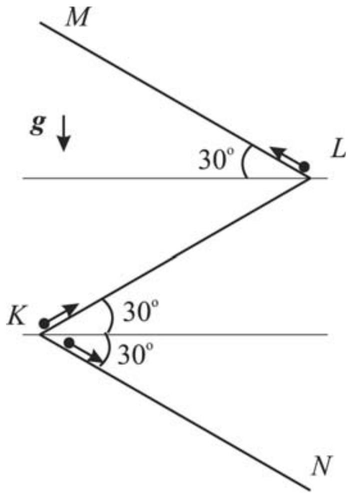
$$Y(t) = A(4 + \cos t)^{lg(6-\sin 2t+4\cos t-3\sin t)^2}.$$

Позднее, в момент времени $t_0 + T$, другой ученый, независимо от первого, приступил к изучению той же величины и пришел к выводу, что она изменяется по закону

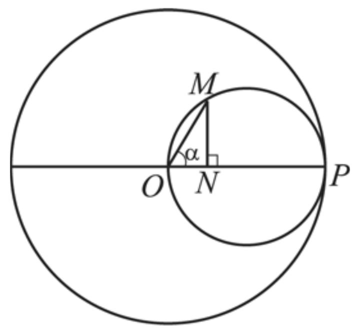
$$Y(t) = A(6 + \sin 2t - 3\cos t - 4\sin t)^{lg(17 - 8\sin t - \cos^2 t)}.$$

Оба ученых использовали верные часы и одну и ту же систему единиц измерения, а время каждый отсчитывал от начала своего эксперимента. При каких значениях T данные ученых совпадают?

5. По двум гладким наклонным полубесконечным плоскостям KL и LM с одинаковым углом $\alpha = 30°$ к горизонту запустили вверх материальные точки с одинаковой начальной скоростью. Третья точка движется равномерно по третьей плоскости KN под углом $\alpha = 30°$ к горизонту со скоростью $V = 30$ см/с в направлении точки N. С каким интервалом времени начали движение первые две точки, если все три указанные точки, дважды оказалась на одной вертикали? Принять g равным 10м/с^2, ответ дать в миллисекундах. Плоскость $KLMN$ вертикальна.

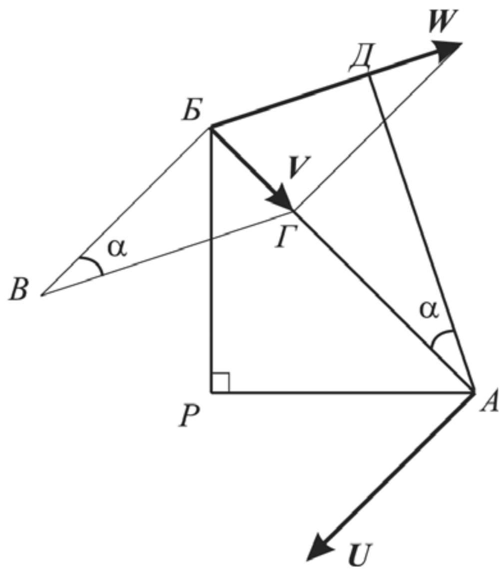


6. Диск диаметра 1 катается без проскальзывания внутри окружности диаметром 2. Найти все точки пересечения траекторий фиксированных на диске точек M и N(см. рисунок), если $\alpha = 60°$. В ответ записать количество точек пересечения.



Решения

1. Ломаная линия $АРБ$ ($АР$=$РБ$=100) — путь, который прошел сухогруз в первый день (см. рисунок). Заметим, что по условию задачи вектора $\vec{V}$ и $\vec{U}$, показанные на рисунке, перпендикулярны. Сделаем дополнительное построение $\vec{БВ} = \vec{U}$. В треугольнике $БВГ$ тангенс угла α равен $\dfrac{1}{2}$.



Рассмотрим движение сухогруза в системе отсчета, связанной с катером. Скорость относительного движения сухогруза $\vec{W}$ определяется из векторного закона сложения скоростей $\vec{W} = \vec{V} - \vec{U}$. Тогда искомое расстояние равно длине отрезка $АД$. Так как в треугольнике $АБД$ угол $ДАБ$ равен α, то $АД = БА\cos\alpha$.

Таким образом, получим $h = 40\sqrt{10}$. Оценку этого числа можно сделать, сравнив квадраты ближайших целых чисел к числу $(40\sqrt{10})^2 = 16000$. Заметим:

$$125^2 = (120+5)^2 = 120^2 + 2\cdot 120\cdot 5 + 25 = 15625,$$
$$126^2 = (125+1)^2 = 125^2 + 2\cdot 125\cdot 1 + 1 = 15876,$$
$$127^2 = (125+2)^2 = 125^2 + 2\cdot 125\cdot 2 + 4 = 16129$$

Таким образом, $126 < 40\sqrt{10} < 127$. Заметим, что число 126 находится ближе к числу $40\sqrt{10}$, так как $16000 < \left(\dfrac{126+127}{2}\right)^2 = (126,5)^2 = (126+0,5)^2 = 15876 + 126 + 0,25 = 16002,25$.

Ответ: 126 морских миль.

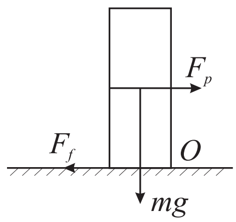
2. Пока шар в воде, на него действует три силы: сила тяжести $F_g = 4/3\pi R^3\rho_0 g$, сила Архимеда $F_a = 4/3\pi R^3\rho g$ и сила сопротивления $F_r = k\pi R^2\rho_0 V$. В начале движения сила сопротивления практически равна нулю и тело начинает всплывать с ускорением и продолжает ускоряться до тех пор, пока не выполнится условие $F_a - F_g - F_r = 0$. Отсюда найдем скорость установившегося движения $V = \dfrac{4R(\rho_o - \rho)g}{3k\rho_o} = 10$ м/с. Теперь найдем высоту максимального подъема $H = \dfrac{V^2}{2g} = 5$ м.

Следует заметить, что высота 5 м практически недостижима, так как скорость движения тела стремится к скорости установившегося движения асимптотически, то есть получится только если тело всплывает с бесконечно большой глубины и затрачивает при этом на подъем бесконечно большое время.

Ответ: 5 м.

3. При увеличении температуры давление будет увеличиваться по закону Шарля $P = P_o\dfrac{T}{T_o}$, откуда найдем связь приращения температуры Δt с приращением давления ΔP:

$$\Delta t = \frac{T_o \Delta P}{P_o} \tag{8}$$



Дополнительное давление ΔP создает силу давления $F_p = \Delta P a^2$. Если сила давления сравняется с силой трения скольжения $F_f = mg\mu = 30H$, то брусок начнет двигаться.

Если сила давления будет меньше, чем 30 Н, то брусок не сдвинется, но может перевернуться. Возможность переворота определяется равенством моментов рассматриваемых сил во вращении вокруг точки дальнего нижнего ребра бруска: $F_p\dfrac{a}{2} = \dfrac{mgd}{2}$. Отсюда получим $F_p = \dfrac{mgd}{a} = 40H$.

Так как $F_p > F_f$, то брусок не может перевернуться при силе давления меньше, чем 30Н. Это значит, что он начнет скользить при $F_p = F_f = 30H$. Тогда из (8) следует ответ: $\Delta t = 9°C$.

Ответ: $9°C$.

4. Преобразуем выражение $Y(t) = A(4+\cos t)^{\lg(6-\sin 2t+4\cos t-3\sin t)^2}$, полученное первым ученым, к виду

$$Y_1(t) = A(16+8\cos t+\cos^2 t)^{\lg(6-\sin 2t+4\cos t-3\sin t)} =$$

$$= A(17+8\cos t-\sin^2 t)^{\lg(6-\sin 2t+4\cos t-3\sin t)},$$

что после использования тождества $a^{\lg b} = b^{\lg a}$ приводится к виду

$$Y_1(t) = A(6-\sin 2t+4\cos t-3\sin t)^{\lg(17+8\cos t-\sin^2 t)}$$

Из условия задачи следует, что при искомых значениях Т, должно выполняться условие $Y_1(t+T) = Y_2(t)$, где через Y_2 обозначено выражение, полученное вторым ученым:

$$Y_2(t) = A(6+\sin 2t-3\cos t-4\sin t)^{\lg(17-8\sin t-\cos^2 t)}.$$

Так как условие $Y_1(t+T) = Y_2(t)$ должно выполняться для любого значения $t \geq 0$, и основания и показатели являются нетривиальными функциями времени, необходимо выполнение двух равенств: равенство оснований:

$$6 - \sin 2t + 4\cos t - 3\sin t = 6 + \sin 2(t+T) - 3\cos(t+T) - 4\sin(t+T) \quad (9)$$

и равенство показателей:

$$\lg(17 + 8\cos(t+T) - \sin^2(t+T)) = \lg(17 - 8\sin t - \cos^2 t)) \qquad (10)$$

Условия (9) и (10) должны выполняться для любого значения $t \geq T$. Подставим в (10) $t = 2\pi n$, тогда получим для определения возможных значений T уравнение $17+8\cos T-\sin^2 T = 17-8\sin 0-\cos^2 0$ или $8\cos T+\cos^2 T = 0$, которое сводится к простому уравнению $\cos T = 0$. Отсюда получим возможные значения $T = \dfrac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Проверка показывает, что только при четных k эти значения T обращают в тождества равенства (9) и (10).

Ответ: $T = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

5. Из условия задачи следует, что первые две точки движутся по наклонным плоскостям с ускорением, равным $a = g\sin\alpha$ и направленным против начальной скорости. Рассмотрим движение всех трех точек в проекции на горизонтальную ось:

$$\begin{cases} x_1(t) = -V_{0x}t + \dfrac{a_x t^2}{2} \\ x_2(t) = d + V_{0x}(t-\tau) - \dfrac{a_x(t-\tau)^2}{2} \\ x_3(t) = x_o + V\cos\alpha t \end{cases}$$

Здесь $a_x = a\cos\alpha$, $V_{0x} = V_0\cos\alpha$, V_0 —начальная скорость, d — расстояние между начальными положениями первых двух точек по горизонтали, τ — промежуток времени между началом движения первой и второй точки, x_0 — начальная координата третьей точки. По условию задачи в два различных момента времени t_1, t_2 горизонтальные координаты трех точек совпадают. Это значит, что числа t_1, t_2 являются корнями следующих уравнений:

$$\begin{cases} x_1(t) = x_3(t) \\ x_2(t) = x_3(t) \end{cases}$$

Из законов движения следует, что каждое из приведенных уравнений представляет собой квадратное уравнение относительно моментов времени. Эти два уравнения имеют одинаковые корни. Отсюда следует, что сумма этих уравнений

$$x_1(t) + x_2(t) = 2x_3(t)$$

имеет эти же корни. Подставив выражения для $x_1(t)$, $x_2(t)$ и $x_3(t)$, получим квадратное уравнение с нулевым старшим коэффициентом

$$\left(\frac{a_x}{2}-\frac{a_x}{2}\right)t^2+\left(-V_{0x}+V_{0x}+\frac{2a_x\tau}{2}-2V\cos\alpha\right)t+d-V_{0x}\tau-\frac{a_x\tau^2}{2}-2x_0=0.$$

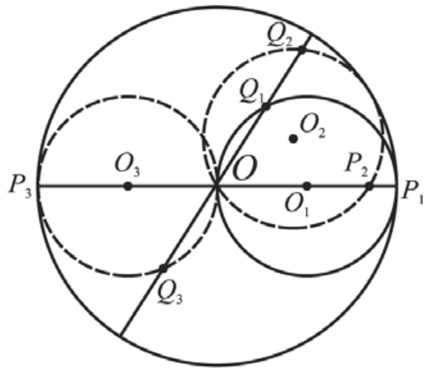
У линейного уравнения два различных корня может быть лишь в случае равенства нулю всех коэффициентов

$$a_x\tau-2V\cos\alpha=0,\quad d-V_{0x}-\frac{a_x\tau^2}{2}-2x_0=0$$

Из первого условия получим искомый результат $\tau=\dfrac{2V\cos\alpha}{a_x}=\dfrac{2V}{g\sin\alpha}$.

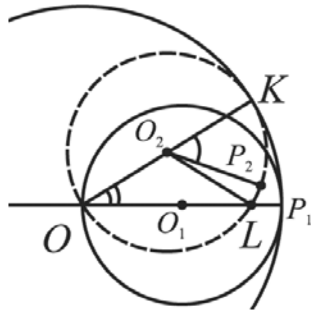
Ответ: 120 мс.

6. Решение этой задачи основано на очень красивой геометрической теореме Коперника. Формулировка теоремы: если по неподвижной окружности, касаясь ее изнутри, катится без проскальзывания другая окружность вдвое меньшего радиуса, то фиксированная точка подвижной окружности описывает диаметр неподвижной окружности.



Это проиллюстрировано на рисунке. Здесь показаны три последовательных положения центра подвижной окружности: O_1, O_2 и O_3. Зафиксированная на этой окружности точка P в процессе качения меньшей окружности по окружности с центром в точке O занимает соответственно положения P_1, P_2 и P_3 на диаметре. А точка Q, зафиксированная на подвижной окружности, будет двигаться по другому диаметру: ее соответствующие положения Q_1, Q_2 и Q_3.

Доказательство теоремы Коперника достаточно несложное. Рассмотрим два положения катящейся окружности (центры O_1и O_2), где P_1 и K — точки касания, и проанализируем положения фиксированной точки P (P_1 в первом случае и P_2 во втором).

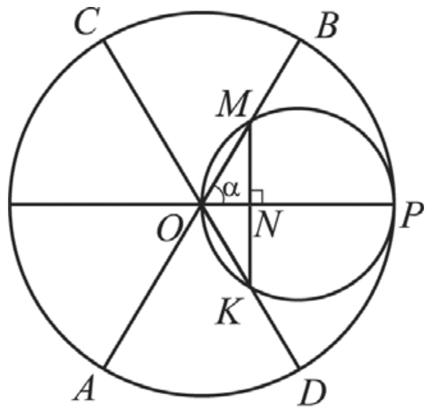


В силу отсутствия проскальзывания дуги KP_1 и KP_2 равны по длине. Поэтому, так как радиусы окружностей отличаются вдвое, то $\angle KO_2P_2=2\angle KOP_1$.

По теореме о вписанном угле $\angle KO_2L=2\angle K0P_1$, поэтому точки L и P_2 совпадают, т.е. точка P_2 лежит на диаметре, проходящем через P_1.

Вернемся в поставленной задаче.

Из теоремы Коперника следует, что точка M все время находится на диаметре AB, а точка K — на диаметре CD. В процессе движения отрезом MK не изменяет своей длины (т.к. он целиком находится на катящемся диске). Наша задача: проследить за серединой отрезка — точкой N. При этом нас интересуют моменты, когда точка N пересекает диаметр AB (ведь именно он является траекторией точки M).



Если диск катится против часовой стрелки, то точка M вначале движется по диаметру AB к точке B, затем возвращается назад и движется к O, а потом к A. Точка K будет двигаться вначале к точке O, затем к C, а потом обратно к D. В момент, когда траектория N пересекает AB, весь отрезок MK (а значит, и точка K) также должен находиться на AB, так как на AB в этот момент лежат две точки отрезка MK. Так как K движется по диаметру CD, то в момент пересечения K находится в точке O.

Поэтому точка N в момент пересечения AB находит от точки O на расстоянии, равном NK : $NK = OK\sin\alpha = OP\cos\alpha\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

Таких пересечений всего два: одно на отрезке OB, второе — на отрезке AO.

Ответ: Два пересечения.

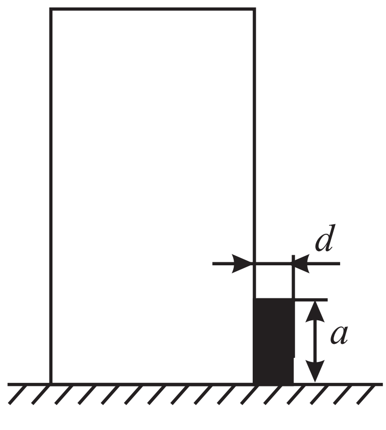
Вариант №2

Условия

1. Катер вышел из порта А и двинулся строго на север со скоростью 30 узлов (1 узел = 1 морская миля в час). Через 10 часов он сменил направление на восточное и прибыл в порт Б еще через 10 часов. На следующий день он вышел из порта Б с той же скоростью в юго-западном на-правлении, одновременно с ним из порта А на юго-восток вышел глиссер со скоростью 90 узлов. Найти минимальное расстояние между катером и глиссером. Ответ записать в милях, округлив до ближайшего целого.

2. Шар радиуса $R = 0.2$ м поднимается под действием силы Архимеда с большой глубины, испытывая сопротивление воды, пропорциональное скорости V движения шара $F = k\rho_o \pi R^2 V$, где ρ_o — плотность воды, $k = 0.2$ м/с постоянная величина. Найти минимальную высоту над поверхностью воды, на которую не может подняться шар, выпрыгнув из воды, с какой бы большой глубины он не начал свое движение. В задаче можно считать, что сопротивление воздуха пренебрежимо мало, ускорение свободного падения равно $g = 10$ м/с^2, а отношение плотности материала шара ρ к плотности воды известно $\dfrac{\rho}{\rho_o} = 0.4$.

3. Сосуд имеет форму прямоугольного параллелепипеда, заполнен газом при комнатной температуре $t_o = 27°C$ и атмосферном давлении $P_o = 10^5$ Па. Он жестко укреплен на полу. Внизу сосуда есть отверстие в форме квадрата со стороной $a = 10$ см , стороны которого вертикальны и горизонтальны. (см. рисунок). Брусок, лежащий на полу и совпадающий с отверстием по форме и размерам, плотно закрывает сосуд. Масса бруска $m = 10$ кг, толщина $d = 2$ см. На сколько градусов Δt необходимо изменить температуру газа, чтобы брусок начал двигаться наружу? Коэффициент трения между бруском и полом равен $\mu = 0.3$.



4. Ученый в некоторый момент t_o начал измерять величину Y, характеризующую некоторое непрерывно происходящее во времени физическое явление. В результате экспериментов он пришел к выводу, что зависимость данной величины от времени описывается выражением

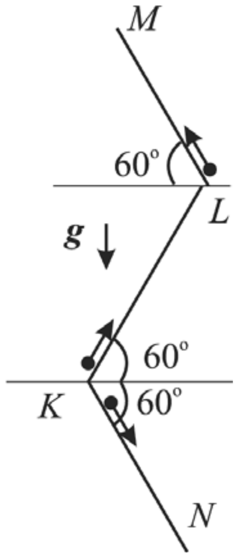
$$Y(t) = A(3 + \sin t)^{\lg(20 - 6\sin 2t + 10\cos t - 4\sin t)^2}.$$

Позднее, в момент времени $t_o + T$, другой ученый, независимо от первого, приступил к изучению той же величины и пришел к выводу, что она изменяется по закону

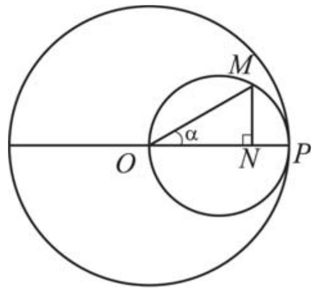
$$Y(t) = A(20 - 6\sin 2t - 10\cos t + 4\sin t)^{\lg(9-6\sin t+\sin^2 t)}.$$

Оба ученых использовали верные часы и одну и ту же систему единиц измерения, а время каждый отсчитывал от начала своего эксперимента. При каких значениях T данные ученых совпадают?

5. По двум гладким наклонным полубесконечным плоскостям KL и LM с одинаковым углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту запустили вверх материальные точки с одинаковой начальной скоростью. Третья точка движется равномерно по третьей плоскости KN под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту со скоростью $V = 30$ см/с в направлении точки N. С каким интервалом времени начали движение первые две точки, если все три указанные точки, дважды оказалась на одной вертикали? Принять g равным 10 м/с^2, ответ дать в миллисекундах. Плоскость $KLMN$ вертикальна.



6. Диск диаметра 1 катается без проскальзывания внутри окружности диаметром 2. Найти все точки пересечения траекторий фиксированных на диске точек и (см. рисунок), если $\alpha = 30^\circ$. В ответ записать количество точек пересечения.



Ответы:

1. 402 мили
2. 3,2 м
3. $\Delta t = 6^\circ C$
4. $T = \pi + 2\pi n,\ n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$
5. $2V/(g\sin\alpha) \approx 46$ мс
6. 2 пересечения

5 Олимпиада 2009 года

5.1 7 класс

Условия

1. Поезд въезжает на мост в течение 6 секунд, а полностью проходит мост за 20 секунд. Определите длину поезда, считая длину моста равной 350 м.

2. Как семикласснику по часам со стрелками определить стороны света в сегодняшний солнечный день, зная, что до перехода на летнее время в 13 часов Солнце находится на юге, а в 7 утра — на востоке.

3. В США принято указывать температуру по шкале Фаренгейта. По этой шкале вода замерзает при 32 F, а кипит при 212 F. Американский семиклассник сообщил утром маме, что не пойдет в школу — у него температура $97,88$ F. Является ли эта температура повышенной, нормальной или пониженной?

4. Если один арбуз больше другого в обхвате в полтора раза, то во сколько раз отличаются их массы? Для справки: арбузы очень вкусные и с тонкой коркой.

5. К некоторому объему холодной воды долили такой же объем горячей воды, и температура смеси увеличилась на 12°C. Долили еще столько же горячей воды той же температуры, и температура повысилась еще на 4°C. На сколько градусов повысится температура смеси, если еще раз долить столько же горячей воды той же температуры?

Решения

1. Условия задачи переводятся на язык математики системой двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} l = 6V, \\ l + 350 = 20V \end{cases}$$

При этом l — длина моста — измеряется в метрах, а V — скорость поезда — в метрах в секунду. Эту систему можно решить, например, вычтя первое уравнение из второго.

Ответ: $l = 150$ м, $\quad V = 25$ м/с

2. За сутки Солнце делает один оборот по небосводу, а часовая стрелка — два оборота по циферблату. Это значит, что стрелка часов вращается в два раза быстрее направления на Солнце. При переходе на летнее время стрелки переводят на 1 час вперед, т. е. летом Солнце на юге — в $14:00$, а на востоке в $08:00$.

Направим часовую стрелку на Солнце. Угол между этим направлением и югом в два раза меньше, чем между часовой стрелкой и направлением на деление «2». Поэтому на юг будет указывать биссектриса угла между часовой стрелкой и направлением на деление «2».

Ответ: На юг указывает биссектриса угла между часовой стрелкой, направленной на Солнце, и направлением на деление «2». До 14:00 угол отсчитывается от стрелки к делению, после 14:00 от деления к стрелке.

3. Так как обе шкалы температур равномерны (величины делений термометров одинаковы по всей шкале), они связаны линейным законом: $°C = aF - b$ Из условий задачи определяются константы a,b, и следует формула связи: $°C = ((F-32):9)\cdot 5$ При подстановке данных в эту формулу, получим, что у мальчика нормальная температура $36,6°C$.

Ответ: $36,6°C$

4. Длина окружности «обхвата» L пропорциональна радиусу $L = 2\pi R$. Объем пропорционален кубу радиуса, значит, так как радиус большего арбуза в 1,5 раза больше, а объем в $(1,5)^3$. Так как корка очень тонкая и ее объемом можно пренебречь, а внутренности у всех арбузов одинаковой плотности, то массы так же отличаются в $(1,5)^3 = (3/2)^3$ раза.

Ответ: $\dfrac{27}{8}$

5. Введем обозначения t_c — температура холодной воды, t_h — температура горячей воды, t_1, t_2, t_3 — температура воды после 1-й, 2-й и 3-й процедуры смешивания соответственно. Из условия задачи следует, что $t_1 - t_c = 12°C$, $t_2 - t_1 = 4°C$, а найти надо $t_3 - t_2$. Из уравнения баланса тепла:

$$t_1 - t_c = t_h - t_1 \Rightarrow 2t_1 = t_c + t_h$$

$$2(t_2 - t_1) = t_h - t_2 \Rightarrow 3t_2 = 2t_h + t_c$$

$$3(t_3 - t_2) = t_h - t_3 \Rightarrow 4t_3 = 3t_h + t_c$$

Первое из этих соотношений дает связь между температурами холодной и горячей воды: $t_h - t_c = 24°C$ И этого достаточно. Из второго и третьего уравнения баланса тепла следует, что $t_3 - t_2 = \dfrac{t_h - t_c}{12} = 2°C$.

Заметим, что для решения задачи достаточно знания одного условия $t_1 - t_c = 12$, но второе условие, $t_2 - t_1 = 4$, не противоречит нашему решению.

Ответ: $2°C$

5.2 8 класс

Условия

1. Можно ли определить объем полости, заполненной воздухом, в деревянном кубе со стороной a, если он плавает в воде, погрузившись на одну десятую своего объема? Считайте, что плотность дерева в полтора раза меньше плотности воды, а весом воздуха можно пренебречь.

2. Чайка, летящая навстречу лайнеру, покрывает путь от носа до кормы за 12 с. Затем она разворачивается и пролетает мимо лайнера за 60 с. За какое время лайнер пройдет мимо сидящей на воде чайки?

3. Восьмиклассник в поездке по железной дороге замерил, что поезд проходит ровно два километра за одну минуту и двадцать секунд. За это же время чайная ложка в стакане отсчитала 80 стыков, звякая всякий раз, когда колеса вагона проходили стык между рельсами. Восьмиклассник заметил, что звякание происходит примерно раз в секунду и решил таким образом отсчитывать время. Спустя 2460 звяканий ложки, он решил, что прошла 41 минута, и сравнил свои измерения с мамиными часами. Оцените, как сильно и в какую сторону он мог ошибиться.

4. Две свечи одинаковой длины были зажжены одновременно. Одна свеча полностью сгорает за 6 часов, другая — за 8 часов. Порыв ветра задул свечи. От первой свечи остался огарок в 3 раза длиннее, чем от второй. Сколько часов горели свечи?

5. К некоторому объему воды, имеющему температуру 10°C, долили такой же объем кипящей воды. После перемешивания снова долили этот же объем кипящей воды. После какого количества доливаний температура воды после очередного доливания изменится не более, чем на 1°C?

Решения

1. Пусть V_0 — объем полости. Обозначим ρ_w — плотность дерева, ρ_0 — плотность воды. По условию $\rho_0 = \dfrac{3}{2}\rho_w$.

Запишем условие плавания тела:

$$\frac{a^3}{10}\rho_0 g = (a^3 - v_0)\rho_w g \Rightarrow V_o = a^3\left(1 - \frac{1}{10}\frac{\rho_0}{\rho_w}\right)$$

Ответ: $V_0 = \dfrac{17}{20}a^3$.

2. Пусть V — скорость чайки, U — скорость лайнера, $t_1 = 12$ с — время полета к корме, $t_2 = 60$ с — время полета обратно, L — длина лайнера.

Условия задачи на этом языке запишутся так:

$$\begin{cases} (V+U)t_1 = L \\ (V-U)t_2 = L \end{cases}$$

Вопрос запишем так: «Найти такое t, что $Ut = L$».

Решая полученную систему уравнений, находим $U = \dfrac{L}{2}(\dfrac{1}{t_1} - \dfrac{1}{t_2})$ Окончательно будем иметь $t = \dfrac{L}{U} = \dfrac{2t_1t_2}{t_2 - t_1}$. После подстановки числовых значений получим: $t = 30$ с.

Ответ: 30 с

3. Первое предложение условия позволяет точно определить скорость поезда: $V = 25$ м/с. На двухкилометровом участке, на котором производился замер времени оказалось 80 стыков, то есть длина участка не меньше 79 рельсов (стыки по краям участка) и строго меньше 81 рельса. Следовательно, длина рельса лежит в интервале $(\dfrac{2000}{81}$м, $\dfrac{2000}{79}$м].

Когда школьник услышал 2460 звяканий, был пройдено 2460 ± 1 рельсов, то есть пройдено расстояние от $2459 \cdot 2000/81$ м до $2461 \cdot 2000/79$ м.

Зная скорость поезда, найдем время, которое покажут «правильные» мамины часы. Могло пройти от $2459 \cdot 80/81$ с до $2461 \cdot 80/79$ с, т.е. от 40 мин. 28 с до 41 мин. 32 с.

Ответ: примерно 32 секунды в обе стороны.

4. Пусть время сгорания первой свечи — T_1, а второй — T_2, H — начальная длина свечи. Свечи горят равномерно по законам:

$$h_1 = H - \frac{H}{T_1}t, \quad h_2 = H - \frac{H}{T_2}t$$

Т. к. вторая свеча сгорает медленнее, то она будет все время длиннее, т. е. $h_1 < h_2$ для любого $t > 0$. Поэтому из условия следует: $3\left(H - \dfrac{H}{T_1}t_0\right) = H - \dfrac{H}{T_2}t_0$ где $t = t_0$ — искомое время горения свечей.

Отсюда $t_0 = \dfrac{2T_2T_1}{3T_2 - T_1} = \dfrac{16}{3}$часа $= 5$ часов 20 минут.

Ответ: 5 час 20 минут.

5. Используем обозначения задачи №5 для 7-го класса 2009 года.

Из условия поставленной задачи следует, что $t_c = 10°\text{C}$, $t_h = 100°\text{C}$. Кроме того на n-ом шаге смешивания связь между температурой до этого шага t_{n-1} и после t_n определяется формулой:

$$(n+1)t_h = nt_h + t_c \Rightarrow tn - 1 = t_h - \frac{t_h - t_c}{n}, t_n = t_h - \frac{t_h - t_c}{n+1} \Rightarrow t_n - t_{n-1} = \frac{t_h - t_c}{n(n+1)}$$

Условие задачи сводится к неравенству:

$$\frac{t_h - t_c}{n(n+1)} \le 1 \Rightarrow \frac{90}{n(n+1)} \le 1 \Rightarrow n \ge 9.$$

Ответ: $n = 9$

5.3 9 класс

Условия

1. Теплоход идет из Ярославля в Астрахань без остановок пять суток, а обратно — на сутки больше. Сколько суток из Ярославля в Астрахань будет плыть плот?

2. Девятиклассник любил зимнюю рыбалку. Но он знал, что если толщина льда $H < 15$ см, то ему выходить на лед опасно. Для измерения толщины льда мальчик встал около берега на льдину площадью $S = 4,5$ м^2 и померил толщину льда над поверхностью воды — $h = 1$ см. Безопасно ли выходить на лед плотностью $\rho_i = 920$ кг/м^3 девятикласснику массой $M = 45$ кг? Плотность воды $\rho_w = 1000$ кг/м^3

3. Два шарика одинакового радиуса без начальной скорости были сброшены с одной и той же высоты над поверхностью Земли. За время, требуемое каждому из них, чтобы достичь поверхности с той же начальной высоты при отсутствии атмосферы, первый пролетел половину, а второй — четверть этой высоты. Найдите отношение масс шариков.

4. К некоторому объему воды, имеющему температуру 10°C, долили такой же объем кипящей воды. После перемешивания снова долили этот же объем кипящей воды. После какого количества доливаний температура воды превысит 99°C?

5. На стенку массой M одновременно налетают очень много шариков. Самый большой имеет массу m и скорость v. Если шарики выстроить в ряд по убыванию массы, то массы соседей будут различаться в 2 раза, а скорость более легкого будет в 3 раза меньше скорости тяжелого соседа. Оцените количество выделившейся теплоты при абсолютно неупругом ударе всех шариков о стенку.

Решения

1. Обозначим V — скорость теплохода, U — скорость течения (именно с такой скоростью будет плыть плот), T_1 — время, затраченное теплоходом на дорогу из Ярославля в Астрахань, а T_2 — время на дорогу обратно. Из данных задачи следует, что $S = (V+U)T_1$, $S = (V-U)T_1$, $S = UT_o \Rightarrow U = \frac{S}{2}(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}) \Rightarrow T_o = \frac{2T_2T_1}{T_2 - T_1} = 60$ суток.

Ответ: 60 суток.

2. Из условия плавания льдины (сила Архимеда компенсирует вес мальчика и силу тяжести самой льдины): $Mg + rho_i HSg\rho_i = (H-h)Sg\rho_w$ найдем искомую толщину льда

$$H = \frac{M}{S(\rho_w - \rho_i)} + h\frac{\rho_w}{\rho_w - \rho_i}$$

Подставив численные значения из условия, получаем $H = 25$ см и убеждаемся, что выходить на лед безопасно. Но мы, тем не менее, не рекомендуем читателям повторять этот эксперимент...

Ответ: безопасно.

3. По условию предполагаем постоянство силы сопротивления f. Из второго закона Ньютона для тел массами m_1, m_2 получим выражения для их ускорений a_1, a_2: $a_1 = g - \frac{F}{m_1}$, $a_2 = g - \frac{F}{m_2}$
Так как путь, пройденный телом, движущимся равноускоренно без начальной скорости за фиксированное время пропорционален ускорению, из второго предложения условия получаем: $g = 2a_1 = 4a_2$. Отсюда $m_1 = \frac{3}{2}m_2$.

Ответ: 3/2.

4. Из уравнения баланса тепла в обозначениях задачи №5 7 и 8 класса класса: $t_1 - t_c = t_h - t_1 \Rightarrow 2t_1 = t_c + t_h$ $2(t_2 - t_1) = t_h - t_2 \Rightarrow 3t_2 = 2t_h + t_c$ $3(t_3 - t_2) = t_h - t_3 \Rightarrow 4t_3 = 3t_h + t_c$ и т.д.

Таким образом, $(n+1)t_n = nt_h + t_c \Rightarrow t_{n-1} = t_h - \frac{t_h - t_c}{n}$, $t_n = t_h - \frac{t_h - t_c}{n+1}$.

Условие задачи сводится к неравенству $\frac{t_h - t_c}{n+1} < 1 \Rightarrow \frac{90}{n+1} < 1 \Rightarrow n > 89$.

Ответ: После 90 переливаний.

5. Будем считать, что частиц достаточно много, чтобы оценивать их общую массу S_m, импульс S_p и энергию S_k по формулам бесконечной геометрической прогрессии: $S_m = 2m$, $S_p = \dfrac{6mv}{5}$, $S_k = \dfrac{9mv^2}{17}$

Для описания процесса соударения запишем закон сохранения импульса: $S_p = U(M + S_m)$; где U — скорость стенки и шариков после абсолютно неупругого удара. Этот закон выполнен, так как внешние силы отсутствуют.

Из закона изменения механической энергии определим выделение тепловой энергии: $\dfrac{(M + S_m)U^2}{2} + Q = S_k$, откуда после алгебраических преобразований получается $Q = \dfrac{(225M + 144m)m}{25(M + 2m)}v^2$.

Ответ: $\dfrac{(225M + 144m)m}{25(M + 2m)}v^2$

5.4 10 класс

Условия

1. Сплав двух металлов в воде теряет в весе 25%. Найдите концентрации металлов в сплаве, если плотность первого металла в 2 раза, а второго в 7 раз больше плотности воды?

2. Вдоль вертикального шеста, опирающегося на шероховатую горизонтальную поверхность, приложена сила F. Шест начали постепенно наклонять, сохраняя неизменной силу, приложенную к торцу. Найдите угол наклона шеста к горизонтали, при котором шест начнет скользить по поверхности. Вес шеста P в $n = 2$ раз меньше, чем сила F, коэффициент трения торца шеста и поверхности $k = 1/3$.

3. С вышки без начальной скорости был сброшен предмет. Время от момента сброса до приема звука падения на поверхность Земли составило t. Найдите высоту вышки в предположении, что сопротивлением воздуха можно пренебречь, скорость звука равна V, ускорение свободного падения — g.

4. Один моль одноатомного идеального газа совершает циклический процесс, в котором давление газа зависит от времени по закону $P(t) = P_0 + \Delta P \sin(2\pi t/T)$, а его объем $V(t) = V_0 + \Delta V \cos(2\pi t/T)$. Какова ее средняя мощность за цикл, если $\Delta P = 0,1$ атм, $\Delta V = 2$ л, $T = 1$ с?

5. Зависимость скорости материальной точки от времени при значениях времени от нуля до $2t_o$ выражается формулой $V(t) = V_o\left(1 - \sqrt{1 - (t/t_o - 1)^2}\right)$. Определите среднюю скорость точки в этот промежуток времени.

Решения

1. Введем обозначения: x, y — объемы первого и второго металла соответственно; ρ_1, ρ_2 — плотности первого и второго металла соответственно. Из определения плотности: $x\rho_1 + y\rho_2 = M$.

Из закона Архимеда следует: $(x + y)\rho_w = \Delta M$.

Условие задачи можно выразить соотношением: $\dfrac{M}{\Delta M} = 4$.

Из перечисленных условий следует: $x = \dfrac{\Delta M\rho_2 - M\rho_w}{\rho_w(\rho_2 - \rho_1)}$, $y = \dfrac{-\Delta M\rho_1 + M\rho_w}{\rho_w(\rho_2 - \rho_1)}$ $\Rightarrow \dfrac{x\rho_1}{y\rho_2} = 3/7$.

Ответ: 30%, 70%.

2. В проекциях на горизонтальную ось в момент начала скольжения выполнено следующее уравнение: $F\cos\alpha = k(P + F\sin\alpha)$.

Решая это линейное неоднородное тригонометрическое уравнение, например, методом введения вспомогательного угла, получаем следующий результат:

$$\alpha = \arccos\frac{k}{n\sqrt{k^2+1}} - \arccos\frac{1}{\sqrt{k^2+1}}.$$

Для указанных числовых значений имеем $\alpha = \arccos\dfrac{1}{2\sqrt{10}} - \arccos\dfrac{3}{\sqrt{10}}$.

Ответ: $\alpha = \arccos\dfrac{1}{2\sqrt{10}} - \arccos\dfrac{3}{\sqrt{10}}$.

3. В соответствии с условием задачи получаем иррациональное уравнение для высоты падения:

$$\sqrt{\frac{2h}{g}} + \frac{h}{V} = t,$$

имеющее единственное решение.

Ответ: $h = Vt + \dfrac{V^2}{g} - \sqrt{\dfrac{2V^3t}{g} + \dfrac{v^4}{g^2}}$.

4. Выберем в качестве масштаба измерения давления ΔP, а в качестве единицы объема ΔV. Тогда единицей работы будет $\Delta P\Delta V$. Запишем зависимость давления и объема от времени с учетом введенных единиц.

$$P' = \frac{P}{\Delta P} = \frac{P_0}{\Delta P} + \sin(2\pi t/T);\ V' = \frac{V}{\Delta V} = \frac{V_0}{\Delta V} - \cos(2\pi t/T)$$

В плоскости (P', V') указанный процесс изображается окружностью

$$\left(P' - \frac{P_0}{\Delta P}\right)^2 + \left(V' - \frac{V_0}{\Delta V}\right)^2 = \sin^2(2\pi t/T) + \cos^2(2\pi t/T) = 1.$$

Заметим, что работа за цикл положительна (точка, изображающая состояние газа, движется по часовой стрелке). Величина работы численно равна значению площади фигуры, заключенной внутри цикла, то есть, в нашем случае, единичного круга. Таким образом, работа, совершаемая машиной за цикл, равна π. Так как единица работы равна $\Delta P \Delta V$, то в итоге получим: $A = \pi \Delta P \Delta V$.

Среднюю мощность найдем разделив работу, совершаемую за цикл, на длительность этого цикла. Период изменения давления и объема, как видно из условия, равен T, таким образом, получаем $\overline{N} = \pi \Delta P \Delta V / T = 63$ Вт.

Ответ: 63 Вт.

5. Средняя скорость определяется как отношение расстояния, пройденного за некоторый промежуток времени к величине этого промежутка, таким образом следует определить расстояние, пройденное исследуемой точкой за $2t_0$. Перепишем зависимость скорости от времени:

$$\left(\frac{v}{v_0} - 1\right)^2 + \left(\frac{t}{t_0} - 1\right)^2 = 1.$$

Это означает, что в переменных t/t_0, v/v_0 график зависимости скорости от времени есть части окружности радиуса 1 с центром в точке $(1; 1)$. Вид формулы в условии позволяет заключить, что нас интересует нижняя полуокружность. Расстояние, пройденное точкой, есть площадь, заключенная между графиком $v/v_0(t/t_0)$ и осью абсцисс. Эту площадь легко найти из геометрических соображений $S = 2 - \dfrac{\pi}{2}$. Так как скорость в данном случае измеряется в единицах v_0, а время — t_0, то расстояние будет измеряться в $v_0 t_0$, поэтому окончательно получим $S = \left(2 - \dfrac{\pi}{2}\right) v_0 t_0$.

По определению средней скорости $\overline{v} = \left(1 - \dfrac{\pi}{4}\right) v_0$.

Ответ: $\left(1 - \dfrac{\pi}{4}\right) v_0$.

5.5 11 класс

Вариант №1
Условия

1. Шарик массой $m = 10$ г падает с большой высоты без начальной скорости. Численное значение силы сопротивления среды в ньютонах определяется формулой $|F| = 10^{-3}v^2$, где v — значение модуля скорости точки в метрах в секунду. Вычислите приближенно, за какое время точка пройдет первый сантиметр и первый километр пути? Принимаемые предположения обоснуйте.

2. Планета радиуса R с расстояния h от ее поверхности видна под некоторым плоским углом. На какое расстояние надо приблизиться наблюдателю к планете, чтобы этот угол увеличился вдвое? Имеет ли задача решение, если $h/R = \log_2 6$?

3. Вдоль окружности цирковой арены (которая, как известно, имеет диаметр 13 метров) против часовой стрелки бегают болонка и пудель. Болонка делает полный круг на 10 секунд медленней пуделя и поэтому совершает в минуту на 3 круга меньше. В начальный момент собаки находятся в одной точке. а) Чему равно расстояние между ними через 6 секунд? б) Если в начальный момент времени собачек «связать» резинкой длиной 11,5 метров, натянется ли резинка через 6 секунд? в) А если длина резинки равна 10,5 метров?

4. Прямая призма, изготовленная из однородного материала, основанием которой является неравнобедренная трапеция, лежит одной из своих боковых граней на гладкой поверхности. Объясните, как с помощью циркуля и линейки найти такую точку основания призмы, чтобы под действием силы, приложенной в этой точке перпендикулярно основанию, призма двигалась поступательно.

5. По реке с постоянными скоростями плывут два катера, каждый строго по своей прямой линии. В некоторый момент времени первый из них оказался в точке A, а второй — в точке B. Причем направление течения реки в этот момент времени составило угол 60° к направлению $\overrightarrow{AB}$. Через некоторое время катера встретились в точке C. Оказалось, что треугольник ABC прямоугольный равнобедренный с вершиной в точке A. Найдите минимальное отношение собственной скорости второго катера к скорости реки, при котором это осуществимо. Ответ выразите виде дестятичной дроби и округлите до сотых долей.

6. Две точки движутся по одной окружности без трения по инерции, сталкиваясь друг с другом и испытывая при столкновении абсолютно упругий удар. Найдите все возможные значения отношений масс этих точек, если их скорости относятся как $4 : 3$ и известно, что сталкиваются они в одной и той же точке на окружности. При каких значениях отношения скоростей задача определения отношения масс имеет хотя бы одно решение?

Решения

1. Предположим, что на первом сантиметре пути сила сопротивления не существенна. Действительно, если бы ее совсем не было, то шарик приобрел бы скорость $V = \sqrt{2gh} \approx 0,45$ м/с (через h обозначен 1 сантиметр). При такой скорости сила сопротивления составляет $F = 2 \cdot 10^{-4}$ Н, что в 500 раз меньше силы тяжести. Таким образом, пользуясь формулой для скорости тела при свободном падении, получаем приближенно время, за которое шарик пролетит первый сантиметр $t = \sqrt{2h/g} \approx 0,045$ с.

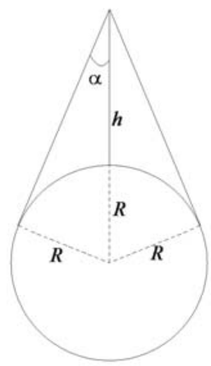
С увеличением скорости растет сила сопротивления движению. Существует скорость V_1, с которой шарик может двигаться равномерно. Найдем ее:

$$mg = F \Rightarrow V_1 = 10 \text{ м/с}.$$

Такой скорости свободно падающее тело достигнет за одну секунду. То есть, за одну секунду тело разгоняется почти до скорости V_1 , и затем движется практически равномерно. Двигаясь со скоростью V_1, шарик пройдет один километр за 100 секунд. Видно, что время разгона много меньше этой величины. Таким образом, 100 секунд можно считать ответом.

Ответ: 0,045 с; 100 с.

2. По условию $\sin\alpha = R/(R+h)$; $\sin 2\alpha = R/(R+h_1)$, где h_1 — новое расстояние до планеты.



Т. к. $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$, что при $\alpha \le \pi/4$ равно $2R/(R+h)\sqrt{1-(R/(R+h))^2}$, то получаем уравнение:

$$\frac{2R}{R+h}\sqrt{1-\left(\frac{R}{R+h}\right)^2} = \frac{R}{R+h_1}.$$

Это уравнение при выполнении условия $\dfrac{R}{R+h} \le \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (т. е. $h/R \ge \sqrt{2}-1$) имеет решение:

$$R + h_1 = \frac{(R+h)^2}{2\sqrt{(R+h)^2 - R^2}}.$$

Задача может не иметь решения, если $\alpha > \dfrac{\pi}{4}$, т.к. в этом случае 2α — тупой. При заданных в условии числовых значениях ответ на второй вопрос положительный, т.к. $\log_2 6 > 1 > \sqrt{2}-1$.

Ответ: а)$h_1 = \dfrac{(R+h)^2}{2\sqrt{(R+h)^2 - R^2}} - R$; б) имеет.

3. Пусть пудель пробегает круг за t секунд, а болонка — за $t+10$. Тогда

$$\frac{60}{t} - 3 = \frac{60}{t+10} \Leftrightarrow t = 10\text{с}$$

Значит, за одну секунду пудель пробегает $1/10$ круга, а болонка —$1/20$. Поэтому через 6 секунд длина дуги, разделяющей собачек, будет равна $\alpha = 6\,(1/10 - 1/20)\cdot 2\pi = 3\pi/5$. Искомое расстояние между ними равно $2R\sin\frac{\alpha}{2} = 13\sin\frac{3\pi}{10}$ (метров).

Для ответа на вопрос б) достаточно воспользоваться монотонностью синуса $13\sin\frac{3\pi}{10} < 13\sin\frac{3\pi}{9} = \frac{13\sqrt{3}}{2}$ и числовой оценкой $\frac{13\sqrt{3}}{2} < 11,5$, истинность которой очевидна ($13\sqrt{3} < 23 \Leftrightarrow 507 < 529$).

Ответ на вопрос в) требует более тонкой оценки. Нужно найти значение $\cos\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$ (например, из решения уравнения $\sin 2x = \sin 3x$).

Далее, так как $\sin\frac{3\pi}{10} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{10}\right) = \cos\frac{\pi}{5}$, то расстояние равно $\frac{13(\sqrt{5}+1)}{4}$, что больше, чем $\frac{42}{4} = 10,5$.

Ответ: а) $13\sin\frac{3\pi}{10}$; б) не натянется; в) натянется.

4. Точка приложения силы, обеспечивающей плоскопараллельное движение призмы по плоскости, должна находиться в центре масс основания. Четырехугольник основания разбивается одной из диагоналей на два треугольника, центр масс каждого находится как точка пересечения медиан (с помощью циркуля и линейки это сделать несложно). Эти две точки соединяются отрезком №1, на котором должен находиться центр масс основания. Затем четырехугольник разбивается на два треугольника другой диагональю, и центры масс этих треугольников также соединяются отрезком, который обозначается №2. Центр масс основания находится в точке пересечения отрезков №1 и №2.

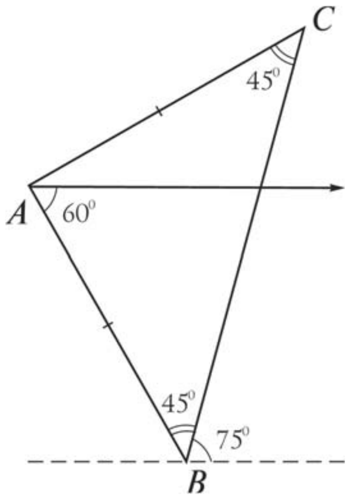
5. Для того чтобы второй катер из точки B смог попасть в точку C, вектор $\vec{V_2}+\vec{U}$ (здесь $\vec{V_2}$ — скорость второго катера, $\vec{U}$ — скорость реки) должен быть направлен вдоль BC.

Это может быть реализовано только при выполнении условия $V_2 = U\sin 75^\circ$.

Поэтому, т. к. $\sin 75^\circ = \cos 15^\circ = \sqrt{\frac{1+\cos 30^\circ}{2}} = \frac{\sqrt{2+\cos 30^\circ}}{2} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$, то $\frac{V_2}{U} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$.

Ответ: $\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} \approx 0,97.$

6. Пусть в момент перед очередным столкновением оказалось, что точка m_2 имеет скорость $V_2^0 > 0$, а точка m_1 — V_1^0 (любого знака, направление отсчета на окружности фиксировано).



Тогда для скоростей V_1, V_2 первой и второй точки соответственно после столкновения будет:

$$\begin{cases} m_1V_1 + m_2V_2 = m_1V_1^0 + m_2V_2^0 \\ m_1\left(V_1\right)^2 + m_2\left(V_2\right)^2 = m_1\left(V_1^0\right)^2 + m_2\left(V_2^0\right)^2 \end{cases}.$$

Откуда получим: $V_1 - V_2 = V_2^0 - V_1^0 \;\Rightarrow\; |V_{\text{отн}}| = \text{const}$.

Интервал времени между столкновениями определяется соотношением $T = 2\pi r/\left(V_2^0 - V_1^0\right)$. Здесь r — радиус окружности и полагается, что $V_2^0 > V_1^0$. Если $V_1^0 < 0$, то $T < 2\pi r/V_i^0,\ i = 1, 2$. Это значит, что T меньше, чем время, за которое любая из точек может сделать полный оборот. Это противоречит условию задачи. Значит, $V_1^0 \geq 0$, т. е. обе точки движутся в одну сторону.

Из приведенной выше системы следует, что после первого столкновения скорости определяются соотношениями:

$$\begin{cases} V_1 = \dfrac{P + m_2 d}{m_1 + m_2} \\[2ex] V_2 = \dfrac{P - m_1 d}{m_1 + m_2} \end{cases},$$

где $P = m_1V_1^0 + m_2V_2^0$ — не меняется при любых столкновениях, $d = V_2^0 - V_1^0$ — меняет знак после каждого столкновения. То есть, после второго столкновения скорости определяются соотношениями:

$$\begin{cases} V_1' = \dfrac{P - m_2 d}{m_1 + m_2} \\[2ex] V_2' = \dfrac{P + m_1 d}{m_1 + m_2} \end{cases}.$$

Если первое столкновение произошло в точке окружности с координатой $\varphi_1 = 0$, то второе столкновение произойдет в точке с координатой

$$\varphi_2 = \frac{V_1 T}{r} = 2\pi\left(\frac{P}{d(m_1+m_2)} + \frac{m_2}{(m_1+m_2)}\right) = \alpha + \delta$$

где $\alpha = \dfrac{2\pi P}{d(m_1 + m_2)}$, $\delta = \dfrac{2\pi m_2}{(m_1 + m_2)}$.

Следующее столкновение произойдет в точке с координатой $\varphi_3 = \varphi_2 + \dfrac{V_1' T}{r} = \alpha + \delta + \alpha - \delta = 2\alpha$, следующее — в точке $3\alpha + \delta$, следующее — в точке 4α и так далее.

Из условия задачи следует, что $\alpha + \delta = 2\pi n$, $2\alpha = 2\pi k$. Поэтому $\alpha = \pi k$ и, т.к. $\delta = \dfrac{2\pi m_2}{(m_1 + m_2)} \in (0, 2\pi)$, то $\delta = \pi$. А поэтому $\alpha = \pi(2n - 1)$.

Условие $\delta = \pi$ выполняется только при $m_1 = m_2$.

А из условия $\alpha = \pi(2n - 1)$ получим:

$$\frac{2P}{d(m_1 + m_2)} = 2n - 1 \Leftrightarrow \frac{V_2^0 + V_1^0}{V_2^0 - V_1^0} = 2n - 1 \Leftrightarrow V_1^0 \cdot 2n = V_2^0 (2n - 2).$$

Окончательно будем иметь: $V_1^0 = V_2^0 \, (1 - 1/n)$, $n \in \mathbb{N}$.

Ответ: а) массы равны; б) $V_1^0 = V_2^0 \, (1 - 1/n)$, $n \in \mathbb{N}$.

Вариант №2

Условия

1. Шарик массой $m = 10$ г падает с большой высоты без начальной скорости. Численное значение силы сопротивления среды в ньютонах определяется формулой $|F| = 0,05v$, где v — значение модуля скорости точки в метрах в секунду. Вычислите приближенно, за какое время точка пройдет первый миллиметр и первые 10 метров пути? Принимаемые предположения обоснуйте.

2. Планета радиуса R с расстояния h от ее поверхности видна под некоторым плоским углом. На какое расстояние надо приблизиться наблюдателю к планете, чтобы этот угол увеличился вдвое? Имеет ли задача решение, если $h/R = \log_2 5$?

3. Вдоль окружности цирковой арены (которая, как известно, имеет диаметр 13 метров) по часовой стрелке бегают болонка и пудель. Пудель делает полный круг на 5 секунд быстрее болонки и поэтому совершает в минуту на 2 круга больше. В начальный момент собаки находятся в одной точке. а) Чему равно расстояние между ними через 3 секунды? б) Если в начальный момент времени собачек «связать» резинкой длиной $4,5$ метра, натянется ли резинка через 3 секунды? в) А если длина резинки равна 4 метра?

4. Прямая призма, изготовленная из однородного материала, основанием которой является выпуклый четырехугольник, лежит одной из своих боковых граней на гладкой поверхности. Объясните, как с помощью циркуля и линейки найти такую точку основания призмы, чтобы под действием силы, приложенной в этой точке перпендикулярно основанию, призма двигалась поступательно.

5. По реке с постоянными скоростями плывут два катера, каждый строго по своей прямой линии. В некоторый момент времени первый из них оказался в точке A, а второй — в точке B. Причем направление течения реки в этот момент времени составило угол 45° к направлению $\overrightarrow{AB}$. Через некоторое время катера встретились в точке C. Оказалось, что треугольник ABC равносторонний. Найдите минимальное отношение собственной скорости второго катера к скорости реки, при котором это осуществимо. Ответ выразите виде дестятичной дроби и округлите до сотых долей.

6. Две точки движутся по одной окружности без трения по инерции, сталкиваясь друг с другом и испытывая при столкновении абсолютно упругий удар. Найдите все возможные значения отношений масс этих точек, если их скорости относятся как $2 : 3$ и известно, что сталкиваются они в одной и той же точке на окружности. При каких значениях отношения скоростей задача определения отношения масс имеет хотя бы одно решение?

Ответы

1. а) 0,014 с ; б) 5 с.

2. а) $h_1 = \dfrac{(R+h)^2}{2\sqrt{h(2R+h)}} - R$; б) имеет.

3. а) $13\sin\dfrac{\pi}{10}$; б) не натянется; в) натянется;

4. Алгоритм построения тот же, что в варианте 1.

5. $\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \approx 0,97.$

6. а) массы равны; б) $\dfrac{n-1}{n}, n \in N$.

6 Олимпиада 2010 года

6.1 7 класс

Условия

1. В рекламе одной зубной пасты сообщается, что масса пасты в тюбике увеличивается на 25% при сохранении прежней цены тюбика. Семиклассник Толя сделал вывод, что паста стала дешевле на 25%. Прав ли он?

2. Аня, Вася и Толя съели все мамины конфеты. Когда их спросили, сколько конфет съел каждый, они ответили так.

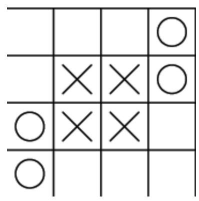
Аня: я съела 3, Вася 2, Толя 1;

Вася: Аня съела 3, я 1, Толя 1;

Толя: Аня съела 3, Вася 1, я 2.

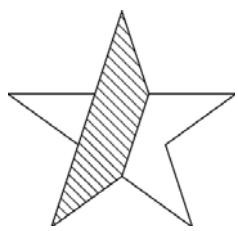
Сколько конфет съел каждый из них, если каждый назвал столько правильных чисел, сколько сам съел конфет?

3. Семиклассница Оля задумалась: можно ли разрезать данный квадрат по клеточкам на 4 равные части так, чтобы каждая часть содержала и «крестик», и «нолик»? Если можно — сколько способов существует? Если нельзя — докажите!



4. Мама семиклассника Коли Петрова купила в магазине коробку сахара, в которой куски сахара лежали в 5 слоёв. Выпив 61 чашку чая, Петровы обнаружили, что сахара в коробке не осталось. Семейству Оли Сидоровой такой же коробки хватило на 88 чашек чая. Известно, что и Петровы, и Сидоровы кладут в чай кто по два, а кто по три кусочка сахара. Сколько кусков сахара в коробке?

5. Семиклассник Толя заштриховал часть звезды как показано на рисунке. Какая часть площади звезды заштрихована? Ответ обоснуйте!



6. В чистом поле врыт в землю покрытый мхом деревянный брус, а рядом лежит камень. Надпись на камне гласит: «На восточной стороне мох растёт быстрее, чем на северной, но медленнее, чем на южной, и медленнее, чем на западной». Сможет ли семиклассник Коля определить стороны света по мху на брусе, если на одной из четырёх сторон бруса весь мох был съеден лосем?

7. В стакан с растительным маслом, плотность которого $0,92$ г/см^3, Оля положила льдинку массой 23 г. За каждую минуту 0,5 г льда превращается в воду, которая не отрывается от поверхности льда из-за поверхностного натяжения. Плотность воды 1 г/см^3, льда — $0,9$ г/см^3. Через какой промежуток времени льдинка с водой пойдут ко дну?

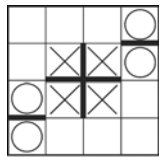
Решения

1. При росте массы в 5/4 раз при сохранении прежней цены тюбика , новая цена пасты будет равна $a : \frac{5}{4} = \frac{4}{5}a$, т. е. уменьшится на 20%.

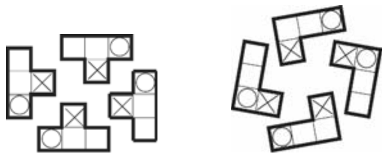
Ответ: Коля не прав.

2. Все трое сказали, что Оля съела 3 конфеты. Если это правда, то справедливы все три высказывания Оли. Проверяем и убеждаемся, что это подходит. Несложный перебор остальных вариантов других решений, кроме указанного в ответе, не дает.

Ответ: Коля — 2; Оля — 3; Толя — 1.



3. Каждая часть состоит из 4-х клеточек. Т. к. в каждой части находится по одному «крестику», то сразу рисуем разрез, отделяющий «крестики» друг от друга. Точно так же отделяем друг от друга «нолики». После этого делается небольшой перебор: а) нижний нолик — в одной области с ближайшим крестиком; получается первое решение; б) нижний нолик - в одной области со следующим крестиком — получается второе решение. Других возможностей нет.



Решение 1 Решение 2

Ответ: Можно. Существует два способа, указанных на рисунке.

4. Если n — искомое количество кусков, то $61 \cdot 2 \le n \le 61 \cdot 3$ и $88 \cdot 2 \le n \le 88 \cdot 3$. Поэтому $176 \le n \le 183$. При этом n должно делиться на 5.

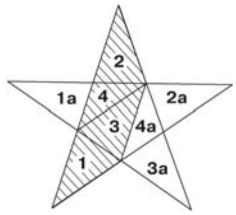
Ответ: 180.

5. Заштрихованная часть состоит из трёх равных треугольников 1, 2 и 3 (см. рисунок) и треугольника 4. Незаштрихованная часть состоят из таких же треугольников. Возможны и другие соответствия частей.

Ответ: Половина.

6. Условие означает, что минимальное количество мха на севере; большее на востоке; максимальное или на юге, или на западе (или и там, и там). Поэтому, если минимум находится напротив объеденной стороны, то мох съеден на юге; если минимум находится справа от объеденной стороны, то мох съеден на востоке. Если минимум находится слева, а максимум напротив, то мох объеден на северной стороне. Если же минимум находится слева, а максимум справа, то мох может быть объеден или на севере, или на западе, что не позволяет определить стороны света.

Ответ:Если лось съел мох на южной или восточной сторонах, то сможет; если на северной, то не всегда сможет; если на западной, то не сможет.



7. Вычислим объём льда с водой: $V = \dfrac{M - at}{\rho_л} + \dfrac{at}{\rho_в}$, где — начальная масса льдинки, — скорость таяния, $\rho_л$ и $\rho_в$ — плотности льда и воды соответственно. Тело идёт ко дну, если максимально возможная сила Архимеда, возникающая при полном погружении тела, больше силы тяжести, т. е.

$$\frac{M - at}{\rho_л + \dfrac{at}{\rho_в}}\rho_м g > Mg,$$

где $\rho_м$ — плотность масла. Отсюда находим:

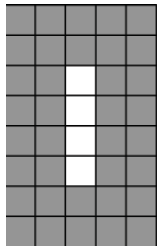
$$t > \frac{M}{a} \cdot \frac{1 - \dfrac{\rho_л}{\rho_м}}{1 - \dfrac{\rho_л}{\rho_в}}.$$

В числах: $t > \dfrac{23}{0,5} \cdot \dfrac{1 - \dfrac{0,9}{0,92}}{1 - \dfrac{0,9}{1}} = 10$ минут.

Ответ:10 минут.

6.2 8 класс

Условия



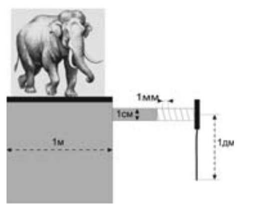
1. Восьмиклассник Гаврила смог разрезать нарисованную рядом букву «О» на две части и сложить из них квадрат 6 х 6. Попробуйте сделать то же самое без ножниц: изобразите линию разреза в тетради.

2. Школьники Гаврила и Глафира одновременно вышли из подъезда и направились к киоскам с мороженым: Гаврила - к киоску А, а Глафира - к киоску В. Каждый из них дошел до своего киоска, сразу купил мороженое и, тут же начав его есть, повернул обратно. Гаврила первый вернулся к подъезду и остановился, чтобы подождать Глафиру. Когда Глафира подошла к подъезду, Гаврила как раз доел своё мороженое, а у Глафиры было съедено 2/3 порции. Найдите отношение расстояний от подъезда до киосков А и В, если скорости у ребят одинаковы, порции мороженого одинаковы и скорости поедания мороженого тоже одинаковы.

3. Настенные часы в доме Гаврилы сломались: стрелки остановились, а циферблат стал свободно вращаться относительно стрелок. Пытливый Гаврила задумался: сколько существует положений циферблата, в которых при этом фиксированном положении стрелок часы показывают правильное (то есть практически возможное) время?

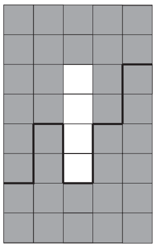
4. А вот решить уравнение $y^2 = z^x + 9$ в натуральных числах при условии, что z — простое число, Гаврила с Глафирой не смогли... А вы попробуйте!

5. На шахматной доске размером 8 х 8 клеток Гаврила расставил несколько шахматных королей так, что каждая клетка была либо занята некоторым королем, либо находилась под боем хотя бы одного короля (для информации: король бьёт все соседние с ним клетки — по вертикали, по горизонтали и по двум диагоналям). Найдите наименьшее возможное число таких королей и докажите, что это число минимальное.



6. В цирке восьмиклассник Гаврила нашел гидравлический пресс: от бака с водой, плотно закрытого крышкой, диаметр которой 1 м, отходит трубка диаметром 1 см. В трубку вкручен изготовленный на секретном заводе с применением нанотехнологий абсолютно гладкий болт, шаг резьбы которого 1 мм. При минимальном давлении на крышку болт выкручивается и вылетает из трубки. Сможет ли Гаврила гаечным ключом длины 1 дм, прикрепленным к головке болта, удерживать на крышке слона массой 3 т? Сколько полных оборотов гаечного ключа ему придется сделать, чтобы поднять слона на 1 мкм?

Решения



1. Нужно сделать разрез, как показано на рисунке слева, сдвинуть верхнюю часть относительно нижней на одну клетку влево и опустить вниз «до упора».

2. Если на съедание одного мороженого требуется время T, то на путь от киоска В до подъезда у Глафиры ушло время $\dfrac{2}{3}T$. Значит, туда и обратно она потратила $\dfrac{4}{3}T$. За это время Гаврила дошел до киоска А и съел мороженое. Значит, время до киоска А равно $\dfrac{4}{3}T - T = \dfrac{1}{3}T$. Отношение искомых расстояний равно отношению времен: $\dfrac{1}{3}T : \dfrac{2}{3}T = \dfrac{1}{2}$.

Ответ: $1 : 2$

3. Решаем задачу: сколько раз на «нормальных» часах за 12 часов повторяется какой-то заданный угол между стрелками. За минуту минутная стрелка догоняет часовую на $\dfrac{1}{60} - \dfrac{1}{720} = \dfrac{11}{720}$ полного оборота. Поэтому угол между стрелками повторяется каждые $\dfrac{720}{11}$ минут, или каждые $\dfrac{12}{11}$ часа. Значит, за 12 часов будет $12 : \dfrac{12}{11} = 11$ одинаковых положений стрелок.

Ответ: 11.

4. Из уравнения $(y-3)(y+3) = z^x$ следует, что некоторые степени числа z отличаются на 6. Поэтому z не превосходит 7, и остаётся перебрать $z = 2, 3, 5, 7$. Возможны три случая: а) $y - 3 = 2$; $y + 3 = 8$; б) $y - 3 = 3$; $y + 3 = 9$; в) $y - 3 = 1$; $y + 3 = 7$.

Ответ: $(4; 5; 2)$, $(3; 6; 3)$, $(1; 4; 7)$.

5. Для 9 королей строится пример. Для доказательства того, что это минимальное число, нужно разбить доску на 9 прямоугольников (4 квадрата 3 x 3; 4 прямоугольника 3 x 2 и 1 квадрат 2 x 2), в каждом из которых должен находиться хотя бы один король.

Ответ: $n = 9$

6. Запишем условие равновесия гидравлического пресса и найдём силу, которая выталкивает болт: $F_{\text{болт}} = Mg\dfrac{S_{\text{трубки}}}{S_{\text{бака}}} = Mg\left(\dfrac{d_{\text{трубки}}}{D_{\text{бака}}}\right)^2$. Прикладывая силу к гаечному ключу, мы удерживаем болт от проворачивания. Для того чтобы определить силу, которую нужно прикладывать, сопротивляясь силе $F_{\text{болт}}$, воспользуемся «золотым правилом механики». При полном обороте гаечного ключа его ручка пройдёт расстояние $L = 2\pi R$, где R — длина ключа, а болт сместится на h — шаг резьбы. Таким образом, $F_{\text{ключ}} = F_{\text{болт}}\dfrac{h}{2\pi R} = Mg(\dfrac{d_{\text{трубки}}}{D_{\text{бака}}})^2 \cdot \dfrac{h}{2\pi R} \approx 0,5 \cdot 10^{-2}$ Н. Это очень немного, и Гаврила без труда удержит слона.

Чтобы поднять слона нужно несколько раз провернуть ключ. При этом часть жидкости перетечет из трубки в бак. Объём жидкости при этом сохраняется: $\pi D^2_{\text{бака}}\Delta H = \pi d^2_{\text{трубки}}\Delta l$, где H — высота подъема слона, l — перемещение болта. Отсюда $\Delta l = 1$ см, что соответствует 10 полным оборотам ключа.

Ответ: Сможет. 10 оборотов.

6.3 9 класс

Условия

1. В рекламе чипсов было заявлено, что в каждой сотой пачке покупателя ждет приз. Однако когда оставалось изготовить сотую часть всей партии чипсов, выяснилось, что призы были положены лишь в каждую трехсотую пачку. Поэтому далее призы стали класть в каждые две из трёх производимых пачек. Удастся ли таким образом выполнить данное в рекламе обещание?

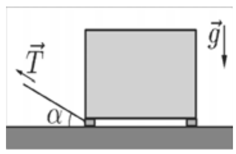
2. Запах куста розы распространяется по горизонтали на расстояние 10 метров от него. Какое минимально возможное количество кустов нужно посадить на прямоугольной аллее длиной 300 метров и шириной 6 метров, чтобы в любой точке аллеи пахло розами?

3. А) Докажите, что для любого целого n существует такое целое k, что $k = \sqrt{n(n-2)(n-4)(n-6)+16}$.
Б) Найдите все такие целые n, при которых число $\sqrt{k}$ тоже целое.

4. Изображена трапеция. С помощью циркуля и линейки проведите параллельную основаниям трапеции прямую так, чтобы она разделила трапецию на две равновеликие части.

5. По плоскости ползает тысяча муравьев (все они считаются материальными точками). Докажите, что в любой момент времени, когда муравьи не находятся на одной прямой, можно найти такую точку плоскости, для которой по меньше мере три ближайших муравья равноудалены от неё.

6. Тяжелый шкаф массой M, каркас которого выполнен из однородного дерева, имеет форму куба с ребром . Для его передвижения по горизонтальному полу к двум передним ножкам привязали веревку. Под каким углом α к горизонту следует направить веревку, чтобы усилие, необходимое для перемещения шкафа, было наименьшим? Коэффициент трения равен μ, ножки маленькие и расположены по краям.



Решения

1. Планировалось: призов ; всего пачек чипсов $100x$. Реально призов: $\dfrac{99x}{300}+\dfrac{2x}{3}=\dfrac{299x}{300}$, что меньше, чем x.

Ответ: Нет.

2. Чтобы кусты «покрывали запахом» осевую линию необходимо $\dfrac{300}{20}=15$ кустов. При этом все эти 15 кустов расположены на осевой линии, и остаются области вблизи границ аллеи, куда запах не достигает.

Покажем, что 16 кустов достаточно. Расположим их вдоль осевой линии: каждый куст расположен в центре прямоугольника шириной 6 метров и длиной $2\cdot\sqrt{10^2-3^2}=2\sqrt{91}$ метров. На 16 кустов приходится длина $32\sqrt{91}$ метров, что больше 300.

Ответ: 16.

3. А) Обозначим $m=n-3$, тогда подкоренное выражение равно $(m+3)(m+1)(m-1)(m-3)+16=(m^2-9)(m^2-1)+16=m^4-10m^2+25=(m^2-5)^2$, т.е. $k=|m^2-5|$.

Б) Условием того, что $|m^2-5|$ является полным квадратом, будет либо $m^2-5=p^2$ (получается $m^2=9$), либо $5-m^2=p^2$ (отсюда $m^2=4$ и $m^2=1$).

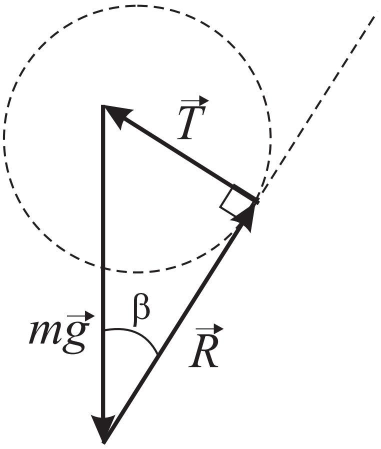
Ответ: Б) $0; 1; 2; 4; 5; 6$.

4. Для выполнения требуемого построения необходимо получить отрезок длиной $\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$ (где a и b — основания трапеции). Это можно сделать с помощью теоремы Пифагора, построив прямоугольный треугольник с катетами, равными основаниям трапеции и разделив гипотенузу пополам. Далее откладываем такой отрезок параллельно основаниям трапеции так, чтобы его концы лежали на боковых сторонах. Это построение выполняется с помощью теоремы Фалеса.

5. Берем ближайших двух муравьев (хотя бы одна такая пара существует). В круге с центром в середине соединяющего их отрезка других муравьев нет. Строим серединный перпендикуляр к этому отрезку. Перемещаем центр окружности по этому перпендикуляру, одновременно увеличивая радиус так, чтобы два ближайших муравья все время были на этой окружности. Рано или поздно на окружности окажется третий муравей (или сразу несколько). Центр окружности — искомая точка.

6. При движении шкафа на него действуют силы: тяжести $m\vec{g}$ (известны и величина, и направление), натяжения нити $\vec{T}$ (её хотим минимизировать), нормальной реакции $\vec{N}$ (знаем направление), трения скольжения $\vec{F}$ (знаем направление и отношение к силе нормальной реакции). Последние две силы можем просуммировать. При этом получим, что полная сила реакции $\vec{R}$ (суммарная для всех ножек) направлена назад-вверх под углом β к вертикали, $tg\beta = \mu$.

Имеем три силы $m\vec{g}, \vec{R}, \vec{T}$, сумма которых равна нулю. Поэтому, если последовательно приставить начало второго вектора $\vec{R}$ к концу вектора $m\vec{g}$, затем начало вектора $\vec{T}$ к концу вектора $\vec{R}$, то конец вектора $\vec{T}$ совпадет с началом $m\vec{g}$. В этом треугольнике задана одна сторона, угол между ней и второй стороной. Минимальное значение модуля $\vec{T}$ будет достигнуто, если $\vec{T} \perp \vec{R}$, тогда $\vec{T}$ направлена под углом $90° - \beta$ к вертикали (т. е. под углом β к горизонту).



Ответ: $\mathrm{arctg}\mu$.

6.4 10 класс

Условия

1. Два вертолета летят на одинаковой постоянной высоте, каждый по своей прямолинейной траектории, с постоянными скоростями. В 10:00 расстояние между ними было 40 км, в 10:08 — 40 км, в 10:17 — 45 км. А) Определить момент времени, в который они будут находиться на кратчайшем расстоянии друг от друга. Б) Определить величину относительной скорости одного вертолета относительно другого.

2. Ученый обнаружил, что для двух любых значений x и y функции $f(x)$ выполняется соотношение $\dfrac{f(x)+f(y)}{2} = f\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\cdot f\left(\dfrac{x-y}{2}\right)$. Сможет ли он определить, какие значения может принимать $f(6)$, если известно, что $f(1)=0$?

3. Решите уравнение $y^2 = z^x + 16$ в натуральных числах при условии, что z — простое число.

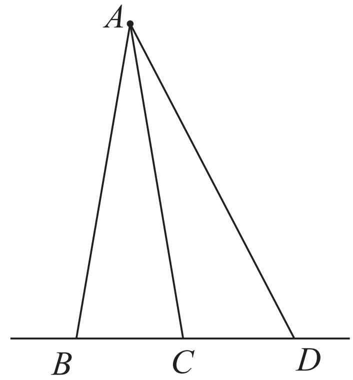
4. В треугольнике ABC с углом α при вершине A и сторонами $AC = b$, $AB = c$ проведены высота AH, медиана AM и биссектриса AL. Из точек C и B опущены перпендикуляры CC_1 и BB_1 на прямую AL. Докажите, что точки H, C_1, M, B_1 лежат на одной окружности, и найдите радиус этой окружности.

5. Спускаемые аппараты А и Б движутся вертикально вниз с постоянной скоростью под действием силы тяжести, силы сопротивления воздуха и силы тяги тормозного двигателя. Спускаемый аппарат Б вдвое большего диаметра будет двигаться с той же установившейся скоростью, что и аппарат А, если сила тяги его тормозного двигателя будет в 16 раз больше. Найдите отношение силы тяжести к силе тяги тормозного двигателя аппарата А, считая аппараты однородными шарами одинаковой плотности, изменение массы которых в процессе спуска пренебрежимо мало, и что сила сопротивления создается абсолютно упругими ударами молекул воздуха о корпус аппарата.

6. Мама Зайчиха массой $M_1 = 9$ кг и ее маленький сын Зайчонок массой $M_2 = 3$ кг сидели на плавающей льдине массой $m = 15$ кг, когда к ним на лодке приблизились Дед Мазай и его внук Ваня. Зайцы, обрадовавшись, прыгнули со льдины в лодку, и Ваня увидел, как льдина, получив импульс, движется по инерции. Ваня задумался: как должны прыгать зайцы (по очереди или одновременно, в каком направлении), чтобы льдина приобрела максимально возможную скорость? Найдите эту скорость. Считается, что зайцы, оттолкнувшись, прыгают в горизонтальном направлении и приобретают одинаковую скорость $V = 3,6$ м/с относительно льдины. Сопротивлением воды пренебречь.

Решения

1. Решаем задачу в системе координат, связанной с первым вертолетом. Обозначим его А. Положения второго вертолета: в первый момент — В; во второй — С; в третий — D. Тогда $AB = 40$, $AC = 40$, $AD = 45$. Минимальное расстояние — высота треугольника , поэтому соответствующий момент времени равен $10:04$.



Б) Кроме того, $AB : AD = 8 : 9 = BC : CD$. Поэтому — биссектриса. По формуле длины биссектрисы $40^2 = 40 \cdot 45 - 8x \cdot 9x$ (здесь $BC = 8$; $CD = 9$). Поэтому $x = \dfrac{5}{3}$, $D = 15$ км. Относительная скорость: 100 км/ч.

Ответ: А) $10:04$. Б) 100 км/ч.

2. Если подставить в соотношение $y = x$, то $f(x) = f(x) \cdot f(0)$, т. е. или $f(x) \equiv 0$, или $f(0) = 1$. Если теперь подставить целые $x = n + 2$, $y = n$, то

$$\frac{f(n+2) + f(n)}{2} = f(n+1) \cdot f(1) = 0.$$

Поэтому получается: $f(2k+1) = 0$, $f(2k) = (-1)^k$ или 0. Значит, $f(6) = -1$ или 0. Пример такой функции: $f(x) = \cos(\dfrac{\pi x}{2})$.

Ответ: Сможет, значения 0 или -1.

3. Из уравнения $(y-4)(y+4) = z^x$ следует, что некоторые степени числа z отличаются на 8. Поэтому z не превосходит 7, и остаётся перебрать $z = 2, 3, 5, 7$. Возможны два случая: а) $y - 4 = 8$; $y + 4 = 16$; б) $y - 4 = 1$; $y + 4 = 9$.

Ответ: $(7; 12; 2)$ $(2; 5; 3)$.

4.

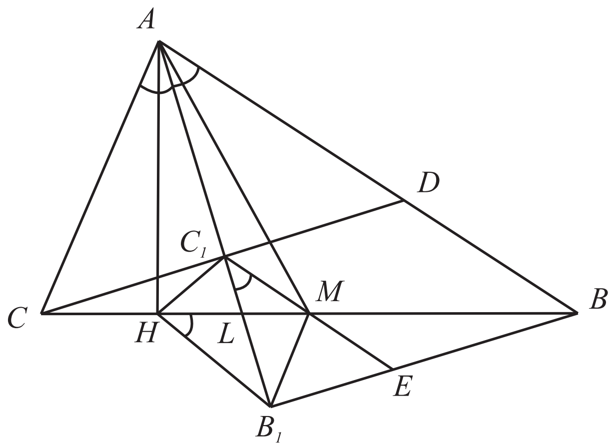
1) Точки A, H, B, B_1 лежат на окружности диаметра , поэтому $\angle B_1HB = \angle B_1AB = \dfrac{\alpha}{2}$.

2) Продлим CC_1 до пересечения с AB в точке D; $CC_1 = C_1D$ (т. к. AC_1 - биссектриса и высота).

3) C_1M - средняя линия ΔCDB; $C_1M \parallel AB$; $\angle B_1C_1M = \angle B_1AB = \dfrac{\alpha}{2}$.

4) Поэтому H, C_1, M, B_1 лежат на одной окружности радиуса $R = \dfrac{B_1M}{2\sin\dfrac{\alpha}{2}}$.

5) ΔC_1B_1E — прямоугольный (E - точка пересечения C_1M и BB_1); $C_1M =$



$\dfrac{1}{2}DB = \dfrac{1}{2}C_1E;$

6) M — центр описанной около ΔC_1B_1E окружности; $B_1M = C_1M = \dfrac{DB}{2} = \dfrac{c-b}{2}$; $R = \dfrac{c-b}{4\sin\dfrac{\alpha}{2}}$.

Ответ: $\dfrac{c-b}{4\sin\dfrac{\alpha}{2}}$.

5. Для спускаемого аппарата А имеем: $P = T + Q$, где P — сила тяжести; Q — сила сопротивления воздуха; T — сила тяги тормозного двигателя. По условию для аппарата Б сила тяги равна $16T$. Так как аппарат Б имеет вдвое больший диаметр, то для него сила тяжести равна $8P$ (масса пропорциональна объему), а сила сопротивления воздуха пропорциональна площади поверхности и равна $4Q$. Значит, $8P = 16T + 4Q$. Из получающейся системы

$$\begin{cases} P = T + Q \\ 2P = 4T + Q \end{cases}$$

находим $\dfrac{P}{T} = 3$.

Ответ: $\dfrac{P}{T} = 3$.

6. Если зайцы прыгают одновременно, то по закону сохранения импульса:

$$0 = (M_1 + M_2)(V - U) - mU,$$

где M_1, M_2 — массы Зайчихи и Зайчонка соответственно; V — скорость зайцев относительно льдины; U — скорость льдины после прыжка; m — масса льдины. Заметим, что множитель $(V - U)$ выражает собой скорость прыгнувших зайцев относительно воды. Отсюда

$$U = \frac{(M_1 + M_2)V}{m + M_1 + M_2}.$$

Если первым прыгнул Зайчонок, то после его прыжка по закону сохранения импульса:

$$0 = M_2(V - U_o) - (m + M_1)U_o,$$

где U_o — скорость льдины после его прыжка. Отсюда

$$U_o = \frac{M_2 V}{m + M_1 + M_2}.$$

После прыжка Зайчихи (в том же направлении) по закону сохранения импульса:

$$-(m + M_1)U_o = M_1(V - U_1) - mU_1.$$

Отсюда скорость после второго прыжка

$$U_1 = \frac{(m + M_1)U_o + M_1 V}{m + M_1} = \frac{M_1 V}{m + M_1} + \frac{M_2 V}{m + M_1 + M_2}.$$

Если первой прыгнула Зайчиха, а за ней Зайчонок, то аналогично предыдущему скорость равна: $U_2 = \dfrac{M_2 V}{m + M_2} + \dfrac{M_1 V}{m + M_1 + M_2}$.

Проведем вычисления: $U = 1,6$ м/с; $U_1 = 1,75$ м/с; $U_2 = 1,8$ м/с. Т. е. льдина приобретёт максимальную скорость, если первой прыгнет Зайчиха, а за ней Зайчонок.

Ответ: Первой прыгает Зайчиха, а за ней Зайчонок (в том же направлении). Скорость льдины — 1,8 м/сек.

6.5 11 класс

Вариант №1
Условия

1. Два велосипедиста передвигаются с постоянными скоростями, каждый по своей прямолинейной дорожке. В $13:00$ расстояние между ними было 4 км, в $13:08$ – 4 км, в $13:17$ – $4,5$ км. А) Определить момент времени, в который они будут находиться на кратчайшем расстоянии друг от друга. Б) Определить величину относительной скорости одного велосипедиста относительно другого.

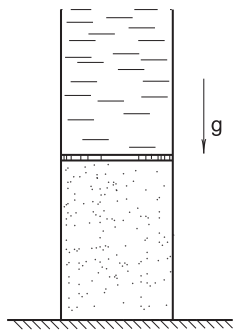
2. Спускаемые аппараты А и Б движутся вертикально вниз с одинаковыми постоянными скоростями под действием силы тяжести, силы сопротивления воздуха и силы тяги тормозного двигателя. Спускаемый аппарат Б имеет вдвое больший диаметр и в 12 раз большую силу тяги тормозного двигателя, чем аппарат А. Найти отношение силы тяжести к силе тяги тормозного двигателя аппарата А, считая аппараты однородными шарами одинаковой плотности, изменение массы которых в процессе спуска пренебрежимо мало, и что сила сопротивления создается абсолютно упругими ударами молекул воздуха о корпус аппарата.

3. Раненый богатырь находится на прямолинейной дороге. Его цель — колодец с живой водой. Расстояние между богатырем и колодцем равно 7 км, а между колодцем и дорогой — 1 км. А) Через какое минимальное время богатырь может добраться до колодца, если он передвигается по дороге со скоростью 8 км/час, а по бездорожью — в два раза медленней? Б) Успеет ли он добраться до колодца, если ресурс его жизненных сил — 65 минут?

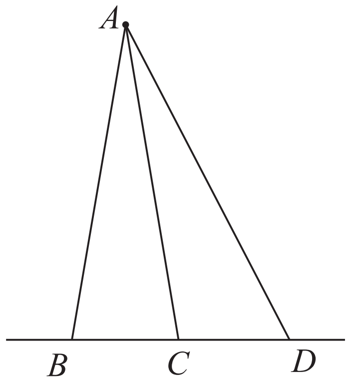
4. Мама Лягушка массой $M_1 = 10$ г и ее маленький сын Лягушонок массой $M_2 = 5$ г сидели на плавающей дощечке массой $m = 15$ г, когда к ним на лодке приблизился рыболов. Лягушки, испугавшись, прыгнули с дощечки, и рыболов увидел, как дощечка, получив импульс, движется по инерции. Как должны прыгать лягушки (по очереди или одновременно, в каком направлении), чтобы дощечка приобрела максимально возможную скорость? Найти эту скорость. Считается, что лягушки, оттолкнувшись, приобретают одинаковую скорость $V = 2,4$ м/с относительно дощечки. Сопротивлением воды пренебречь.

5. В процессе работы ученому потребовалось срочно сравнить две величины $f(x_1)$ и $f(x_2)$, где $f(x) = 21x^5 - 4x^4 - 30x^3 + 27x^2 - 10x - 2 - \sin x$, а числа x_1 и x_2, $(x_1 < x_2)$ — соответственно меньший и больший корень квадратного уравнения $7x^2 - 6x + 1 = 0$. Электронных вычислительных средств под рукой не оказалось, но он, подумав, быстро справился с задачей. Попробуйте сделать необходимое сравнение сами. Ответ обоснуйте.

6. Химический реактор представляет собой цилиндрическую ёмкость высотой $L = 17,5$ м, разделенную подвижным поршнем на две камеры. Первоначально поршень находился в самом верхнем положении. Сверху на поршень налили воду так, что поршень опустился до высоты $h = 10$ м над дном реактора и в нижней камере реактора давление стало $1,75 \cdot 10^5$ Па, а температура — 63°С. До какой минимальной температуры необходимо нагреть нижнюю камеру реактора, чтобы вся вода вылилась, если атмосферное давление равно $p_\circ = 10^5$ Па, плотность воды $\rho = 1000$ кг/м^3 и ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2?



Решения



1. Решаем задачу в системе координат, связанной с первым велосипедистом. Обозначим его A. Положения второго велосипедиста: в первый момент — B; во второй — C; в третий — D. Тогда $AB = 4, AC = 4, AD = 4,5$.

Минимальное расстояние — высота треугольника ABC, поэтому соответствующий момент времени равен 13 : 04.

Б) Т. к. $BC : CD = 8 : 9 = AB : AD$, то AC — биссектриса . По формуле длины биссектрисы $4^2 = 4 \cdot 4,5 - 8x \cdot 9x$ (здесь $BC = 8x; CD = 9x$). Поэтому $x = 1/6, CD = 1,5$ км. Относительная скорость: 10 км/ч.

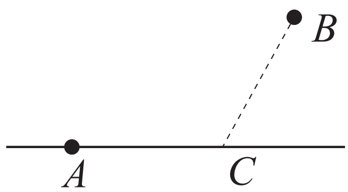
Ответ: А) 13:04. Б) 10 км/час.

2. Для спускаемого аппарата А имеем: $P = T + Q$, где P — сила тяжести; Q — сила сопротивления воздуха; T — сила тяги тормозного двигателя. По условию для аппарата Б сила тяги равна $12T$. Т. к. аппарат Б имеет вдвое больший диаметр, то для него сила тяжести равна $8P$ (масса пропорциональна объему), а сила сопротивления воздуха пропорциональна площади поверхности и равна $4Q$. Значит, $8P = 12T + 4Q$. В итоге из системы

$$\begin{cases} P = T + Q, \\ 8P = 12T + 4Q. \end{cases}$$

получаем $\dfrac{P}{T} = 2$.

Ответ: 2.



3. Обозначим: A — колодец; B — богатырь; C — точка на дороге, от которой богатырь должен пойти к колодцу по бездорожью; $AB = a$; b — расстояние от A до дороги; V — скорость по бездорожью. По сути, задача сводится к тому, чтобы найти точку C.

Обозначить $AC = x$, тогда время в пути равно:

$$t(x) = \frac{x}{V} + \frac{\sqrt{a^2 - b^2} - \sqrt{x^2 - b^2}}{2V} = \frac{2x + \sqrt{a^2 - b^2} - \sqrt{x^2 - b^2}}{2V}.$$

Минимум $f(x) = 2x - \sqrt{x^2 - b^2}$ можно найти, например, с помощью производной: $f'(x) = 2 - \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2 - b^2}} = 0$; $x = 2\sqrt{x^2 - b^2}$; $x = \dfrac{2b}{\sqrt{3}}$.

Поэтому время в пути равно

$$t = \frac{2b/\sqrt{3}}{V} + \frac{\sqrt{a^2 - b^2} + \sqrt{\left(2b/\sqrt{3}\right)^2 - b^2}}{2V} = \frac{b\sqrt{3} + \sqrt{a^2 - b^2}}{2V}.$$

Так как $a = 7b$, поэтому получается $\dfrac{5b\sqrt{3}}{2V}$ (в часах) или $\dfrac{150b\sqrt{3}}{V}$ (в минутах). В итоге: $t = \dfrac{75\sqrt{3}}{2}$ минут. В ответе на вопрос Б) нужно доказать, что $\dfrac{75\sqrt{3}}{2}(\approx 64,96) < 65$. После возведения в квадрат получается в итоге $675 < 676$. Итог: успеет.

Ответ: А) $\dfrac{75\sqrt{3}}{2}$ минут; Б) успеет, т. к. $\dfrac{75\sqrt{3}}{2} < 65$.

4. Если лягушки прыгают одновременно, то по закону сохранения импульса:

$$0 = (M_1 + M_2)(V - U) - mU,$$

где M_1, M_2 — массы Лягушки и Лягушонка соответственно; V — скорость лягушек относительно дощечки; U — скорость льдины после прыжка; m — масса дощечки. Заметим, что множитель $(V - U)$ выражает собой скорость прыгнувших лягушек относительно воды. Отсюда

$$U = \frac{(M_1 + M_2)V}{m + M_1 + M_2}.$$

Если первым прыгнул Лягушонок, то после его прыжка по закону сохранения импульса:

$$0 = M_2(V - U_o) - (m + M_1)U_o,$$

где U_o — скорость дощечки после его прыжка. Отсюда

$$U_o = \frac{M_2 V}{m + M_1 + M_2}.$$

После прыжка Лягушки (в том же направлении) по закону сохранения импульса:

$$-(m + M_1)U_o = M_1(V - U_1) - mU_1.$$

Отсюда скорость после второго прыжка

$$U_1 = \frac{(m + M_1)U_o + M_1 V}{m + M_1} = \frac{M_1 V}{m + M_1} + \frac{M_2 V}{m + M_1 + M_2}.$$

Если первой прыгнула Лягушка, а за ней Лягушонок, то аналогично предыдущему скорость равна:

$$U_2 = \frac{M_2V}{m+M_2} + \frac{M_1V}{m+M_1+M_2}.$$

Вычисления: $U = 1,2$ м/с; $U_1 = 1,36$ м/с; $U_2 = 1,4$ м/с. Т. е. дощечка приобретет максимальную скорость, если первой прыгнет Лягушка, а за ней Лягушонок.

Ответ: Первой прыгает Лягушка, а за ней Лягушонок (в том же направлении). Скорость дощечки — 1,4 м/сек.

5. Ось x направим вверх, ноль возьмем на высоте $h = \dfrac{p_\circ}{\rho g} = 10$ м. Найдем зависимость положения поршня x от температуры.

Условие равновесия — равенство давлений на поршне сверху $p_\circ + \rho g(L - h - x) =$ и снизу $\dfrac{7}{4}p_\circ\dfrac{h}{h+x}\dfrac{T}{T_\circ}$.

Приравнивая, получаем уравнение

$$\frac{7}{4}p_\circ h\frac{T}{T_\circ} = \rho g(L-x)(h+x)$$

То есть, зависимость T от x выглядит как парабола вершиной вверх, с корнями $x_1 = L$ и $x_2 = -h$. Следовательно, вершина расположена в точке $x_\circ = \dfrac{L-h}{2}$ — в этой точке достигается максимум T:

$$\frac{7}{4}p_\circ h\frac{T_{max}}{T_\circ} = \rho g\frac{(L+h)^2}{4} \Rightarrow T_{max} = T_\circ\frac{1}{7}\left(1+\frac{L}{h}\right)^2$$

Ответ: 363 К $=$ 90° С ($= \dfrac{121}{112}T_\circ$).

Вариант №2

Условия

1. Два мотоциклиста движутся по прямолинейным трассам (каждый по своей) с постоянными скоростями. В $15:00$ расстояние между ними было 30 км, в $15\!:\!30$ – 30 км, в $16\!:\!10$ – 40 км. А) Определить момент времени, в который они будут находиться на кратчайшем расстоянии друг от друга. Б) Определить величину относительной скорости одного мотоциклиста относительно другого.

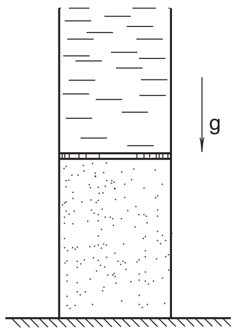
2. Спускаемые аппараты А и Б движутся вертикально вниз с постоянной скоростью под действием силы тяжести, силы сопротивления воздуха и силы тяги тормозного двигателя. Спускаемый аппарат Б втрое большего диаметра будет двигаться с той же установившейся скоростью, что и аппарат А, если сила тяги его тормозного двигателя будет в 39 раз больше. Найти отношение силы тяжести к силе тяги тормозного двигателя аппарата А, считая аппараты однородными шарами одинаковой плотности, изменение массы которых в процессе спуска пренебрежимо мало, и что сила сопротивления создается абсолютно упругими ударами молекул воздуха о корпус аппарата.

3. На расстоянии 300 метров от прямолинейной дороги находится колодец с живой водой, к которому стремится раненый богатырь. В начальный момент времени богатырь находится на дороге и расстояние между ним и колодцем равно 2100 метров. А) Через какое минимальное время богатырь может добраться до колодца, если он передвигается по дороге со скоростью 6 км/час, а по бездорожью — в два раза медленней? Б) Успеет ли он добраться до колодца, если ресурс его жизненных сил - 26 минут?

4. Мама Лягушка массой $M_1 = 8$ г и ее маленький сын Лягушонок массой $M_2 = 4$ г сидели на плавающей дощечке массой $m = 12$ г, когда к ним на лодке приблизился рыболов. Лягушки, испугавшись, прыгнули с дощечки, и рыболов увидел, как дощечка, получив импульс, движется по инерции. Как должны прыгать лягушки (по очереди или одновременно, в каком направлении), чтобы дощечка приобрела максимально возможную скорость? Найти эту скорость. Считается, что лягушки, оттолкнувшись, приобретают одинаковую скорость $V = 1,2$ м/с относительно дощечки. Сопротивлением воды пренебречь.

5. В процессе работы ученому потребовалось срочно сравнить две величины $f(x_1)$ и $f(x_2)$, где $f(x) = 12x^5+24x^4-4x^3-10x^2+4x+3+\cos x$, а числа x_1 и x_2, $(x_1 < x_2)$ — соответственно меньший и больший корень квадратного уравнения $6x^2 + 6x + 1 = 0$. Электронных вычислительных средств под рукой не оказалось, но он, подумав, быстро справился с задачей. Попробуйте сделать необходимое сравнение сами. Ответ обоснуйте.

6. Цилиндрический сосуд высотой $L = 1900$ мм разделён подвижным поршнем на две камеры. Первоначально поршень находился в самом верхнем положении. Сверху на поршень налили ртуть так, что поршень оказался на высоте $h = 760$ мм над дном сосуда и в нижней камере сосуда давление стало равно 1900 мм ртутного столба при температуре 7°C. До какой минимальной температуры необходимо нагреть воздух в нижней камере сосуда, чтобы вся ртуть вылилась, если атмосферное давление равно $p_\circ = 760$ мм ртутного столба?



Ответы

1. А) 15:15. Б) 30 км/час

2. 5:3

3. А) $15\sqrt{3}$ минут; Б) успеет, т. к. $15\sqrt{3} < 26$

4. Первой прыгает Лягушка, а за ней Лягушонок (в том же направлении). Скорость дощечки — 0,7 м/сек.

5. $f(x_1) < f(x_2)$.

6. 343 K = 70° C $(= \dfrac{49}{40}T_\circ)$

7 Критерии оценок

Многие школьники не принимают участия в олимпиадах,потому что считают, что участвовать должны те, кто может решить все предлагаемые задачи. Это ошибочное мнение. Для того, чтобы отличиться и стать призером олимпиады необязательно решить все задачи. Достаточно справиться с половиной заданий.

Например, *школьникам 7 — 10 классов* предлагается 5 олимпиадных задач. Победители этих олимпиад определяются следующим образом:

Диплом I степени — за 5 решенных задач;

Диплом II степени — за 4 решенные задачи;

Диплом III степени — за 3 решенные задачи.

За 2 решенные задачи вручаются Похвальные грамоты.

Заочная школа-олимпиада проходит в четыре тура. В каждом туре предлагается пять задач. За каждый тур участник может получить от 0 до 5 баллов. Максимальное количество баллов по заочной школе-олимпиаде — 20. Победители и призеры заочной школы-олимпиады награждаются дипломами. Победителями заочной школы-олимпиады по механике были объявлены все, кто набрал более 15 баллов, призерами — те, кто набрал более 10 баллов.

Олимпиада Ломоносов по механике проводится в два этапа. Первый этап — отборочный проводится в заочной форме. Участники заочного этапа борются за попадание в заключительный очный этап, к участию в котором допускаются 35% от участников отборочного этапа. Следует отметить, что победители и призеры заочной школы-олимпиады имеют преимущества в заочном отборочном этапе олимпиады Ломоносов по механике.

Задачи очного этапа олимпиады Ломоносов оцениваются от 0 до 20 баллов каждая. К зачету принимаются сумма баллов за пять задач с максимальным количеством баллов. Таким образом, максимально возможное количество баллов за олимпиадную работу — 100.

Победители и призеры разделены на три категории:

от 80 баллов — диплом I степени;

от 70 баллов — диплом II степени;

от 60 баллов — диплом III степени.

В 2011 году победители и призеры олимпиады Ломоносов по механике будут иметь возможность выбирать, по какому из двух предметов (физике или математике) получать льготы при поступлении в вузы.

8 История олимпиады по механике

Школьного предмета «механика» нет. А специалисты нужны. Почему мы не воспитываем их, начиная со школы, если, судя по названиям вузов (механико-математические факультеты существуют во многих университетах), они столь востребованы? Задавшись этим вопросом, инициативная группа сотрудников механико-математического факультета МГУ в 2005 году решила начать деятельность по выявлению творчески одаренных школьников способных не только применить математику, но и формулировать наиболее простым образом математические постановки задач, возникающих в различных областях деятельности человека.

Олимпиада по механике для школьников проводится механико-математическим факультетом МГУ для учащихся 7 —11 классов. С 2008 года это этап олимпиады «Ломоносов», а с 2010 олимпиада Ломоносов по механике включена в перечень олимпиад, победителям которых могут быть предоставлены льготы при поступлении в вузы. Также в 2010 году впервые олимпиада проводилась не только на базе МГУ им. М.В. Ломоносова, но и в Санкт-Петербургском государственном политехническом университете. Кроме того, проводится заочный этап олимпиады, в котором могут участвовать школьники со всей России. Задания публикуются на сайте **http://lomonosov.msu.ru** и на сайте приемной комиссии механико-математического факультета МГУ.

На 2010/2011 учебный год регламент олимпиады Ломоносов по механике сформулирован следующим образом. С целью пропаганды знаний в области точных наук олимпиада по механике для школьников 11 класса организована как сочетание двух мероприятий: заочной олимпиады, проходящей в один тур с 15 ноября по 25 января, и очной олимпиады в виде письменной четырехчасовой работы, проводимой одновременно в Москве и на нескольких дополнительных площадках в других городах России 06 марта 2011 года.

Кроме этого проводится Заочная школа-олимпиада, которая начинается 1 октября 2010 года с опубликования задания 1 на сайте МГУ. На решение каждого задания дается шесть недель. Решения задания 1 принимаются до 10 ноября. Авторские решения задания 1 и новое задание 2 публикуются в середине ноября. Новое задание 3 публикуются до Нового года. Решения задания 2 и задания 3 принимаются до 10 февраля. Авторские решения задания 2 и задания 3 и новое задание 4 публикуются в середине февраля. Решения задания 4 принимаются до 15 марта. Авторские решения задания 4 публикуются в середине марта. Итоги заочной школы-олимпиады подводятся 25 марта. Каждое задание состоит из пяти задач. За каждое из заданий заочного конкурса участник может получить от 0 до 5 баллов. Максимальное количество баллов по заочной школе-олимпиаде — 20. Победители и призеры заочной школы-олимпиады награждаются дипломами. Участники заочной школы-олимпиады имеют преимущества в заочном этапе олимпиады «Ломоносов» по механике среди одиннадцатиклассников.

Заочная школа-олимпиада помимо задачи выявления победителей несет в себе образовательную функцию. Участники олимпиады имеют возможность, разбирая опубликованные решения каждого задания, повысить уровень своих знаний и в математике, и в физике.

Очный этап проводится весной. В очном конкурсе могут участвовать не более 35% участников заочного этапа олимпиады «Ломоносов» по механике. Работа в очном конкурсе оценивается по 100-бальной системе. Победители и призеры очного конкурса награждаются дипломами и могут получить льготы при поступлении в вузы.

Осенью проводится студенческая олимпиада. В 2010/2011 учебном году студенческая олимпиада перешагнула рамки Московского университета и вышла на всероссийский уровень. Теперь она проводится в два этапа и для студентов 1 — 4 курсов. В течение октября проходит заочный этап. По его результатам определяется победители «заочного этапа студенческой олимпиады по механике и математическому моделированию». В очном этапе могут принимать участие все желающие, но победители заочного этапа имеют дополнительные баллы, которые суммируются с их результатом на очном этапе. По результатам очного этапа определяются победители в пяти номинациях: «Лучший первокурсник», «Лучший второкурсник», «Лучший третьекурсник», «Лучший четвертокурсник» и «Абсолютный победитель студенческой олимпиады «Ломоносов - 2010» по механике».

В 2010 году заочный и очный этапы олимпиады по механике для 11 класса и олимпиада по механике для школьников 7 — 10 классов проводились в рамках олимпиады «Ломоносов», в которых суммарно приняли участие более 700 школьников.

Начиная с 2010 года, в Санкт-Петербурге на базе физмеха СПбГПУ открылась дополнительная площадка для проведения олимпиады «Ломоносов» по механике среди школьников. На следующий год получены заявки на открытие дополнительных площадок от мехмата Новосибирского, Пермского и Томского университетов.

В этом учебном году участники олимпиады Ломоносов по механике представляли 21 регионов России: Москву, Санкт Петербург, Московскую область, Волгоградскую, Кировскую, Ленинградскую, Нижегородскую, Новогородскую, Омскую, Смоленскую, Тамбовскую, Тульскую, Алтайский край, Краснодарский, Ставропольский, Башкирию, Карелию, Татарию, Удмуртию, Чувашию, Якутию, а также Белоруссию, Латвию и Украину.

Актуальная информация по участию в олимпиадах размещается в Интернете по адресу: **http://lomonosov.msu.ru**. Здесь же можно задать вопросы по заочному и очному турам олимпиады Ломоносов по механике.